

УДК 539.3

© 1996 г.

Г.И. Быковцев¹**ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ**

Строится теория упругости при кусочно-линейных потенциалах в предположении, что упругий потенциал состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит от гидростатического давления, а второе – от эквивалентного напряжения Σ , которое является однородной функцией первой степени от дивергента напряжений. Эти предположения ограничивают класс возможных моделей по сравнению с предложенными ранее [1], но они практичны, поскольку при выборе некоторого выражения для Σ для определения модели достаточно двух экспериментов на одноосное и объемное растяжение–сжатие. Использование кусочно-линейных выражений для Σ в некоторых случаях вносит определенные упрощения, в то же время появляются определенные новые свойства модели, которые не имеют места при гладких выпуклых функциях Σ . Так при определенных условиях появляются возможности существования поверхностей разрыва напряжений и деформаций, имеются характеристические поверхности, возникают проблемы с единственностью решения. Решению этих вопросов посвящена настоящая работа.

Возможность построения теории упругости при кусочно-линейных потенциалах была указана Д.Д. Ивлевым [2]. Были рассмотрены [1] возможности построения теории упругости с постоянным коэффициентом Пуассона, в которой при одноосном растяжении имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Отметим, что использование кусочно-линейных условий пластичности привело к определенному прогрессу в теории пластичности [3–5].

1. Малые деформации упругой среды связаны с напряжениями соотношениями

$$e_{ij} = \partial U / \partial \sigma_{ij} \quad (1.1)$$

Рассмотрим изотропные среды, у которых потенциал U зависит только от инвариантов тензора напряжений, а изменение объема однозначно определяется значением первого инварианта тензора напряжений $\sigma = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, где σ_i – главные напряжения. Это условие будет выполнено, если для потенциала постулировать

¹ Быковцев Геннадий Иванович (1938–1994), доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. Российской академии наук. Талантливый ученый, умелый организатор науки, прекрасный педагог, им подготовлено более 10 докторов и 50 кандидатов наук. Выпускник Воронежского госуниверситета. Работал в Воронежском госуниверситете, конструкторском бюро автоматических систем (г. Самара), Самарском госуниверситете, Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Дальневосточном государственном техническом университете (г. Владивосток). Ученый-механик с широкими научными интересами: жестко-пластический анализ оболочечных конструкций, волновая динамика при учете нелинейных и реологических эффектов, прикладная акустика и проблемы кавитации, моделирование ползучести металлов и др.

выражение

$$U(\sigma_{ij}) = U_1(\sigma) + U_2(\Sigma) \quad (1.2)$$

где Σ – однородная функция первой степени компонент девиатора напряжений, т.е. $\Sigma(t(\sigma_1 - \sigma), t(\sigma_2 - \sigma), t(\sigma_3 - \sigma)) = t\Sigma(\sigma_1 - \sigma, \sigma_2 - \sigma, \sigma_3 - \sigma)$. Поверхность $\Sigma = \text{const}$ в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ изображается цилиндром с образующими, параллельными прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Эта поверхность будет определена, если задано сечение цилиндра девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Без ограничений общности можно положить, что при одноосном нагружении $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ имеет место равенство

$$\Sigma\left(\frac{2}{3}\sigma_1, -\frac{1}{3}\sigma_2, -\frac{1}{3}\sigma_3\right) = \sigma_1$$

Ограничимся рассмотрением нормально изотропных сред, т.е. таких, что изменение знака напряжений на противоположный приводит к аналогичному изменению знака деформаций. Эти предположения приводят к ограничениям на выбор функций $U_1(\sigma)$ и $U_2(\Sigma)$, которые должны быть четными функциями своих аргументов.

На фиг. 1 показано сечение цилиндра $\Sigma = \text{const}$ девиаторной плоскостью, причем уравнение внутреннего шестиугольника

$$\Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j| = \text{const} \quad (1.3)$$

а внешнего шестиугольника

$$\Sigma = \max|\sigma_i - \sigma| = \text{const} \quad (1.4)$$

Эти шестиугольники примечательны тем, что все возможные выпуклые поверхности $\Sigma = \text{const}$ расположены между ними. Классической теории упругости на фиг. 1 соответствует окружность, уравнение которой имеет вид

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{1/2} = \text{const} \quad (1.5)$$

Если постулировать линейную зависимость между напряжениями и деформациями при всестороннем и одноосном нагружениях

$$e = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1-\nu}{E}\sigma, \quad e_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (1.6)$$

то выбор для Σ выражения (1.5) приводит к линейным уравнениям теории упругости. В то же время использование для Σ выражений (1.3) или (1.4) представляет несомненный интерес как экстремальный вариант теории.

