УДК 531.36:62–50

© 1996 г. И.М. Борковская, В.М. Марченко

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается проблема стабилизации линейных стационарных систем с запаздыванием под воздействием линейной обратной связи разного типа. Особое внимание уделяется стабилизации систем второго порядка воздействием обратной связи в форме разностных регуляторов. В случае, когда построение разностного регулятора оказывается сложным, для решения проблемы предлагается линейная интегральная обратная связь. В отличие от известного метода Н.Н. Красовского и Ю.С. Осипова построения интегральной обратной связи на основе решения линейно-квадратичной задачи предлагаемый метод базируется на теореме Винера–Пэли для целых функций экспоненциального типа.

Проблема стабилизации динамических систем с запаздыванием была впервые рассмотрена Н.Н. Красовским и Ю.С. Осиповым [1, 2]. Для ее решения они ввели линейную обратную связь интегрального типа, для построения которой был использован метод, основанный на функционалах Ляпунова–Красовского и билинейной форме С.Н. Шиманова [3]. Однако практическая реализация этого метода требует нахождения собственных значений и собственных функций системы, что само по себе составляет специальную серьезную проблему. Поэтому представляет интерес рассмотрение линейной обратной связи в виде разностных регуляторов [4, 5, 6], реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа.

Ниже на примере двумерных систем представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа, в основу которых положены достаточные условия стабилизации, не требующие знания характеристических значений. Рассматривается "шкала" регуляторов типа обратной связи и новый метод (основанный на теореме Винера–Пэли из теории целых функций конечной степени) построения интегрального регулятора. Неявно предполагается, что фазовое пространство рассматриваемых систем с последействием есть $C[-h, 0]$. С точки зрения "шкалы" регуляторов типа обратной связи конкретный вид фазового пространства не является принципиальным (в случае рассмотрения пространства состояний системы с последействием, точнее пространства "минимальных" состояний, этот вопрос, безусловно, принципиален). Поэтому в работе не акцентируется внимание на конкретном виде фазового пространства.

Исследование начинается с более простого регулятора, и в случае отсутствия стабилизирующего регулятора в этом классе или если его построение оказывается сложным, рассматривается следующая по сложности линейная обратная связь, и так до тех пор, пока не будет найден соответствующий стабилизирующий регулятор (или установлена нестабилизируемость системы). Показано, что в известном примере Н.Н. Красовского и Ю.С. Осипова [1] наряду с предложенным регулятором интегрального типа можно построить и регулятор разностного типа.

1. Виды линейной обратной связи для систем с последействием. Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t), \quad t > 0 \tag{1.1}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad b \in \mathbb{R}^n$$

где A, A_1 – матрицы соответствующих размеров, $h > 0$ – постоянное запаздывание.

В связи с проблемой стабилизации такой системы была рассмотрена [1] интегральная обратная связь в форме

$$u(t)=\int_{-h}^{0}[dQ(s)]x(t+s),\quad t>0 \tag{1.2}$$

где $Q(s)$ – $(1\times n)$-матрица-функция, компоненты которой – функции ограниченной вариации на интервале $[-h, 0]$.

Для решения проблемы модального управления была рассмотрена [7] более общая обратная связь

$$u(t)=\int_{-\theta}^{0}[dQ(s)]x(t+s),\quad t>0 \tag{1.3}$$

где $\theta\geqslant h$ подлежит определению. В случае, когда мера Стилтьеса в (1.3) дискретна и сосредоточена в точках $-jh$ ($j=0,\ldots,N$), приходим к линейной обратной связи в виде разностного регулятора

$$u(t)=\sum_{j=0}^{N}q_j'x(t-jh),\quad q_j\in\mathbb{R},\quad j=0,1,\ldots,N \tag{1.4}$$

(N – натуральное число, штрих означает транспонирование). Регулятор (1.4) представляется более удобным для практической реализации. В этой связи особый интерес представляет частный случай

$$u(t)=q_0'x(t)+q_1'x(t-h) \tag{1.5}$$

регулятора (1.4), не выводящий замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса.

Регуляторы типа (1.4) рассматривались для систем с запаздыванием при исследовании задачи стабилизации независимо от запаздывания [6, 8]. Работа [8] содержит эффективно проверяемое достаточное условие такой стабилизации, которое, однако, представляется несколько стеснительным. Это условие затем было уточнено [6], однако выражено в неявной форме.

Отметим регулятор [9]

$$\sum_{j=0}^{N}p_ju(t-jh)=\sum_{j=0}^{N}q_j'x(t-jh) \tag{1.6}$$

и его обобщение

$$-\int_{-\theta}^{0}dP(s)u(t+s)=-\int_{-\theta}^{0}dQ(s)x(t+s)$$

которые могут быть полезны при решении различных задач качественной теории управления в системах с последействием.

Предлагаемый ниже подход к проблеме стабилизации может быть распространен на системы

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)+D\dot{x}(t-h)+bu(t)$$

с запаздывающим аргументом нейтрального типа при воздействии линейной обратной связи вида

$$u(t)=q_0'x(t)+q_1'x(t-h)+q_2'\dot{x}(t-h)$$

Применение регуляторов разного типа можно проследить также по работам [10–12].

2. Постановка задачи и основные результаты. Система (1.1)–(1.3) называется модально управляемой, если для любых действительных чисел r_{ij} ($i=1,\ldots,n$,

$j = 0,\dots, i$) найдутся неотрицательное число θ и матрица-функция $Q(\cdot)$ ограниченной вариации на $[-\theta, 0]$, такие, что характеристическое уравнение системы (1.1), замкнутой регулятором (1.3), имеет вид

$$\det\left[\lambda I - A - e^{-\lambda h}A_1 - b\int_{-\theta}^{0} e^{\lambda s}dQ(s)\right] = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij}\lambda^{n-i}e^{-\lambda jh} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

($\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, I – единичная ($n \times n$)-матрица).

Система (1.1), (1.3) считается стабилизируемой, если существует регулятор вида (1.3), при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные действительные части.

Аналогично ставятся задачи модального управления и стабилизации для регуляторов (1.2), (1.4)–(1.6).

Замкнутая система (1.1), (1.6) – это система нейтрального типа.

Известно [13], что система (1.1), (1.2) стабилизируема тогда и только тогда, когда условие

$$\operatorname{rank}M(\lambda) = \operatorname{rank}[\lambda I - A - e^{-\lambda h}A_1, b\,] = n \tag{2.2}$$

выполнено для любых комплексных чисел λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Условие $\operatorname{rank}M(\lambda) = n$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно [7] для модальной управляемости системы (1.1), (1.3).

Аналогично [5] условие

$$\det W(m) = \det[b, (A + mA_1)b, \dots, (A + mA_1)^{n-1}] \equiv \text{const} \neq 0, \quad m \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

является критерием модальной управляемости системы (1.1), (1.4). Ясно, что условие (2.3) достаточно для решения проблемы стабилизации системы (1.1), (1.4). В более общей форме[1]: если корни уравнения $\det W(m) = 0$ лежат вне круга $|m| \leqslant 1$, то система (1.1), (1.6) стабилизируема. Условие (2.3) необходимо для модального управления системы (1.1) регулятором (1.5), но, как показывает пример

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

($\lambda^2 - 1 = 0$ – характеристическое уравнение замкнутой системы), не является достаточным. Условия достаточного характера приводятся ниже для задачи стабилизации систем второго порядка.

