УДК 532.516

© 1996 г. В.Г. Жаринов

СТАЦИОНАРНОЕ ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ ЧАСТЯМИ СООСНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

Получено точное решение плоской задачи для уравнений Навье–Стокса при наличии радиальной симметрии для траекторий частиц жидкости. В отличие от известных решений учитывается градиент давления в направлении угла.

1. Для плоского стационарного движения жидкости по концентрическим окружностям справедливы равенства

$$u_r = 0, \quad u_\theta = u(r) \tag{1.1}$$

где r, θ – полярные координаты, u_r, u_θ – составляющие скорости в направлении соответственно радиальной и угловой координат. Наряду с условиями (1.1) обычно заранее предписывают также условие для давления [1–3]

$$p = p(r) \tag{1.2}$$

Это условие при учете (1.1) приводит для функции $u(r)$ к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, получаемому из уравнений Навье–Стокса. Интегрирование этого уравнения дает

$$u = Mr + N/r \tag{1.3}$$

где M, N – произвольные постоянные.

Функцию (1.3) обычно используют [1–3] для решения задачи о стационарном движении жидкости между двумя вращающимися соосными цилиндрами.

Ниже также будем считать, что траектории частиц жидкости характеризуются радиальной симметрией, но при этом заранее не будем использовать условие (1.2) для давления. Плотность и коэффициент вязкости жидкости считаем постоянным.

Будем рассматривать уравнение для функции тока

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2} = \nu\Delta\Delta\psi, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{1.4}$$

в прямоугольных координатах, которое получается после исключения давления из уравнений Навье–Стокса для плоского движения.

Решение уравнения (1.4) будем искать в классе функций $\psi = \psi(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Можно убедиться, что в этом случае левая часть уравнения (1.4) тождественно обращается в нуль, что приводит к бигармоническому уравнению. Используя представление Гурса бигармонической функции ψ через гармонические ψ_1 и ψ_2, $\psi = r^2\psi_1 + \psi_2$ [4], получаем решение

$$\psi = r^2(A + B\ln r) + D + C\ln r \tag{1.5}$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные.

Проекции скорости

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -(2A + B)r - 2Br\ln r - \frac{C}{r}, \quad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \equiv 0 \tag{1.6}$$

Решение (1.6) было получено ранее [2] непосредственно из уравнений Навье–Стокса. Установим связь этого решения с точным решением Гамеля уравнения (1.4):

$$\psi = f(\varphi), \quad \varphi = -\frac{2(a\ln r + b\theta)}{a^2+b^2}, \quad a,b = \text{const} \tag{1.7}$$

При $b = 0$ функция f удовлетворяет уравнению

$$f''' + 2af'' + a^2f' = c, \quad c = \text{const} \tag{1.8}$$

Используя соотношение $f' = aru_\theta/2$, вместо (1.8) запишем

$$\frac{d^2u_\theta}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{du_\theta}{dr} + \frac{1}{r^2}u_\theta = \frac{8}{a^3r^3}c \tag{1.9}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция (1.3) удовлетворяет уравнению (1.9) при $c = Na^3/2$.

Оказывается, что уравнению (1.9) удовлетворяет также функция $u_\theta(r)$, определяемая первым соотношением (1.6), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

При учете равенства (1.6) запишем уравнения Навье–Стокса в полярных координатах

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[(2A+B)r + 2Br\ln r + \frac{C}{r}\right]^2, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -4B\nu$$

Интегрируя эту систему, найдем

$$\frac{p}{\rho} = (2A+B)^2\frac{r^2}{2} - \frac{C^2}{2r^2} + 2C(2A+B)\ln r + 2B^2r^2\left(\ln^2 r - \ln r + \frac{1}{2}\right) +$$
$$+2B(2A+B)r^2(\ln r - 1/2) + 4BC\ln|\ln r| - 4B\nu\theta + \text{const} \tag{1.10}$$

Касательное напряжение трения между кольцевыми слоями

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) = \mu\left(-2B + \frac{2C}{r^2}\right) \tag{1.11}$$

где μ – динамический коэффициент вязкости.

Из сравнения (1.3) и (1.6) видно, что решения вида (1.3) получаются из (1.6), если положить $B = 0$.

Заметим, что хотя траектории частиц жидкости характеризуются радиальной симметрией ($\psi = \psi(r)$); давление, как видно из (1.10), является при $B \neq 0$ функцией не только r, но и θ.

Наличие трех произвольных постоянных в (1.6) в отличие от (1.3) позволяет решать краевые задачи с условиями прилипания на неподвижных стенках.

