УДК 532.5

© 1996 г. П.Н. Свиркунов

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Исследуется класс неустановившихся осесимметричных движений идеальной несжимаемой жидкости на основе полученных точных решений уравнений теории мелкой воды.

В осесимметричном случае система уравнений теории мелкой воды в цилиндрической системе координат (z, r, φ) с вертикальной осью z, совпадающей с осью симметрии, радиальной координатой r и азимутальным углом φ имеет вид [1]

$$\frac{du}{dt}-\frac{\upsilon^2}{r}=-g\frac{\partial H}{\partial r},\quad \frac{d\upsilon}{dt}+\frac{u\upsilon}{r}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H-D)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(ru(H-D)\big)=0 \tag{1}$$

Здесь $u = u(r, t)$, $\upsilon = \upsilon(r, t)$ – радиальная и азимутальная компоненты скорости, $H = H(r, t)$ – высота свободной поверхности жидкости, g – ускорение свободного падения (направлено вниз вдоль оси z), $D(r)$ – функция, описывающая профиль нижней границы. (Схема течения изображена на фигуре.) Давление p определяется из соотношения гидростатики: $p = p_0 + \sigma g(H - z)$, где σ – плотность жидкости, p_0 – давление на верхней границе, которое считаем постоянным.

Решение ищем в интервале $r \in (0, r_*(t))$, в котором $H \geqslant D$. Граница $r = r_*(t)$ определена равенством $H(r_*(t),t) = D(r_*(t))$.

Начальное условие будет конкретизировано ниже.

Ограничимся случаем, когда нижняя граница имеет форму параболоида вращения

$$D(r)=\varkappa r^2/2 \tag{2}$$

где параметр $\varkappa$, вообще говоря, может быть функцией времени.

Перепишем систему (1) в виде

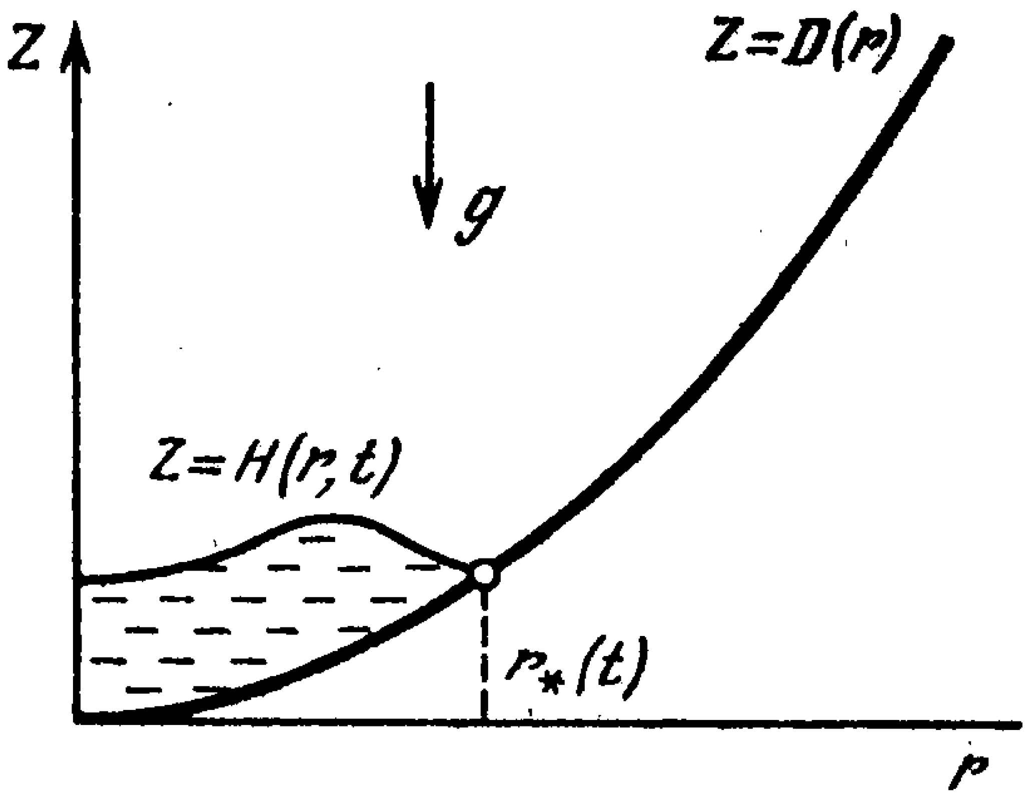
$$\frac{du}{dt}=-g\frac{\partial h}{\partial r}-g\varkappa r+\frac{M^2}{r^3},\quad \frac{dM}{dt}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruh)=0,\quad h=H-\frac{1}{2}\varkappa r^2,\quad M=r\upsilon \tag{3}$$

Отметим, что система (1) инвариантна относительно перехода в систему координат, вращающуюся относительно оси z с постоянной угловой скоростью Ω. В такой системе координат, как известно, [2] уравнения динамики модифицируются следующим образом: в правую часть первого уравнения (1) добавляются слагаемые $2\Omega\upsilon + \Omega^2 r$, а второго уравнения – соответственно $-2\Omega u$. Заменой $\upsilon = \upsilon' - \Omega r$ данные слагаемые уничтожаются, и приходим к прежней системе (1), в которой вместо υ стоит υ'.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ заданы: радиальная скорость в виде

$$u = Ar, \quad A = \text{const} \tag{4}$$



некоторое произвольное распределение углового момента $M = M_0(r)$, а начальное распределение толщины слоя $h = h_0(r)$ связано с M_0 соотношением

$$\frac{M_0^2}{r^3} - g\frac{\partial h_0}{\partial r} = g\nu r, \quad \nu = \text{const}. \tag{5}$$

Если $\varkappa = \text{const}$, $\nu = \varkappa$, то данное соотношение совместно с равенством $u = 0$ описывают стационарное решение системы (3) (циклострофический баланс).