3. Стабилизация линейных двумерных систем с запаздывающим аргументом. Рассмотрим систему (1.1) при $n = 2$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix}, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \tag{3.1}$$

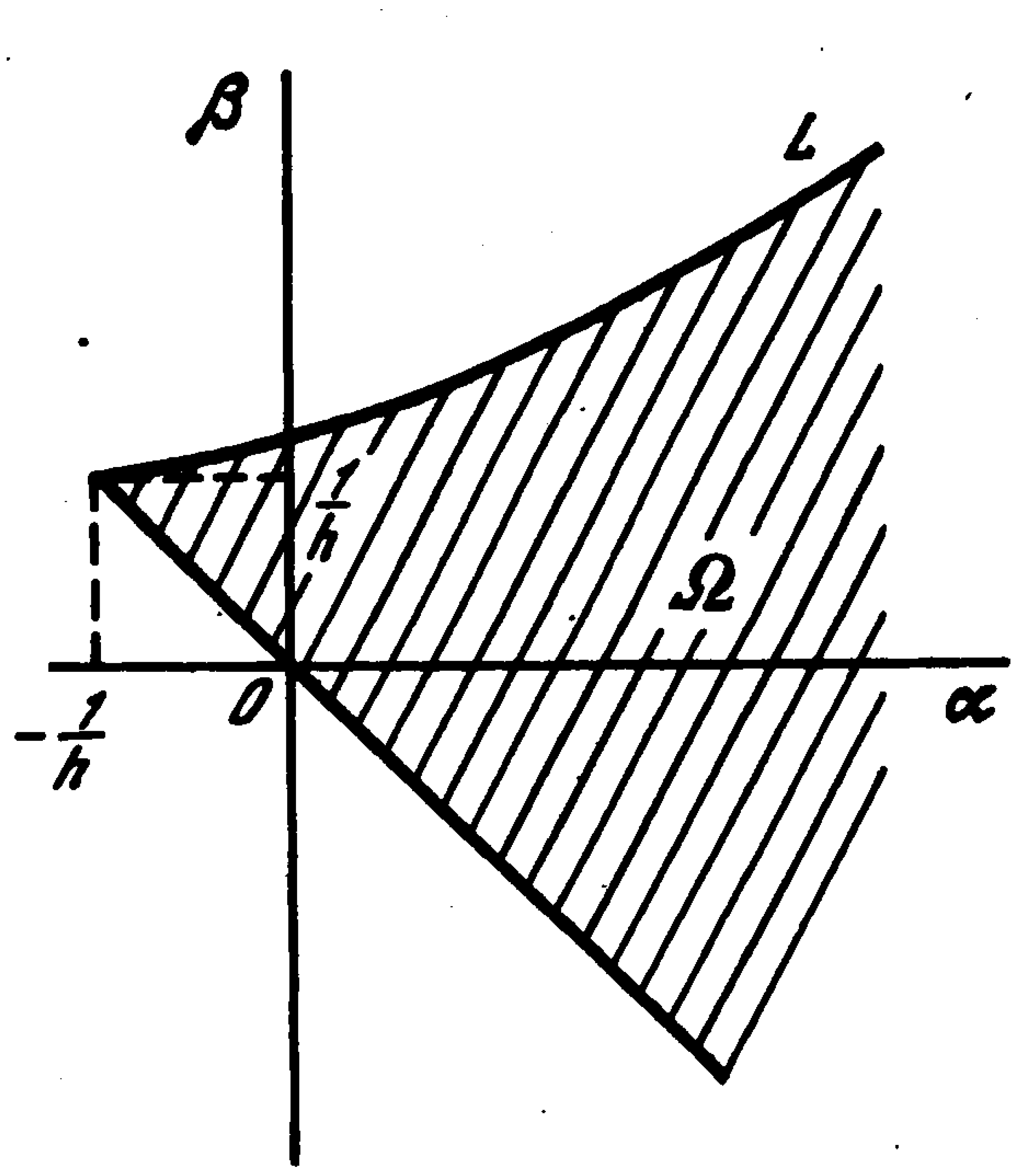
и регулятор (1.5). Обратную связь (1.5) запишем в операторной форме

$$\begin{gathered} u(t) = [\beta_1(e^{-ph}), \quad \beta_2(e^{-ph})]x(t) \\ \beta_i(e^{-ph}) = \beta_{i0} + \beta_{i1}e^{-ph}, \quad i = 1,2 \\ \beta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2, \quad j = 0,1; \quad [\beta_{10}, \beta_{20}] = q_0', \quad [\beta_{11}, \beta_{21}] = q_1' \end{gathered} \tag{3.2}$$

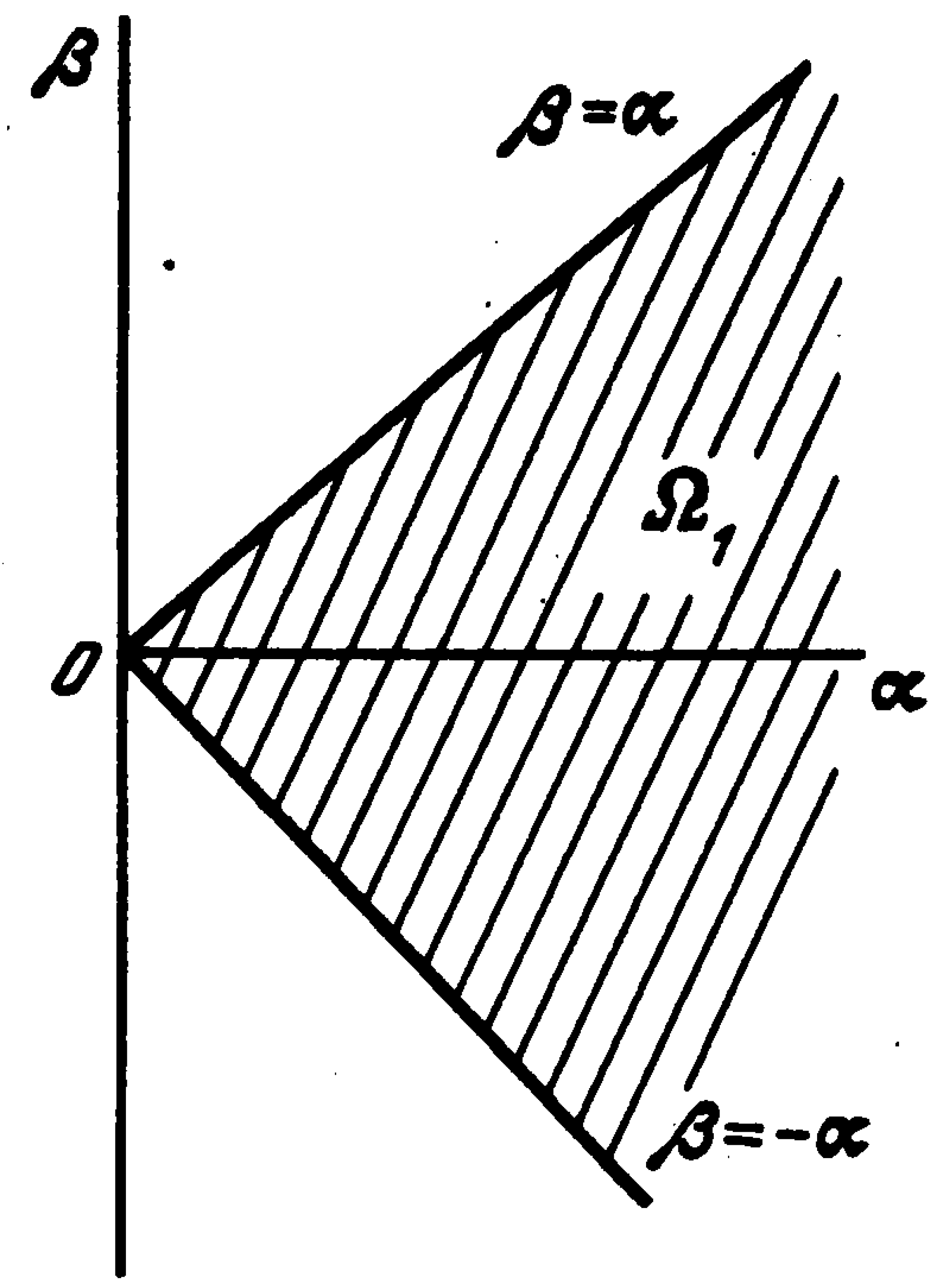
e^{-ph} – оператор запаздывания, $e^{-ph}x(t) = x(t - h)$, $p = d/dt$.

