задачи:

$$u(r,t)=\frac{r}{\rho(t)}\frac{d\rho}{dt},\quad M(r,t)=M_0\left(\frac{r}{\rho(t)}\right),\quad h=\frac{1}{\rho^2}h_0\left(\frac{r}{\rho(t)}\right) \tag{11}$$

причем функция $\rho(t)$ определяется соотношениями (9), (10) для случая $\varkappa$ = const, а в общем случае $\varkappa = \varkappa\ (t)$ она определяется решением уравнения (8).

Рассмотрим примеры. Простейшему случаю отвечает $\nu = \varkappa = 0$ (плоская нижняя граница, циклострофический баланс). Как видно из решения, начальное возмущение радиальной скорости приводит к равномерному движению по радиусу с сохранением циклострофического баланса. Если $A < 0$, то при $t \to |A|^{-1}$ имеем: $h \to \infty$ и $u \to \infty$, т.е. решение теряет смысл. В случае $\varkappa = 0$, $\nu > 0$ при $A \geqslant 0$ движение имеет характер монотонного растекания. При $A < 0$ и $t \in (0, |A|(A^2+g\nu)^{-1})$ жидкость движется к центру, при $t > |A|(A^2+g\nu)^{-1}$ – монотонно растекается. Если $h_0(r_*)=0$ для некоторого r_*, то решение описывает растекание капли по поверхности (без учёта поверхностного натяжения). И наконец, если $\varkappa$ = const > 0, $\nu > 0$ (положительная кривизна нижней границы) движение имеет колебательный характер с частотой $2\sqrt{g\varkappa}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 207 с.
2. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
21.X.1993

УДК 532.5:534.1

© 1996 г. В.А. Боровиков

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Строится равномерная асимптотика дальнего поля источника линейных гравитационных внутренних волн, движущегося по горизонтали равномерно и прямолинейно в горизонтально однородной экспоненциально стратифицированной среде. Полученные выражения позволяют найти эту асимптотику при любом взаимном расположении источника и точки наблюдения.

1. Постановка задачи. Рассматривается пространство x, y, z, заполненное экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью с распределением плотности $\rho(z)=\rho_0\exp(-\sigma z)$ и поле, возбуждаемое дипольным источником массы, движущимся в отрицательном направлении вдоль оси x с постоянной скоростью V. Предполагается, что источник включается и начинает движение при $t = 0$. Тогда при $t \to \infty$ и фиксированных $\xi = x + Vt, y, z$ (т.е. при фиксированном положении точки наблюдения относительно источника) поле стремится к конечному пределу. Если диполь ориентирован вдоль оси x и имеет единичный момент, то предельные значения возвышения ζ и горизонтальных компонент скорости u_x, u_y имеют вид [1]

$$\zeta = V\frac{\partial^2 G}{\partial\xi\partial z}, \quad u_x = V^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+k^2\right)\frac{\partial G}{\partial\xi}, \quad u_y = V^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+k^2\right)\frac{\partial G}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$G = \frac{-1}{8\pi^2V^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp i(\alpha\xi+\beta y+\gamma|z|)d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(k^2-\alpha^2)}}, \quad \gamma=\frac{1}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(k^2-\alpha^2)} \tag{1.2}$$

где $k=\sqrt{\sigma g}/V$, g – ускорение силы тяжести и под $\sqrt{k^2-\alpha^2}$ понимается арифметическое значение корня при $k^2>\alpha^2$ и $i\sqrt{\alpha^2-k^2}$ при $k^2<\alpha^2$.

Ставится задача определения асимптотики поля в дальней зоне, т.е. при $r=\sqrt{\xi^2+y^2+z^2}\gg 1$. Эта асимптотика была найдена в [1] для случая, когда фазовая функция $\Phi = \alpha\xi+\beta y+\gamma z$ имеет стационарные точки, т.е. при $\xi>0$. Однако результаты [1] неприменимы при $\xi\to 0$, т.е. в окрестности плоскости, проходящей через источник и перпендикулярной к его траектории (траверсной плоскости) и при $z\to 0$, т.е. в окрестности горизонта источника. Цель работы – построение асимптотики дальнего поля применимой при любых $kr\gg 1$ и ξ, y, z.