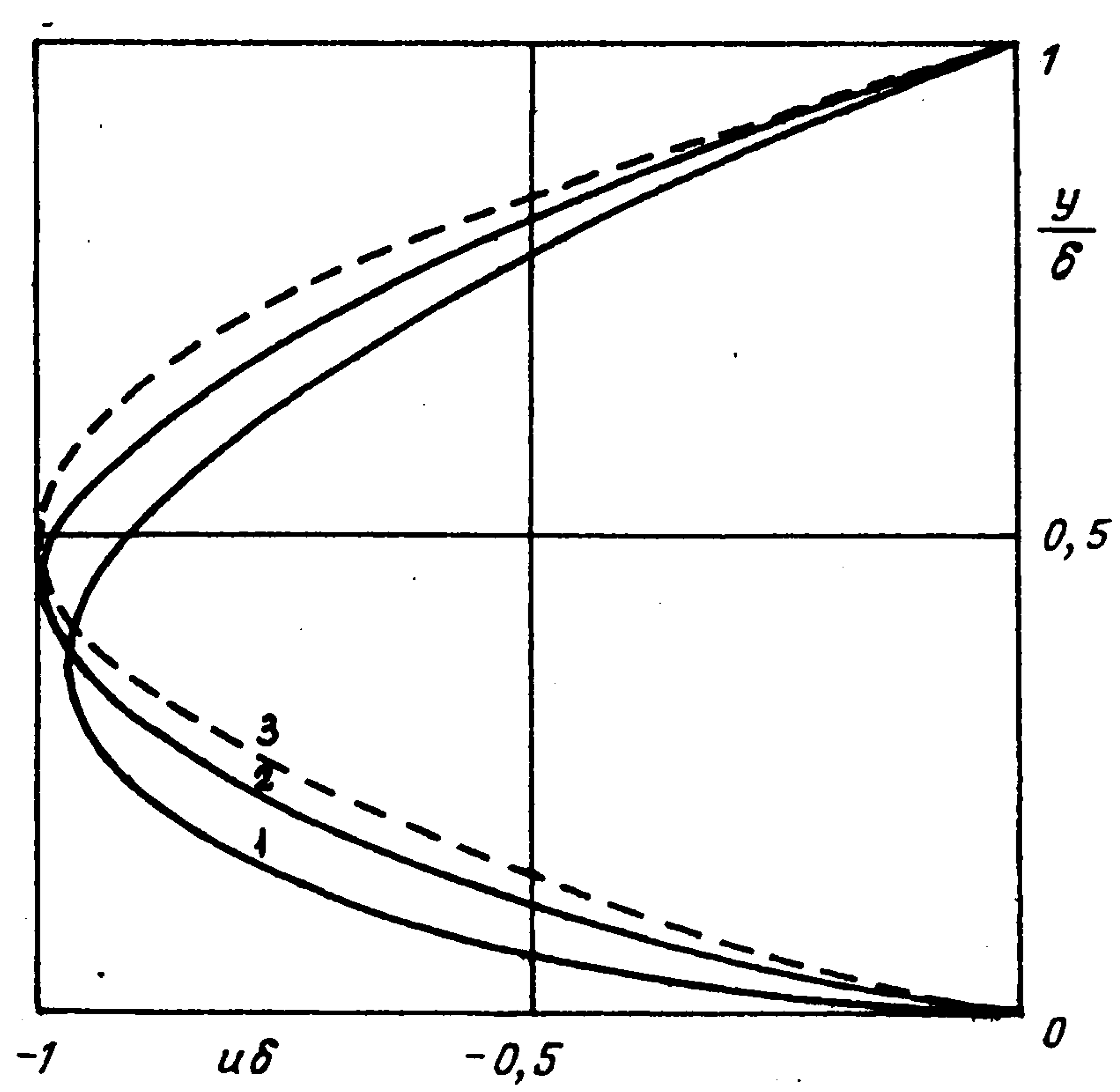
2. Очевидно, что решение (1.10) имеет смысл только при $\theta \in (0,2\pi)$, т.е. в плоском канале, образованном частями соосных цилиндров радиусами R_1 и R_2 ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < 2\pi$). На стенках канала должны выполняться условия прилипания: $u_\theta = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$. Будем считать, что известен расход Q жидкости, протекающей через канал, образуемый частями соосных цилиндров, высоты которых в направлении оси z равны единице и поперечное сечение которых образует рассматриваемый плоский канал (этот расход равен $\psi(R_2) - \psi(R_1)$). Указанные три условия позволяют получить систему уравнений для определения трех произвольных постоянных, входящих в (1.6):

$$2R_iA + (R_i + 2R_i\ln R_i)B + R_i^{-1}C = 0, \quad i = 1,2 \tag{2.1}$$
$$(R_2^2 - R_1^2)A + (R_2^2\ln R_2 - R_1^2\ln R_1)B + (\ln R_2 - \ln R_1)C = Q$$