Поскольку условие (2.2) является необходимым и для стабилизации системы (1.1), (3.1), будем предполагать его выполненным.

[1] *Кириллова Ф.М., Марченко В.М.* Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом: Препринт №7(39). Минск: Ин-т математики АН БССР, 1978.



Фиг. 1



Фиг. 2

Обозначим $\Delta = \det[b, Ab]$, $\Delta_1 = \det[b, A_1 b]$.

Существуют две возможности: 1) $\Delta_1 = 0$, 2) $\Delta_1 \neq 0$.

Рассмотрим случай 1. Условие $\Delta_1 = 0$ означает, что b – собственный вектор матрицы A_1, т.е. $A_1 b = \overset{1}{\alpha}_{22} b$ ($\exists \overset{1}{\alpha}_{22} \in \mathbb{R}$). Если b является также собственным вектором матрицы A, т.е. $Ab = \alpha_{22} b$ ($\exists \alpha_{22} \in \mathbb{R}$), то преобразование $x = Ty$, $T = [d, b]$ с произвольным вектором d, таким, что $\det T \neq 0$, приводит систему (1.1) к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} \overset{1}{\alpha}_{11} & 0 \\ \overset{1}{\alpha}_{21} & \overset{1}{\alpha}_{22} \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} u(t) \tag{3.3}$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \overset{1}{\alpha}_{11}, \overset{1}{\alpha}_{22}$ – некоторые действительные числа.

Тогда требование (2.2) сводится к условию

$$\lambda - \alpha_{11} - \overset{1}{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} \neq 0 \tag{3.4}$$

для всех комплексных чисел λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

В дальнейшем понадобится следующая

Лемма ([14], с. 146–147). Пусть α, β – действительные числа. Тогда корни уравнения

$$\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h} = 0 \tag{3.5}$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α, β) принадлежит области устойчивости Ω, граница которой описывается линиями (фиг. 1):

$$\beta = -\alpha, \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos hg = 0, \\ g - \beta \sin hg = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\tilde{n}}{h} \ (L) \tag{3.6}$$

Более того, если точка (α, β) лежит в области Ω_1 (фиг. 2), то утверждение леммы справедливо для всех $h > 0$.

Утверждение 1. Условие (3.4) является достаточным для стабилизируемости системы (1.1) регулятором (1.5).

Доказательство. Положим $s_{10}, s_{20}, s_{11}, s_{21}$ – действительные числа, такие, что уравнение

$$\lambda - s_{20} - s_{21}e^{-\lambda h} = 0 \tag{3.7}$$

не имеет корней с неотрицательными действительными частями, например $s_{20} < 0$, $s_{21} = 0$. Тогда характеристическое уравнение системы (1.1), замкнутой регулятором

$$u(t) = [-\alpha_{21} + s_{10}, -\alpha_{22} + s_{20}]y(t) + [-\alpha_{21}^1 + s_{11}, -\alpha_{22}^1 + s_{21}]y(t-h) \tag{3.8}$$

имеет вид $(\lambda - \alpha_{11} - \alpha_{11}^1 e^{-\lambda h})(\lambda - s_{20} - s_{21}e^{-\lambda h}) = 0$ и, стало быть, не имеет корней в левой полуплоскости. Поэтому система (3.3), а следовательно, и (1.1) в этом случае стабилизируема регулятором (1.5).

Таким образом, имеет место

Теорема 1. В случае $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$ система (1.1) стабилизируема регулятором (1.5) тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1)$ из (3.3) принадлежит области Ω. Система (1.1) стабилизируема при всех запаздываниях $h > 0$ в том и только в том случае, когда точка $(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1)$ лежит в области Ω_1.

Теорема 1 следует из утверждения 1, если учесть лемму и необходимое условие стабилизируемости.

Замечание 1. Как вытекает из доказательства утверждения 1, стабилизирующий регулятор может быть выбран в форме (3.8), где числа α_{11} и α_{11}^1 являются собственными значениями матриц A и A_1 соответственно, которые отвечают отличным от b собственным векторам этих матриц.

Пусть далее $\Delta_1 = 0$, $\Delta \neq 0$. Выполняя преобразование $x = Ty$, где $T = [Ab - (a_{11} + a_{22})b, b]$, систему (1.1) приводим к виду

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -r_{20} & -r_{21} \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} u(t) \tag{3.9}$$

(r_{10}, r_{20}, α_{11}^1, α_{21}^1, α_{22}^1 – некоторые действительные числа). Полагая

$$u(t) = [r_{20}, r_{10}]y(t) - [\alpha_{21}^1, \alpha_{22}^1]y(t-h) + v(t) \tag{3.10}$$

получаем

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} v(t) \tag{3.11}$$

Замыкая систему (1.1) обратной связью

$$\begin{gathered} v(t) = [\eta_1(e^{-ph}),\ \eta_2(e^{-ph})]y(t), \quad p = \frac{d}{dt} \\ \eta_i(e^{-ph}) = \eta_{i0} + \eta_{i1}e^{-ph}, \quad \eta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2, \quad j = 0,1 \end{gathered} \tag{3.12}$$

приходим к характеристическому квазиполиному

$$\det \begin{Vmatrix} \lambda - \alpha_{11}^1 e^{-\lambda h} & -1 \\ -\eta_1(e^{-\lambda h}) & \lambda - \eta_2(e^{-\lambda h}) \end{Vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(\alpha_{11}^1 e^{-\lambda h} + \eta_2(e^{-\lambda h})) + \alpha_{11}^1 e^{-\lambda h}\eta_2(e^{-\lambda h}) - \eta_1(e^{-\lambda h}) \operatorname{def} \oplus$$

замкнутой системы.