2. Асимптотика дальнего поля при ограниченных снизу $|kz|$. Преобразуем интеграл для G. Этот интеграл можно записать в форме

$$G=\frac{-1}{4\pi^2V^2}\mathrm{Re}\int\limits_0^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(\alpha,\beta)d\beta$$

с тем же подынтегральным выражением, что в (1.2). Полагая $\xi = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\theta\sin\varphi$ $(0<\theta,\ \varphi<\pi)$ и переходя к переменным интегрирования $p=\alpha/k$; $q=\beta/\alpha$, получим:

$$G=\mathrm{Re}Q;\quad Q=\frac{-1}{4\pi^2V^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(ikr\Phi)\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} \tag{2.1}$$

$$\Phi = p\cos\theta+pq\sin\theta\cos\varphi+\sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}\sin\theta\sin\varphi.$$

Найдем неравномерную асимптотику Q при $kr\to\infty$ и фиксированных $\theta\neq 0, \pi/2; \pi$; $\varphi\neq 0, \pi$. Эта асимптотика определяется стационарной точкой $T_1 = (\sin\varphi\cos\theta, -\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta)$ фазовой функции Φ внутри области интегрирования и стационарной точкой $T_2 = (0, 0)$ на границе этой области и имеет вид

$$Q\approx -\frac{\exp(ikr\sin\varphi)\chi(\cos\theta)}{2\pi V^2kr\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}}+\frac{\exp i(\pi/4+kr\sin\varphi\sin\theta)}{V^2(2\pi kr)^{3/2}\sqrt{\sin\varphi\sin\theta}\cos\theta} \tag{2.2}$$

Первое слагаемое – вклад стационарной точки T_1, второе – вклад стационарной точки T_2; функция $\chi(\cos\theta) = 1$ при $\cos\theta>0$, т.е. когда эта точка оказывается внутри области интегрирования $p>0$ и дает вклад в асимптотику Q; $\chi = 0$ при $\cos\theta<0$, т.е. когда эта точка оказывается вне области интегрирования. Таким образом, в заднем (по отношению к направлению движения источника) полупространстве $\xi>0$ поле убывает при $r\to\infty$ как r^{-1}; в переднем полупространстве поле убывает быстрее – как $r^{-3/2}$.

Асимптотика (2.2) неприменима при $\cos\theta\to 0$, т.е. при малых $\xi = x + Vt$ – в окрестности траверсной плоскости, и при $\sin\varphi\sin\theta\to 0$, т.е. при малых $|kz| = kr\sin\varphi\sin\theta$ – в окрестности горизонта источника. Выпишем асимптотику, применимую вблизи траверсной плоскости, т.е. описывающую переход из переднего полупространства в заднее.

При $\cos\theta\to 0$ стационарная точка T_1 стремится к границе $p = 0$ области интегрирования. Поскольку T_1 – точка локального максимума фазовой функции, равномерная асимптотика G выражается [2] через комплексно сопряженный интеграл Френеля. Чтобы ее получить, следует заменить в (2.2) функцию $\chi(\cos\theta)$ на выражение

$$F^*\left(\sqrt{2kr\sin\varphi}\sin(\pi/4-\theta/2)\right)+\frac{\exp i(\pi/4-2kr\sin\varphi\sin^2(\pi/4-\theta/2))}{2\sqrt{2\pi kr\sin\varphi}\sin(\pi/4-\theta/2)}$$

где $F^*(\eta)$ – комплексно сопряженный интеграл Френеля:

$$F^*(\eta)=\frac{\exp(\pi i/4)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\eta}\exp(-is^2)ds$$

В результате получаем:

$$G=\operatorname{Re}Q=\operatorname{Re}\left[-\frac{\exp(ikr\sin\varphi)F^*\left(\sqrt{2kr\sin\varphi}\sin(\pi/4-\theta/2)\right)}{2\pi V^2kr\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\cos\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(\pi i/4+ikr\sin\varphi\sin\theta)\left[\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}-\sin(\pi/4+\theta/2)\sqrt{\sin\theta}\right]}{V^2(2\pi kr)^{3/2}\sqrt{\sin\varphi\sin\theta(1-\sin^2\varphi\cos^2\theta)}\cos\theta}\right] \tag{2.3}$$

Выписанное выражение применимо при θ, близких к $\pi/2$, а когда аргумент интеграла Френеля оказывается велик, оно асимптотически эквивалентно (2.2). Оно непригодно, однако, при $\sin\theta\sin\varphi\to 0$, т.е. вблизи горизонта источника.