Задачу удобно решать в лагранжевых координатах. Для $r = r(t, r_0)$ ищем автомодельное решение вида

$$r = \rho(t) r_0 \tag{6}$$

где r_0 – начальная (лагранжева) координата частиц жидкости. Из второго и третьего уравнений (4) следует

$$M = M_0(r_0), \quad h = \frac{r_0}{r}\frac{\partial r_0}{\partial r} h_0(r_0) = \frac{1}{\rho^2} h_0(r_0) \tag{7}$$

Из соотношения (6) и второго равенства (7) видно, что $r^3 \partial h / \partial r = r_0^3 \partial h_0 / \partial r_0$, откуда при учете начального условия (5) имеем

$$M^2 - gr^3 \frac{\partial h}{\partial r} = g\nu r_0^4$$

Подставляя это соотношение и выражение (6) в первое уравнение (3), получим после упрощений окончательное уравнение одномерного движения частицы единичной массы с потенциальной энергией $U = \frac{g\nu}{2\rho^2} + \frac{g\varkappa\rho^2}{2}$:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}; \quad \rho = 1, \quad \frac{d\rho}{dt} = A \text{ при } t = 0 \tag{8}$$

При $\varkappa = \text{const} > 0$ и $\nu > 0$ движение представляет собой нелинейные колебания около положения равновесия $\rho = (\nu / \varkappa)^{1/4}$. При $\nu \leqslant 0$, как будет видно из дальнейшего, решение $\rho(t)$ за конечное время обращается в нуль.

При $\varkappa = \text{const} \geqslant 0$ интегрирование уравнения (8) проводится элементарно. Решение имеет вид

$$\begin{gathered}\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2g\varkappa}}\left(B + B'\sin(\varphi + \operatorname{sgn} A\sqrt{4g\varkappa}\, t)\right) \\ B = A^2 + g(\varkappa + \nu), \quad B' = \sqrt{B^2 - 4g\varkappa\nu}, \quad \sin\varphi = (2g\varkappa - B)/B'\end{gathered} \tag{9}$$

Если $\varkappa = 0$ (плоская нижняя граница), то

$$\rho(t) = \sqrt{(1 + At)^2 + g\nu t^2} \tag{10}$$

Переход к эйлеровому представлению в этой задаче несложен в связи с простой зависимостью (6). Выпишем сводку формул, определяющих окончательное решение задачи:

$$u(r,t)=\frac{r}{\rho(t)}\frac{d\rho}{dt},\quad M(r,t)=M_0\left(\frac{r}{\rho(t)}\right),\quad h=\frac{1}{\rho^2}h_0\left(\frac{r}{\rho(t)}\right) \tag{11}$$

причем функция $\rho(t)$ определяется соотношениями (9), (10) для случая $\varkappa$ = const, а в общем случае $\varkappa = \varkappa\ (t)$ она определяется решением уравнения (8).

Рассмотрим примеры. Простейшему случаю отвечает $\nu = \varkappa = 0$ (плоская нижняя граница, циклострофический баланс). Как видно из решения, начальное возмущение радиальной скорости приводит к равномерному движению по радиусу с сохранением циклострофического баланса. Если $A < 0$, то при $t \to |A|^{-1}$ имеем: $h \to \infty$ и $u \to \infty$, т.е. решение теряет смысл. В случае $\varkappa = 0$, $\nu > 0$ при $A \geqslant 0$ движение имеет характер монотонного растекания. При $A < 0$ и $t \in (0, |A|(A^2 + g\nu)^{-1})$ жидкость движется к центру, при $t > |A|(A^2 + g\nu)^{-1}$ – монотонно растекается. Если $h_0(r_*) = 0$ для некоторого r_*, то решение описывает растекание капли по поверхности (без учёта поверхностного натяжения). И наконец, если $\varkappa$ = const > 0, $\nu > 0$ (положительная кривизна нижней границы) движение имеет колебательный характер с частотой $2\sqrt{g\varkappa}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 207 с.
2. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
21.X.1993

УДК 532.5:534.1

© 1996 г. В.А. Боровиков

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Строится равномерная асимптотика дальнего поля источника линейных гравитационных внутренних волн, движущегося по горизонтали равномерно и прямолинейно в горизонтально однородной экспоненциально стратифицированной среде. Полученные выражения позволяют найти эту асимптотику при любом взаимном расположении источника и точки наблюдения.

1. Постановка задачи. Рассматривается пространство x, y, z, заполненное экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью с распределением плотности $\rho(z) = \rho_0 \exp(-\sigma z)$ и поле, возбуждаемое дипольным источником массы, движущимся в отрицательном направлении вдоль оси x с постоянной скоростью V. Предполагается, что источник включается и начинает движение при $t = 0$. Тогда при $t \to \infty$ и фиксированных $\xi = x + Vt$, y, z (т.е. при фиксированном положении точки наблюдения относительно источника) поле стремится к конечному пределу. Если диполь ориентирован вдоль оси x и имеет единичный