Пусть λ_0, α, β – произвольные действительные числа, такие, что $\lambda_0 > 0$, $(\alpha, \beta) \in \Omega$ (например, $\alpha > |\alpha_{11}^1|$). Тогда уравнение $(\lambda + \lambda_0)(\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h}) = 0$ не имеет корней с неотрицательной действительной частью. Потребуем теперь, чтобы

$$\oplus = (\lambda+\lambda_0)(\lambda+\alpha+\beta e^{-\lambda h}) = \lambda^2 + \lambda(\alpha+\lambda_0+\beta e^{-\lambda h}) + \lambda_0(\alpha+\beta e^{-\lambda h})$$

Для этого достаточно положить

$$\alpha_{11}^1 e^{-\lambda h} + \eta_2(e^{-\lambda h}) = -\alpha - \lambda_0 - \beta e^{-\lambda h}$$

$$\alpha_{11}^1 e^{-\lambda h}\eta_2(e^{-\lambda h}) - \eta_1(e^{-\lambda h}) = \lambda_0(\alpha+\beta e^{-\lambda h})$$

откуда следует, что

$$\eta_1(e^{-\lambda h}) = -\lambda_0(\alpha+\beta e^{-\lambda h}) - \alpha_{11}^1 e^{-\lambda h}(\alpha+\lambda_0+\beta e^{-\lambda h}+\alpha_{11}^1 e^{-\lambda h})$$

$$\eta_2(e^{-\lambda h}) = -\alpha - \lambda_0 - \beta e^{-\lambda h} - \alpha_{11} e^{-\lambda h}$$

Пусть далее $\beta + \alpha_{11} = 0$. Тогда

$$\eta_1(e^{-\lambda h}) = -\alpha\lambda_0 - \alpha_{11}^1 \alpha e^{-\lambda h}, \quad \eta_2(e^{-\lambda h}) = -\alpha - \lambda_0 \tag{3.13}$$

Таким образом, на основании (3.10), (3.12), (3.13) искомый регулятор можно выбрать в виде

$$u(t) = [r_{20} - \alpha\lambda_0, r_{10} - \alpha - \lambda_0]y(t) - [\alpha_{21}^1 + \alpha\alpha_{11}^1, \alpha_{22}^1]y(t-h) \tag{3.14}$$

Отметим, что в силу леммы при $\alpha > |\alpha_{11}^1|$ регулятор (3.14) гарантирует устойчивость замкнутой системы для всех $h > 0$.

Теорема 2. Если $\Delta \neq 0$, $\Delta_1 = 0$, то система (1.1), (3.1) стабилизируема обратной связью (1.5) при любом запаздывании h, $h > 0$. При этом стабилизирующий регулятор определяется соотношением (3.14) с учетом обратного преобразования $y = T^{-1}x$.

Рассмотрим случай 2: $\Delta_1 \neq 0$. Используя преобразование $x = Ty$, $T = [A_1 b + r_{11}b, b]$, получаем

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -r_{22} & -r_{11} \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} u(t) \tag{3.15}$$

причем r_{11}, r_{22} определены в (2.1). Полагая

$$u(t) = [-\alpha_{21}, -\alpha_{22}]y(t) + [r_{22}, r_{11}]y(t-h) + v(t) \tag{3.16}$$

и выбирая $v(t)$ аналогично (3.12), приходим к характеристическому квазиполиному

$$\det\begin{Vmatrix} \lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12}-e^{-\lambda h} \\ -\eta_1(e^{-\lambda h}) & \lambda-\eta_2(e^{-\lambda h}) \end{Vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-\alpha_{11} - \eta_2(e^{-\lambda h})) + \alpha_{11}\eta_2(e^{-\lambda h}) - \eta_1(e^{-\lambda h})(\alpha_{12} + e^{-\lambda h}) \underset{\text{def}}{=} \oplus$$

замкнутой системы. При $\alpha_{11} < 0$ система стабилизируема обратной связью (3.12), (3.16) при $\eta_1(e^{-ph}) = 0$ и подходящем выборе $\eta_2(e^{-ph})$. Потребуем, чтобы

$$\oplus \equiv (\lambda+\alpha_1+\beta_1 e^{-\lambda h})(\lambda+\alpha_2+\beta e^{-\lambda h}) \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 + \lambda(\alpha_1+\alpha_2+(\beta_1+\beta_2)e^{-\lambda h}) + (\alpha_1+\beta_1 e^{-\lambda h})(\alpha_2+\beta_2 e^{-\lambda h}), \quad \lambda \equiv \mathbb{C}$$

где $(\alpha_1, \beta_1) \in \Omega$, $(\alpha_2, \beta_2) \in \Omega$. Отсюда

$$\eta_2 = -\alpha_{11} - \alpha_1 - \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)e^{-\lambda h} \tag{3.17}$$

$$\eta_1 = \frac{-\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_1+\alpha_2+(\beta_1+\beta_2)e^{-\lambda h})}{\alpha_{12}+e^{-\lambda h}} + \frac{-(\alpha_1+\beta e^{-\lambda h})(\alpha_2+\beta_2 e^{-\lambda h})}{\alpha_{12}+e^{-\lambda h}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Поскольку выражение $\eta_1(e^{-\lambda h})$ должно быть квазиполиномом, потребуем, чтобы

$$-\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_1+\alpha_2-(\beta_1+\beta_2)\alpha_{12})-(\alpha_1-\alpha_{12}\beta_1)(\alpha_2-\alpha_{12}\beta_2)=0 \tag{3.18}$$

Принимая во внимание то, что $(\alpha_1,\ \beta_1)\in\Omega$, $(\alpha_2,\ \beta_2)\in\Omega$, заключаем, что $\alpha_{11} <$ $< 1/h$ при $\alpha_{12}=0$. В этом случае стабилизирующий регулятор может быть выбран в виде

$$u(t)=[-\alpha_{21}-\alpha_{11}\beta_1-\alpha_{11}\beta_2-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,\ -\alpha_{22}-\alpha_{11}-\alpha_1-\alpha_2]y(t)+ \\ +[r_{22}-\beta_1\beta_2,\ r_{11}-\beta_1-\beta_2]y(t-h) \tag{3.19}$$

Рассмотрим случай $\alpha_{12}\neq 0$. Из (3.18) получаем $\beta_1=(\alpha_{11}+\alpha_1)/\alpha_{12}$.