3. Асимптотика дальнего поля в переднем полупространстве при малых $|kz|$. Прежде чем строить эту асимптотику, преобразуем интеграл по q в (2.1). Положим ($q=\operatorname{sh} t$)

$$F(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp i\left(\alpha q+\beta\sqrt{1+q^2}\right)\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp i(\alpha\operatorname{sh}t+\beta\operatorname{ch}t)dt$$

Посредством сдвига по t можно показать, что при $\alpha^2-\beta^2=\gamma^2-\delta^2$ имеет место равенство $F(\alpha,\beta)=F(\gamma,\delta)$. Поэтому интеграл по q в (2.1) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ikr\sin\theta\left(pq\cos\varphi+\sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}\sin\varphi\right)\right]\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ikr\sin\theta\left(pq+\sqrt{1+q^2}\sin\varphi\right)\right]\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ikr\sin\theta\left(q\cos\varphi+\sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}\right)\right]\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} \tag{3.1}$$

Воспользовавшись первым из этих равенств, запишем

$$Q=-\frac{1}{4\pi^2V^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp ikr\left[p(\cos\theta+q\sin\theta)+\sqrt{1+q^2}\sin\theta\sin\varphi\right]\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}} \tag{3.2}$$

Здесь, аналогично формуле (1.2), под $\sqrt{1-p^2}$ понимается при $p>1$ величина $i\sqrt{p^2-1}$, т.е. точка ветвления $p=1$ функции $\sqrt{1-p^2}$ при интегрировании обходится в нижней полуплоскости.

Переведем путь интегрирования $p>0$ в (3.2) в полупрямую $p=t\exp(-i\beta)$ (где $0<t<\infty$) на комплексной плоскости p, а прямую $-\infty<q<\infty$ – в контур, состоящий из полупрямых $q=i+t$ при $-\infty<t<0$ и $q=i+t\exp(i\alpha)$ при $0<t<\infty$, где $\alpha>\beta$. При таком выборе контуров интегрирования и при $\cos\theta\leqslant 0$ показатель экспоненты в (3.2) будет иметь отрицательную вещественную часть, интеграл будет абсолютно сходиться при $|p|$, $|q|\to\infty$ и в (3.2) можно изменить порядок интегрирования. Тогда внутренний интеграл (по переменной p) при

$kr \gg 1$ вычисляется асимптотически, и для $G = \mathrm{Re}\,Q$ получаем:

$$G = \frac{-1}{4\pi^2 V^2 kr}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ikr\sqrt{1+q^2}\sin\theta\sin\varphi\right)dq}{\sqrt{1+q^2}\,(\cos\theta + q\sin\theta)} + O(kr)^{-3}$$

где полюс $q = -\mathrm{ctg}\,\theta$ обходится в верхней полуплоскости. Эту функцию можно записать в форме:

$$G \approx \frac{-1}{8\pi^2 V^2 kr}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ikz\sqrt{1+q^2}\right)}{\sqrt{1+q^2}}\left(\frac{1}{\cos\theta + q\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta - q\sin\theta}\right)dq =$$

$$= \frac{-\cos\theta}{4\pi^2 V^2 kr}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ikz\sqrt{1+q^2}\right)dq}{\sqrt{1+q^2}\,(\cos^2\theta - q^2\sin^2\theta)} \tag{3.3}$$

где полюс $q = -\mathrm{ctg}\,\theta$ обходится в верхней полуплоскости, а полюс $q = \mathrm{ctg}\,\theta$ – в нижней.

Докажем, что

$$\cos\theta\,\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\zeta\sqrt{1+q^2}\right)dq}{\sqrt{1+q^2}\,(\cos^2\theta - q^2\sin^2\theta)} = -2\pi\left[\frac{J_0(\zeta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n J_{2n}(\zeta)\right] \tag{3.4}$$

где J_{2n} – функции Бесселя. Действительно, обозначая левую часть (3.4) через $F(\zeta, \theta)$, имеем

$$F + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2} = \cos\theta\,\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\zeta\sqrt{1+q^2}\right)dq}{\sqrt{1+q^2}} = \pi\cos\theta J_0(\zeta)$$

Поэтому $F(\zeta, \theta)$ можно определить как решение уравнения

$$F + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2} = \pi\cos\theta J_0(\zeta)$$

стремящееся к нулю при $|\zeta| \to \infty$ (что следует из сформулированного выше правила обхода полюсов в интеграле (3.3)). Формула (3.4) проверяется теперь прямой выкладкой, использующей известные (см. [3], ф-лы 8.471) формулы для производных функций Бесселя.