Подставляя выражение (1.2) в (1.1), получаем

$$e_{ij} = \frac{1}{3}U_1'(\sigma)\delta_{ij} + U_2'(\Sigma)\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_{ij}} \quad (1.7)$$

Для производных изотропной функции Σ имеют место соотношения

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_1}l_i l_j + \frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_2}m_i m_j + \frac{\partial\Sigma}{\partial\sigma_3}n_i n_j \quad (1.8)$$

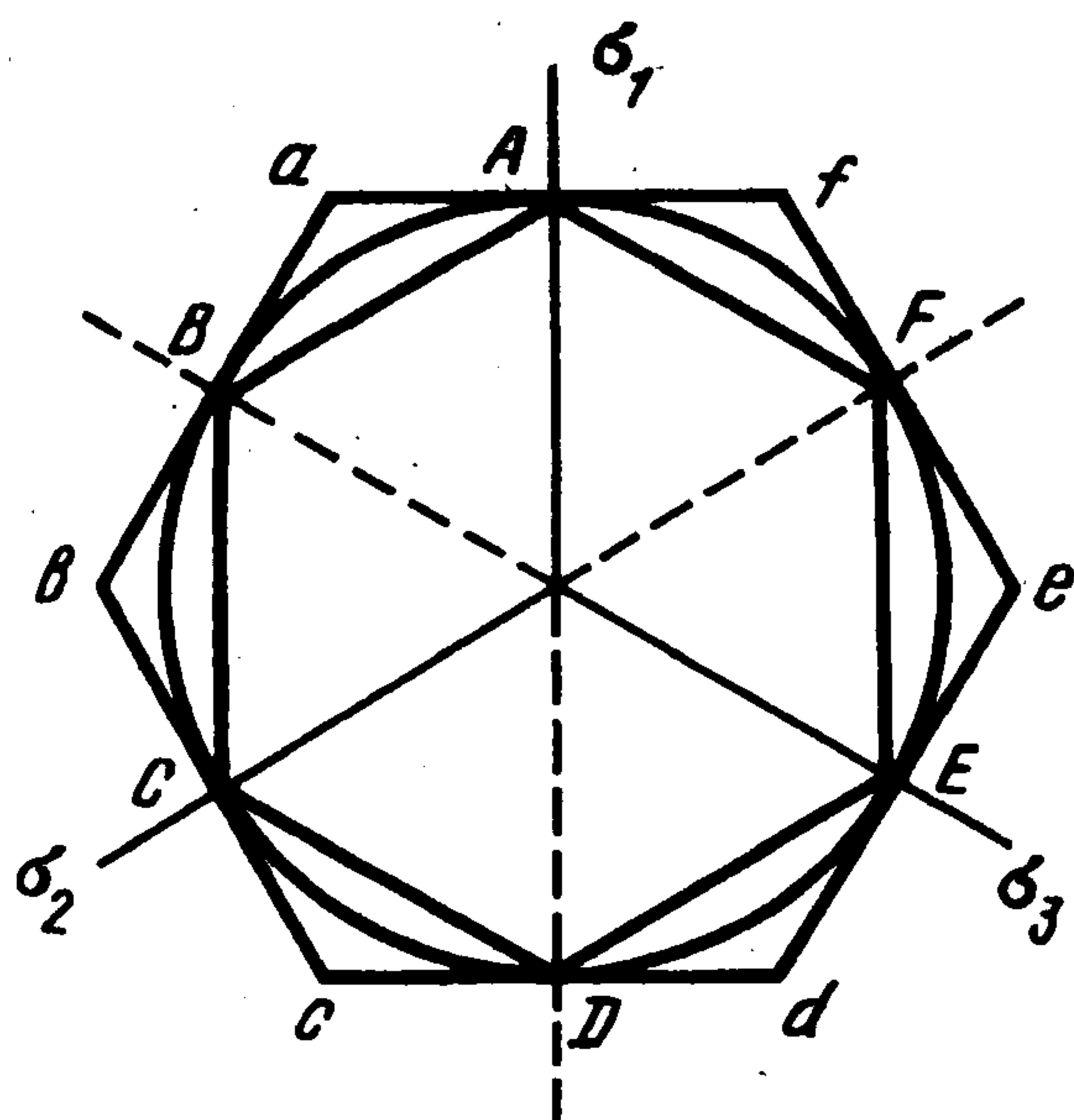
где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы главных осей тензора напряжений, которые связаны условием