Определитель системы (2.1)

$$\Delta = 2R_1R_2\left[2\ln^2 k - \frac{1}{2k^2}(k^2-1)^2\right], \quad k = \frac{R_2}{R_1}$$

при $k > 1$ отрицателен в силу неравенства $2\ln k < k - 1/k$, которое получается интегрированием



неравенства $2/k<1+1/k^2$ в пределах от $k = 1$ до k. Таким образом, система (2.1) имеет единственное решение:

$$A=\Delta_1/\Delta,\quad B=\Delta_2/\Delta,\quad C=\Delta_3/\Delta \tag{2.2}$$

$$\Delta_1=Q\left\{\frac{1-k^2}{k}-\frac{2}{k}[(k^2-1)\ln R_1+k^2\ln k]\right\}$$

$$\Delta_2=2Q(k^2-1)/k,$$
$$\Delta_3=4QR_1^2k\ln k$$

Подставив (2.2) в (1.6), (1.10), (1.11), получим соотношения для определения соответствующих параметров потока в рассматриваемом канале.

Заметим, что ранее [2] было найдено приближенное решение аналогичной задачи при условии неизменности давления по радиусу, когда $p = p(\theta)$.

3. Для удобства дальнейшего анализа полученные соотношения будем рассматривать в безразмерном виде, введя масштабы скорости V и длины R_1. Тогда величину u_θ в (1.6) следует заменить на u_θ/V, Q – на $Q/(VR_1)$, R_1 – на 1, R_2 – на $R_2/R_1=k=1+h$, r – на $r/R_1=1+y$.

Считая безразмерную ширину зазора h между цилиндрами (а значит, и y), малой величиной, разложим в (1.6) величины, содержащие $r = 1 + y$, в ряд и ограничимся слагаемыми $O(y^2)$ включительно. В результате получим приближенное выражение

$$u = a + by + my^2 \tag{3.1}$$

$$a=-(2A+B)-C,\quad b=-2B+2C+a,\quad m=-B-C$$

Первое соотношение (2.1) при $i = 1$ дает $a = 0$. Разложив $\ln k = \ln(1 + h)$ в ряд и ограничившись в числителях и знаменателях слагаемыми низшего порядка малости, определим b и m. Подставив эти значения в (3.1), найдем

$$u=6Qh^{-3}(-hy+y^2) \tag{3.2}$$

Это выражение представляет собой решение задачи о прямолинейном движении вязкой жидкости между двумя параллельными неподвижными стенками, находящимися друг от друга на расстоянии h (плоское течение Пуазейля).

Его можно рассматривать как приближенное соотношение для скорости движения жидкости в канале, образованном частями соосных круговых цилиндров, зазор между которыми мал по сравнению со средним радиусом кривизны канала.

На фигуре представлены некоторые результаты расчетов. Полагали $Q=2/3$. Кривые *1* и *2* получены с помощью формул (1.6) и (2.2), парабола 3 соответствует формуле (3.2). Сравнивая, следует иметь в виду, что для первой и третьей кривых $h = 10$ (соответственно $\delta = 10$), для второй и третьей кривых $h = 1$ ($\delta = 1$). При $h = 0{,}01$ ($\delta = 0{,}01$) кривые практически совпадают.

4. До сих пор рассматривались движения в канале с неподвижными стенками. Рассмотрим теперь вращающийся цилиндр, охваченный частью соосного с ним кругового цилиндра. В этом случае граничные условия будут следующими:

$$u_\theta=U \text{ при } r=R_1,\quad u_\theta=0 \text{ при } r=R_2$$

(возвращаемся к размерным величинам). В данном случае в правую часть уравнения (2.1) при $i = 1$ вместо нуля следует подставить U. С учетом этого получим

$$A = \frac{\Delta_1 + \Delta_4}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_2 + \Delta_5}{\Delta}, \quad C = \frac{\Delta_3 + \Delta_6}{\Delta}$$

$$\Delta_4 = -UR_2\left[\left(2\ln k - 1 + \frac{1}{k^2}\right)\ln R_1 + 2\ln^2 k\right]$$

$$\Delta_5 = UR_2\left(2\ln k - 1 + \frac{1}{k^2}\right), \quad \Delta_6 = -UR_1^2 R_2(2\ln k + 1 - k^2)$$

В предельном случае малого относительного зазора в правой части (3.2) добавляется слагаемое $U(1 - 4y/h + 3y^2/h^2)$, представляющее собой решение задачи о течении Куэтта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
2. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

Казань

Поступила в редакцию
12.X.1993