Таким образом, при $kr \gg 1$ и $\cos\theta \le 0$ мы получили для G асимптотическое выражение

$$G = \frac{1}{2\pi V^2 kr}\left[\frac{J_0(kz)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)^n J_{2n}(kz)\right] + O(kr)^{-3} \tag{3.5}$$

Это выражение удобно использовать при малых kz, т.е. $J_{2n}(kz)$ экспоненциально по n стремятся к нулю при $n > kz/2$, и в ряде по n достаточно брать относительно небольшое число слагаемых. Например, при $kz = 4$ имеем:

$J_0(4) = -0{,}3971$	$J_4(4) = 0{,}2811$	$J_8(4) = 0{,}0049$
$J_2(4) = 0{,}3641$	$J_6(4) = 0{,}0490$	$J_{10}(4) = 0{,}0002$

и в ряде (3.5) достаточно взять 3–4 слагаемых. Дополнительным фактором сходимости является множитель $\mathrm{ctg}^{2n}(\theta/2)$, поскольку $\mathrm{ctg}(\theta/2) < 1$ при $\pi/2 < \theta < \pi$. Если же $|kz| > 4$, то достаточную точность дают асимптотические выражения (2.2) при ограниченных снизу $|\cos\theta|$ и (2.3) при малых $|\cos\theta|$.

4. Асимптотика дальнего поля в заднем полупространстве. Рассмотрим значения $\cos\theta > 0$. Интеграл (2.1) после замены $p, q \to -p, -q$ записывается в форме

$$G = \mathrm{Re}Q;\quad Q = Q(r,\theta,\varphi) = \frac{-1}{4\pi^2 V^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(ikr\Phi_1)\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}$$

где

$$\Phi_1 = -p\cos\theta + pq\sin\theta\cos\varphi + \sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}\sin\theta\sin\varphi$$

С другой стороны, очевидно, что

$$Q(r,\pi-\theta,\varphi) = \frac{-1}{4\pi^2V^2}\int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^\infty \exp(ikr\Phi_1)\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}$$

с той же функцией Φ_1. Поэтому

$$Q(r,\theta,\varphi)+Q(r,\pi-\theta,\varphi) = I(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2V^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^\infty \exp(ikr\Phi_1)\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}$$

и

$$G(r,\theta,\varphi) = -G(r,\pi-\theta,\varphi) + \operatorname{Re} I(r,\theta,\varphi)$$

Поскольку асимптотика G при $\theta > \pi/2$ уже известна, достаточно найти асимптотику I. Воспользуемся вторым равенством в (3.1), после чего изменим порядок интегрирования. Тогда асимптотику интеграла по p можно будет найти методом стационарной фазы, после чего получим

$$I \approx -\frac{\exp(-\pi i/4)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{kr}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left[ikr\left(q\sin\theta\cos\varphi + \sqrt{1+q^2\sin^2\theta}\right)\right]dq}{(1+q^2\sin^2\theta)^{1/4}\sqrt{1+q^2}} =$$

$$= I_1 = \frac{-\exp(-\pi i/4)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{kr}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\left[ikr\left(q\cos\varphi + \sqrt{1+q^2}\right)\right]dq}{(1+q^2)^{1/4}\sqrt{\sin^2\theta+q^2}}$$

При ограниченных снизу $|\sin\theta|$, т.е. вдали от полуоси $\xi > 0$ асимптотика интеграла I_1 вычисляется методом стационарной фазы:

$$I \approx -\frac{\exp(ikr\sin\varphi)}{2\pi V^2 kr\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}};$$

$$G(r,\theta,\varphi) \approx G_1(r,\theta,\varphi) = -\frac{\cos(kr\sin\varphi)}{2\pi V^2 kr\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}} - G_2(r,\theta,\varphi) \tag{4.1}$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi V^2 kr}\left[\frac{J_0(kz)}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)^n J_{2n}(kz)\right] + O(kr)^{-3}$$