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Если поверхность $\Sigma = \text{const}$ гладкая, то вычисление производных по формулам (1.8) не представляет затруднений. Если напряжения на поверхности $\Sigma = \text{const}$ соответствуют угловой точке, то производную надо принимать в обобщенном смысле. Пусть напряжения соответствуют пересечению гладких поверхностей $\Sigma = \Sigma_1$ и $\Sigma = \Sigma_2$. Тогда нормаль к поверхности вырождается в веер нормалей, т.е.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_i} + \beta \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_i}, \quad (1.10)$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$$



Фиг. 1

Так как по определению $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ – однородные функции первой степени, то по теореме Эйлера для однородных функций имеем

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma, \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_1, \quad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_i} \sigma_i = \Sigma_2 \quad (1.11)$$

Свертывая (1.10) с σ_i и учитывая равенство (1.11), получаем $\Sigma = \alpha \Sigma_1 + \beta \Sigma_2$. Так как на рассматриваемой поверхности $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2$, то $\alpha + \beta = 1$, а соотношения (1.10) принимают вид

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_i} = \alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_i} + (1 - \alpha) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_i}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.12)$$

Производные к поверхности (1.3) в угловых точках и условия, при которых напряжения соответствуют угловым точкам, приведены в табл. 1. Аналогичные данные для поверхности (1.4) приведены в табл. 2.

Режимы, соответствующие угловым точкам, и режимы, соответствующие гладким участкам потенциала, будут выполняться в некоторых областях деформирования, границы которых заранее неизвестны. Для каждого режима получим замкнутую систему уравнений, если к соотношениям (1.7)–(1.9) присоединить уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений через главные значения, выражение компонент деформаций через перемещения и уравнения равновесия

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (1.14)$$

Здесь u_i – перемещения, F_i – объемные силы. Отметим, что в угловых точках поверхности Σ главные напряжения связаны линейной зависимостью, что уменьшает количество статистических искомым функций на единицу, но в качестве компенсации в кинематике возникает новая неизвестная функция α , которая подлежит определению в процессе решения краевых задач. Режимы на ребрах выполняются, если имеют место ограничения, приведенные в таблицах, и $0 \leq \alpha \leq 1$. Режимы, соответствующие граням, будут иметь место, если на главные напряжения наложены вполне определенные ограничения.

Для шестиугольника Σ , выбранного в виде (1.3), должны выполняться соотношения

$$AB: \Sigma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$BC: \Sigma = \sigma_3 - \sigma_2, \quad \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$CD: \Sigma = \sigma_3 - \sigma_1, \quad \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$$

$$DE: \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1, \quad \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$$

$$EF: \Sigma = \sigma_2 - \sigma_3, \quad \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$$

$$FA: \Sigma = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Таблица 1

Режим	Ограничения	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_1}$	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_2}$	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_3}$
A	$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$	1	$-\alpha$	$-1+\alpha$
B	$\sigma_2 < \sigma_1 = \sigma_3$	α	-1	$1-\alpha$
C	$\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2$	$-\alpha$	$-1+\alpha$	1
D	$\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$	-1	α	$1-\alpha$
E	$\sigma_2 > \sigma_1 = \sigma_3$	$-\alpha$	1	$-1+\alpha$
F	$\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2$	α	$1-\alpha$	-1

Таблица 2

Режим	Ограничения	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_1}$	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_2}$	$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_3}$
a	$\sigma_1 - \sigma = -\sigma_3 + \sigma > 0$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2} - \alpha$	$-1 + \frac{1}{2}\alpha$
b	$\sigma_1 - \sigma = -\sigma_2 + \sigma > 0$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$	$-1 + \frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2} - \alpha$
c	$\sigma_3 - \sigma = -\sigma_2 + \sigma > 0$	$\frac{1}{2} - \alpha$	$-1 + \frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$
d	$\sigma_3 - \sigma = -\sigma_1 + \sigma > 0$	$-1 + \frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{2} - \alpha$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$
e	$\sigma_2 - \sigma = -\sigma_1 + \sigma > 0$			
f	$\sigma_2 - \sigma = -\sigma_3 + \sigma > 0$			