Учитывая, что $(\alpha_1,\ \beta_1)\in\Omega$, $(\alpha_2,\ \beta_2)\in\Omega$, имеем

$$\alpha_1=-\frac{g\cos hg}{\sin hg} \\ \frac{g\cos hg}{\sin hg}<\frac{\alpha_{11}+\alpha_1}{\alpha_{12}}<\frac{g}{\sin hg},\quad 0<g<\frac{\tilde{n}}{h},\quad (\alpha_2,\beta_2)\in\Omega \tag{3.20}$$

Поскольку $\sin hg>0$ при $0<g<\tilde{n}/h$, то неравенство (3.20) может быть представлено в эквивалентной форме

$$\begin{cases}\alpha_{12}>0\\ -\alpha_{12}g<g\cos hg-\\ -\alpha_{11}\sin hg<-\alpha_{12}g\cos hg\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\alpha_{12}<0\\ -\alpha_{12}g\cos hg<g\cos hg-\\ -\alpha_{11}\sin hg<-\alpha_{12}g\end{cases} \tag{3.21}$$

Зафиксируем g, $0<g<\tilde{n}/(2h)$. Тогда из (3.21) получим

$$\begin{cases}\alpha_{12}>\alpha_{11}\sin hg/g-\cos hg\\ \alpha_{12}<\alpha_{11}\,\mathrm{tg}\,hg/g-1\\ \alpha_{12}>0\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\alpha_{12}<\alpha_{11}\sin hg/g-\cos hg\\ \alpha_{12}>\alpha_{11}\,\mathrm{tg}\,hg/g-1\\ \alpha_{12}<0\end{cases}$$

(фиг. 3).

Если $g\to\tilde{n}/(2h)$, то из (3.21) следует, что $(\alpha_{11}\geqslant 0)$ $\alpha_{12}>2h\alpha_{11}/\tilde{n}$, $\alpha_{11}>0$ (фиг. 4).

Зафиксируем теперь g, $\tilde{n}/(2h)<g<\tilde{n}/h$. Из (3.21) имеем $(\alpha_{11}\geqslant 0)$

$$\begin{cases}\alpha_{12}>\alpha_{11}\sin hg/g-\cos hg\\ \alpha_{12}>\alpha_{11}\,\mathrm{tg}\,hg/g-1\\ \alpha_{12}>0\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\alpha_{12}<\alpha_{11}\sin hg/g-\cos hg\\ \alpha_{12}<\alpha_{11}\,\mathrm{tg}\,hg/g-1\\ \alpha_{12}<0\end{cases}$$

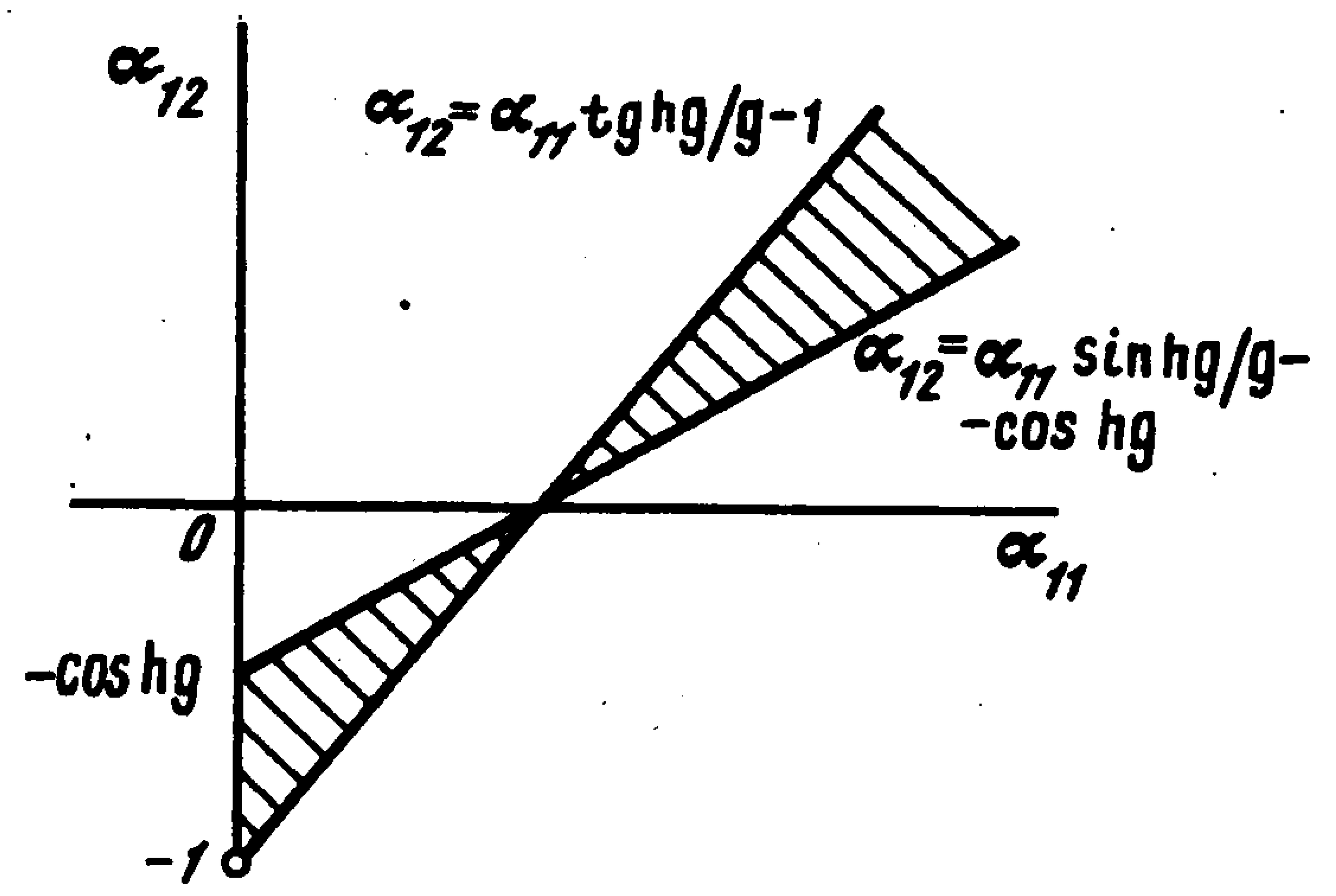
(фиг. 5).

Для точки (0, –1) критерий (2.2) не выполнен, поэтому при $\alpha_{11}=0$ и $\alpha_{12}=-1$ система не является стабилизируемой.