При $|\sin\theta| \to 0$ и ограниченных снизу $|\cos\varphi|$ в подынтегральном выражении в I_1 две точки ветвления $q = \pm\sin\theta$ стремятся к вещественной оси и следует учесть их вклад в асимптотику I. В главном члене асимптотики этот вклад описывается модельным интегралом

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ikrq\cos\varphi)dq}{\sqrt{\sin^2\theta+q^2}} = 2K_0(kr\sin\theta\cos\varphi) = 2K_0(ky)$$

где K_0 – функция Бесселя от мнимого аргумента (см. [3], формула 3.754). Поэтому

$$G(r,\theta,\varphi) \approx G_1 - \frac{\cos(kr-\pi/4)K_0(ky)}{\pi^{3/2}V^2\sqrt{2kr}} \tag{4.2}$$

Второе слагаемое существенно лишь при ограниченных $|ky|$; при $|ky| \to 0$ оно логарифмически растет.

Выписанная асимптотика непригодна при малых $|\sin\theta|$ и $|\cos\varphi|$. В этом случае стационарная точка $q = -\operatorname{ctg}\varphi$ оказывается вблизи точек ветвления $q = \pm i\sin\theta$ и модельным интегралом является следующая функция, которая не сводится к известным специальным функциям:

$$W(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x-\alpha)^2]dx}{\sqrt{\beta^2+x^2}} \tag{4.3}$$

Асимптотика G при малых $|\sin\theta|$ и $|\cos\varphi|$ имеет вид

$$G\approx-\frac{1}{2\pi^{3/2}V^2}\mathrm{Re}\left[\frac{\exp i(-\pi/4+kr\sin\varphi)}{\sqrt{kr(1+\sin\varphi\cos\theta)}}W\left(\sqrt{2kr}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),\ \sqrt{2kr}\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right]+$$
$$+G_2(r,\theta,\varphi) \tag{4.4}$$

В выписанных оценках критерием малости $\sin\theta$ и $\cos\varphi$ является величина $(kr)^{-1/4}$.

5. Заключение. Сформулируем полученные результаты. Рассматривается функция G, имеющая интегральное представление (1.2). Поле линсйных внутренних гравитационных волн, возбуждаемое в горизонтально стратифицированной среде с распределением плотности $\rho(z) = \rho_0\exp(-\sigma z)$ дипольным источником массы с единичным моментом, ориентированным вдоль оси x, который движется вдоль оси x в отрицательном направлении со скоростью V, выражается через G по формулам (1.1). Асимптотика G при $\xi = x + Vt = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta\cos\varphi$; $z = r\sin\theta\sin\varphi$, $k=\sqrt{\sigma g}/V$ и $kr \gg 1$ описывается следующими выражениями.

При $|z|>\sqrt{r/k}$, $|\cos\theta|>(kr)^{-1/4}$, т.е. вдали от горизонтальной плоскости источника $z=0$ и траверсной плоскости $\theta=\pi/2$ – формулой (2.2).

Вблизи траверсной плоскости $\theta=\pi/2$, но вне горизонта источника, т.е. при $|\cos\theta|<(kr)^{-1/4}$, $|z|<\sqrt{r/k}$ – формулой (2.3). Вблизи горизонтальной плоскости источника в переднем полупространстве, т.е. при $|z|<\sqrt{r/k}$, $\pi/2<\theta<\pi$ – формулой (3.5).

Вблизи горизонтальной плоскости источника в заднем полупространстве, но вдали от полуоси $\xi>0$, т.е. при $|z|<\sqrt{r/k}$, $0<\theta<\pi/2$, $\sin\theta>(kr)^{-1/4}$ – формулой (4.1).

В окрестности полуоси $\xi>0$, т.е. при $\theta\approx\sin\theta<(kr)^{-1/4}$ – формулой (4.2) при $\cos\varphi>(kr)^{-1/4}$ и формулой (4.3) при $\cos\varphi<(kr)^{-1/4}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (M3L000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miles J.W.* Internal waves generated by a horizontally moving source // Geoph. Fluid Dyn. 1971. V. 2. N 1. P. 63–87.
2. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.1994