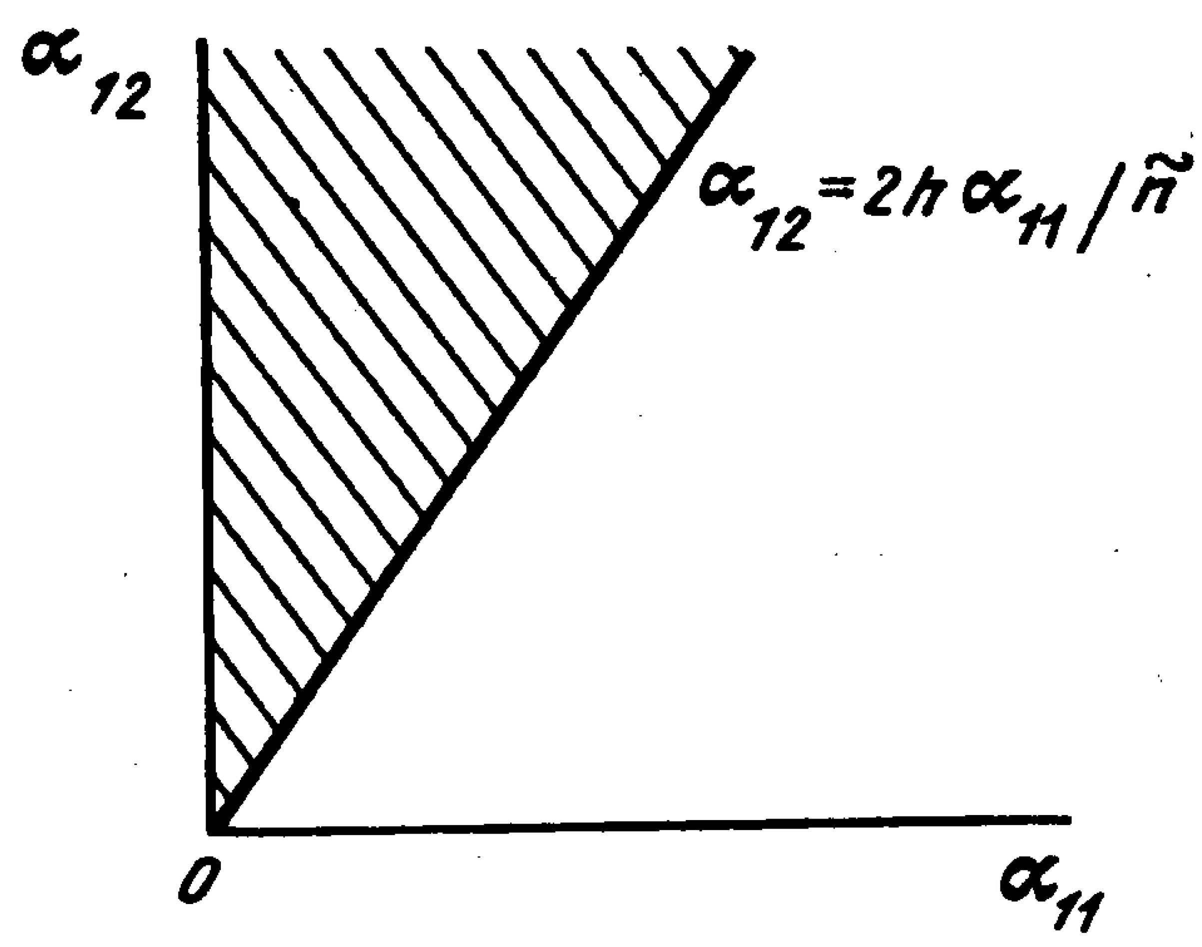
Анализируя изменение параметра g от 0 до $\tilde{n}/h$ (фиг. 3–5), получаем область Ω_2 стабилизируемости системы (1.1), (3.15) регулятором (1.5) (фиг. 6). Это открытая область, ограниченная линиями $\alpha_{12}=1$, $\alpha_{12}=-1$, $\alpha_{12}=\alpha_{11}h-1$.

Таким образом, имеет место

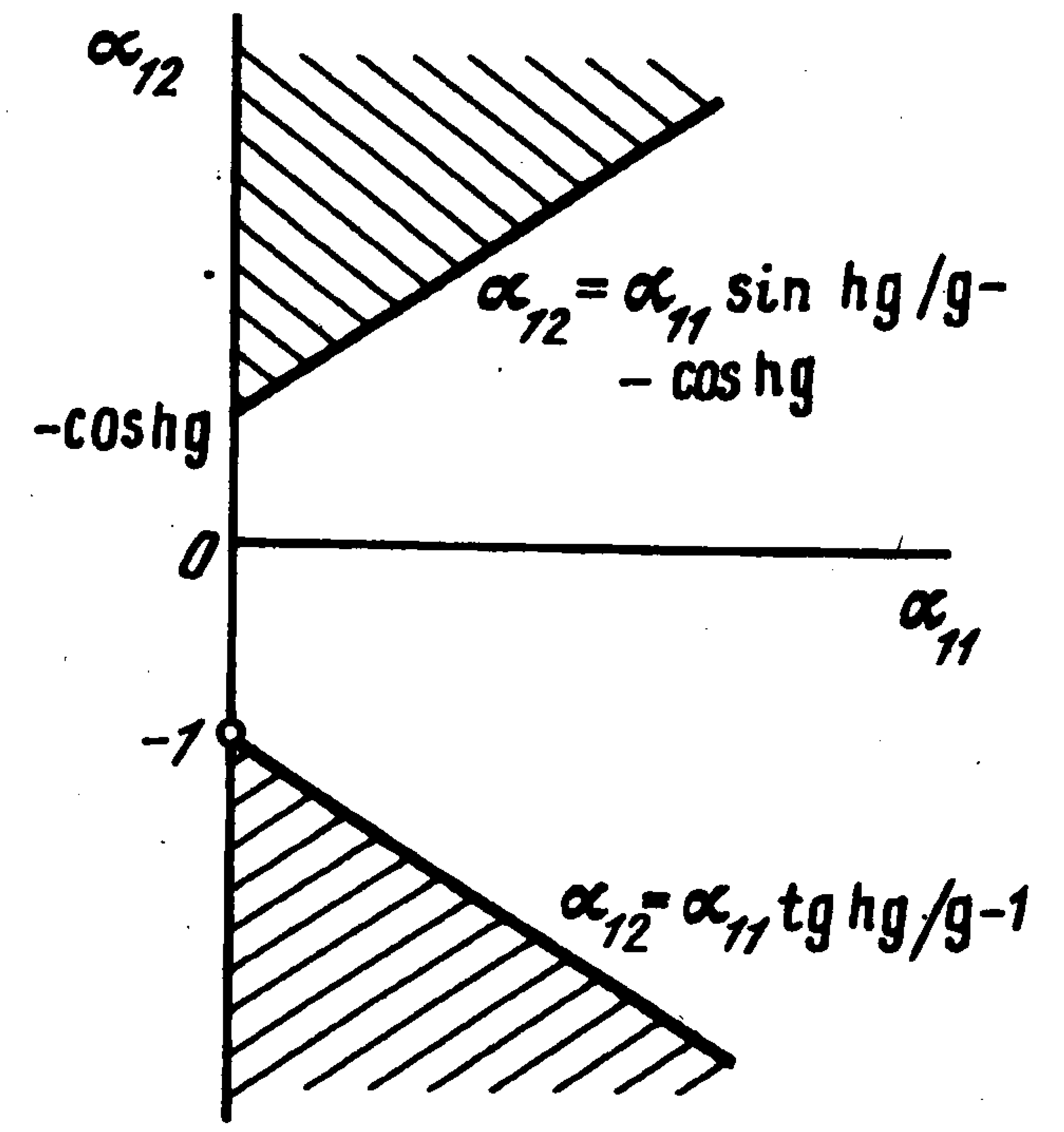
Теорема 3. Пусть $\Delta_1\neq 0$. Тогда система (1.1), (3.15) стабилизируема регулятором (1.5), если точка $(\alpha_{11},\alpha_{12})$ принадлежит области Ω_2.



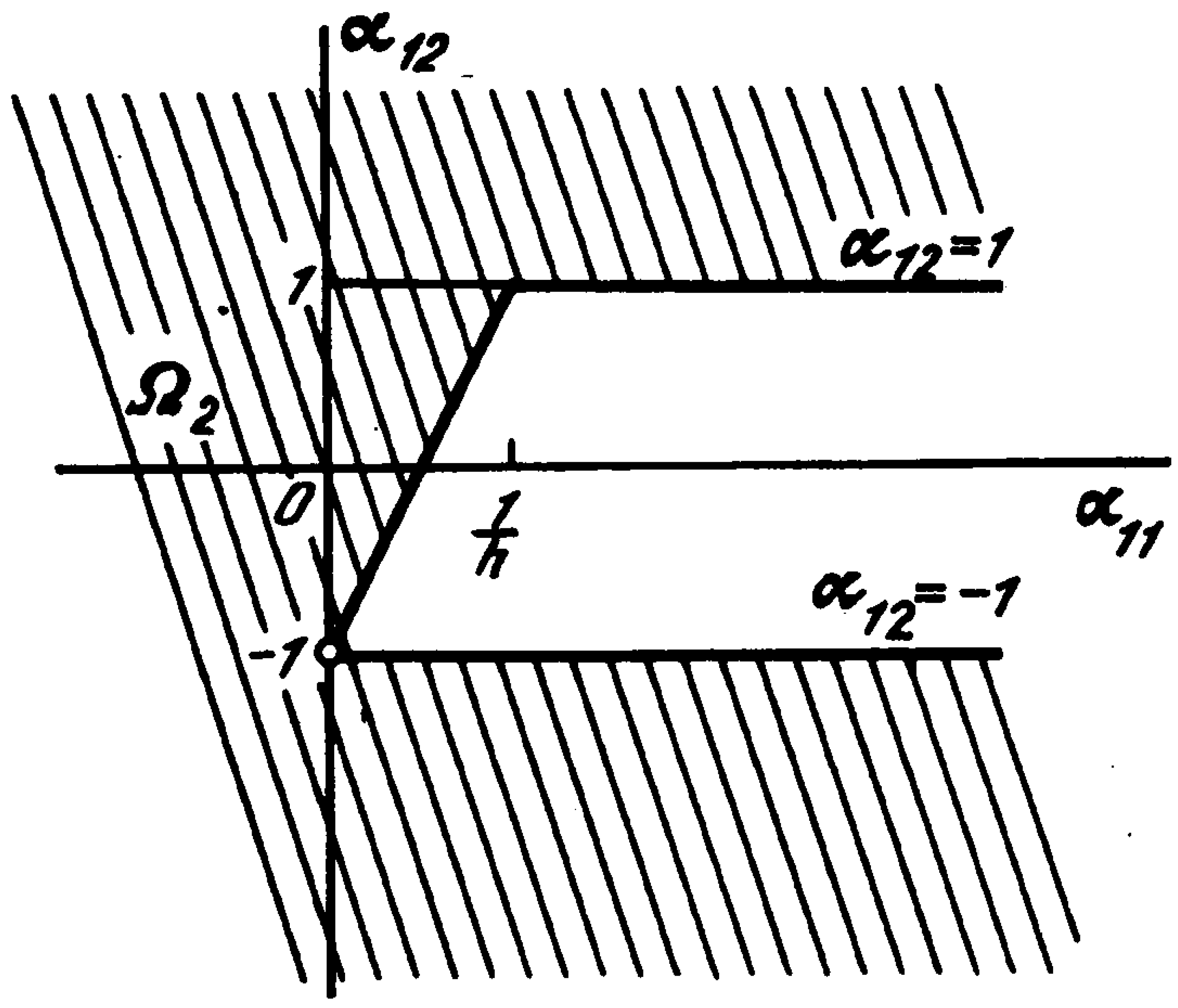
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Стабилизирующий регулятор при $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{11} \geqslant 0$ может быть выбран в виде, аналогичном (3.19) (при замене r_{11}, r_{22} на $\overset{1}{r}_{11}, \overset{1}{r}_{22}$).

В случае $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \notin \Omega_2$ вопрос о стабилизируемости системы (1.1), (3.15), (1.5) остается открытым. Но если $e^{-\alpha_{11}h} + \alpha_{12} \neq 0$ для $\alpha_{11} \geqslant 0$, то существует (см. (2.2)) интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. Ниже предлагается простой путь построения такого регулятора, не требующий определения собственных векторов системы (в отличие от известного метода Н.Н. Красовского и Ю.С. Осипова [1, 2]).

Итак, рассмотрим систему (3.15), (3.16)

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} v(t) \tag{3.22}$$

и линейную интегральную обратную связь

$$v(t) = \int_{-h}^{0} dQ(s) y(t+s), \quad t > 0 \tag{3.23}$$

или в операторной форме

$$v(t) = \int_{-h}^{0} e^{ps} dQ(s) y(t) \underset{\text{def}}{=} [\eta_1(e^{-p}), \eta_2(e^{-p})] y(t), \quad t > 0 \tag{3.24}$$

В силу теоремы Винера–Пэли при учете вида регулятора (1.2) функции η_1 и η_2 достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к e^{-ph} и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим регулятор вида (3.23) [15].

Потребуем, чтобы для характеристического квазиполинома системы (3.22), замкнутой регулятором (3.24), имело место соотношение

$$\det\begin{Vmatrix} p-\alpha_{11} & -\alpha_{12}-e^{-ph} \\ -\eta_1(e^{-p}) & p-\eta_2\ (e^{-p}) \end{Vmatrix} \equiv p^2+r_1p+r_2, \quad p\in\mathbb{C}$$

где $p^2 + r_1p + r_2$ – произвольный устойчивый полином ($r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}$). В результате

$$\eta_2(e^{-p}) = -(r_1+\alpha_{11}) + \frac{\alpha_{11}(r_1+\alpha_{11})+r_2+\eta_1(e^{-p})(\alpha_{12}+e^{-ph})}{\alpha_{11}-p}$$

Выберем теперь $\eta_1(e^{-p})$ так, чтобы удовлетворить уравнению

$$\alpha_{11}(r_1+\alpha_{11})+r_2+\eta_1(e^{-\alpha_{11}})(\alpha_{12}+e^{-\alpha_{11}h})=0$$

откуда ($\alpha_{12}+e^{-\alpha_{11}h} \neq 0$ в силу (2.2))

$$\eta_1(e^{-\alpha_{11}}) = \frac{-\alpha_{11}r_1-\alpha_{11}-r_2}{\alpha_{12}+e^{-\alpha_{11}h}} = \eta_1^*$$

Полагая $\eta_1(e^{-p}) \equiv \eta_1^*$, получаем

$$\eta_2(e^{-p}) = -(r_1+\alpha_{11}) + \frac{\alpha_{11}r_1+\alpha_{11}^2+r_2+\eta_1^*(\alpha_{12}+e^{-ph})}{\alpha_{11}-p} = -(r_1+\alpha_{11}) + \frac{\eta_2^*+\eta_1^*e^{-ph}}{\alpha_{11}-p},$$

$$\eta_2^* = \frac{e^{-\alpha_{11}h}(\alpha_{11}r_1+\alpha_{11}^2+r_2)}{\alpha_{12}+e^{-\alpha_{11}h}}$$

Возвращаясь к оригиналам, имеем

$$\frac{\eta_2^*+\eta_1^*e^{-ph}}{\alpha_{11}-p} \risingdotseq \begin{cases} -\eta_2^*e^{\alpha_{11}t}, & t\in[0,h] \underset{\text{def}}{=} q_2(t) \\ 0, & t>h \end{cases}$$

$$\frac{\eta_2^*+\eta_1^*e^{-ph}}{\alpha_{11}-p} y_2(p) \risingdotseq \int_0^t q_2(\tau)y_2(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^h \hat{q}_2(\tau)y_2(t-\tau)d\tau = \int_{-h}^0 q_2(-\mu)y_2(t+\mu)d\mu,$$

$$\hat{q}_2(\tau) = \begin{cases} q_2(\tau), & \tau \leqslant \max\{t,h\} \\ 0, & \tau > \max\{t,h\} \end{cases}$$

В результате получаем стабилизирующий регулятор в виде

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11}r_1-\alpha_{11}^2-r_2}{\alpha_2+e^{-\alpha_{11}h}} y_1(t) - (r_1+\alpha_{11})y_2(t) + \int_{-h}^0 \hat{q}_2(-\mu)y_2(t+\mu)d\mu$$

4. Пример. Рассмотрим систему [1]

$$\dot{x}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{Vmatrix} x(t) + \begin{Vmatrix} -\frac{\tilde{n}}{2} & 0 \\ \tilde{d} & 0 \end{Vmatrix} x(t-1) + \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix} \xi$$

где a, d, b_1, b_2 – постоянные параметры, ξ – управление. Имеем

$$\Delta = ab_1^2, \quad \Delta_1 = b_1 b_3; \quad b_3 = db_1 + \tilde{n} b_2 / 2$$

Возможны две ситуации: 1) $b_1 = 0$, 2) $b_1 \neq 0$.

Пусть $b_1 = 0$. Тогда $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$. Применяя преобразование

$$x = Ty, \quad T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{Vmatrix}, \quad b_2 \neq 0$$

и полагая

$$u(t) = [-a / b_2, 0] y(t) + [-d / b_2, 0] y(t-h) + v(t)$$

имеем

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} -\tilde{n}/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} v(t)$$

откуда $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{11}^1 = -\tilde{n}/2$. Точка $(0, \tilde{n}/2) \notin \Omega$. Поэтому (по теореме 1) система в этом случае не стабилизируема.

Пусть теперь $b_3 = 0$, $b_1 \neq 0$, $a \neq 0$. Тогда (по теореме 2) система стабилизируема регулятором (1.5). Регулятор может быть выбран так:

$$u(t) = [-\alpha\lambda_0, -\alpha - \lambda_0] y(t) + [0, \tilde{n}/2 + \tilde{n}\alpha/2] y(t-h)$$

где α и λ_0 – произвольные положительные действительные числа.

В случае, когда $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, используем преобразование

$$x = Ty, \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & b_1 \\ b_3 & b_2 \end{Vmatrix}$$

Полагая

$$u(t) = [0, \tilde{n}/2] y(t-h) + v(t)$$

имеем

$$\dot{y}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & b_4 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t) + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} y(t-h) + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} v(t), \quad b_4 = b_1 a / b_3$$

откуда $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = b_4$.

Условие стабилизируемости таково: $ab_1 + b_3 \neq 0$. Если оно выполнено, то стабилизирующий регулятор (1.5) может быть построен следующим образом. Если $a = 0$, то

$$u(t) = [-\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, -\alpha_1 - \alpha_2] y(t) + [-\beta_1\beta_2, -\beta_1 - \beta_2 + \tilde{n}/2] y(t-h)$$

$$(\alpha_i, \beta_i) \in \Omega, \quad i = 1,2$$

В случае $a \neq 0$ выберем параметр g таким образом, чтобы:

а) $g \in \left(\dfrac{\tilde{n}}{2h}, \dfrac{\tilde{n}}{h}\right)$, $\cos hg < -\alpha_{12}$ в случае $b_4 < -1$

б) $g \in \left(0, \dfrac{\tilde{n}}{2h}\right)$, $\cos hg < -\alpha_{12}$ в случае $-1 < b_4 < 0$

в) $g \in \left(\dfrac{\tilde{n}}{2h}, \dfrac{\tilde{n}}{h}\right)$, $\cos hg > -\alpha_{12}$ в случае $b_4 > 0$

Тогда искомый регулятор ищется в виде (3.19) (при замене r_{11}, r_{22} на r_{11}^1, r_{22}^1), где

$$\alpha_1 = -\frac{g \cos hg}{\sin hg}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_1}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_1}{b_4}$$

Авторы благодарят рецензента, обратившего их внимание на работу [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (MW 3000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
3. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
4. *Morse A.S.* Ring models for delay-differential systems // Automatica. 1976. V. 12. N 5. P. 529–531.
5. *Асмыкович И.К., Марченко В.М.* Управление спектром систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. № 7. С. 5–14.
6. *Datko R.* Remarks concerning the asymptotic stability and stabilization of linear delay differential equations // Math. Anal. and Appl. 1985. V. 111. N 2. P. 571–584.
7. *Марченко В.М.* О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22. № 5. С. 401–404.
8. *Kamen E.W.* Linear systems with commensurate time delays: Stability and stabilization independent of delay // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. AC-27. N 2. P. 367–375.
9. *Марченко В.М.* Модальное управление в системах с последействием // Автоматика и телемеханика. 1988. № 11. С. 73–83.
10. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optimiz. Theory and Appl. 1976. v. 20. N 2. P. 191–204.
11. *Olbrot A.W.* Stabilizability, detectability and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. AC-23. N 5. P. 887–890.
12. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment of linear systems with a class of noncommensurate delays // Intern. J. Control. 1988. V. 47. N 5. P. 1277–1289.
13. *Габелая А.Г., Иваненко В.И., Одарич О.Н.* Стабилизируемость линейных автономных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. № 8. С. 12–16.
14. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
15. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1960. 388 с.

Минск

Поступила в редакцию
1.I. 1995