При выборе Σ в виде (1.4) должны выполняться соотношения

$$ab: \Sigma = \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma), \quad -\sigma_3 + \sigma \leq \sigma_1 - \sigma, \quad -\sigma_2 + \sigma \leq \sigma_1 - \sigma$$

$$bc: \Sigma = \frac{3}{2}(-\sigma_2 + \sigma), \quad -\sigma_2 + \sigma \geq \sigma_1 - \sigma, \quad -\sigma_2 + \sigma \geq \sigma_3 - \sigma$$

$$cd: \Sigma = \frac{3}{2}(\sigma_3 - \sigma), \quad \sigma_3 - \sigma \geq -\sigma_1 + \sigma, \quad \sigma_3 - \sigma \geq -\sigma_2 + \sigma$$

$$de: \Sigma = \frac{3}{2}(-\sigma_1 + \sigma), \quad -\sigma_1 + \sigma \geq \sigma_2 - \sigma, \quad -\sigma_1 + \sigma \geq \sigma_3 - \sigma$$

$$ef: \Sigma = \frac{3}{2}(-\sigma_1 + \sigma), \quad -\sigma_1 + \sigma \geq \sigma_2 - \sigma, \quad -\sigma_1 + \sigma \geq \sigma_3 - \sigma$$

$$fa: \Sigma = \frac{3}{2}(-\sigma_3 + \sigma), \quad -\sigma_3 + \sigma \geq \sigma_1 - \sigma, \quad -\sigma_3 + \sigma \geq \sigma_3 - \sigma$$

Использование выражений (1.3) и (1.4) при решении краевых задач нелинейной теории упругости приводит к дополнительным трудностям, связанным с необходимостью выбора режимов. Упрощения достигаются в случаях, когда выбор режима можно определить заранее или угадать, а также при условиях, когда направления хотя бы одного из главных напряжений известны.

2. Исследуем возможность существования разрывных решения при кусочно-линейных потенциалах.

Пусть в области V имеется поверхность Ω , на которой перемещения непрерывны, а

напряжения и деформации претерпевают разрыв. Используя геометрические условия совместности [6] для скачков деформаций, получаем соотношения

$$\begin{aligned} [e_{ij}] &= \frac{1}{2}(\bar{u}_i^{(1)}v_j + \bar{u}_j^{(1)}v_i), \\ \bar{u}_i^{(1)} &= du_i^+ / dn - du_i^- / dn \end{aligned} \quad (2.1)$$

где u_i^+ и u_i^- – перемещения с разных сторон от поверхности Ω , v_i – компоненты вектора нормали к этой поверхности.

Условие непрерывности вектора напряжений на Ω (условие равновесия) имеет вид

$$[\sigma_{ij}]v_j = 0 \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)e_{ij}^+ + (\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+)e_{ij}^- = [\sigma_{ij}][e_{ij}] = [\sigma_{ij}]v_j \bar{u}_i^{(1)} = 0 \quad (2.3)$$

Подставляя в выражение (2.3) значения деформаций, вычисленные по формулам (1.7), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} &(\sigma^+ - \sigma^-)(U_1'(\sigma^+) - U_1'(\sigma^-)) + (\Sigma^+ - \Sigma^-)(U_2'(\Sigma^+) - U_2'(\Sigma^-)) + \\ &+ U_2'(\Sigma^+)(t^+ \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} + U_2'(\Sigma^-)(t^- \sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как $t^+ \sigma_{ij}^+$ и σ_{ij}^- лежат на одной поверхности $\Sigma = \Sigma(\sigma_{ij}^-)$, а $t^- \sigma_{ij}^-$ и σ_{ij}^+ – на поверхности $\Sigma = \Sigma(\sigma_{ij}^+)$, то из условия невыпуклости поверхности $\Sigma = \text{const}$ следуют неравенства:

$$(t^+ \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} \geq 0, \quad (t^- \sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} \geq 0 \quad (2.5)$$

Площадь квадрата, заштрихованного на фиг. 2, всегда положительна, если $U_1'(\sigma)$ – монотонно возрастающая функция σ . Отсюда следует, что

$$(U_1'(\sigma^+) - U_1'(\sigma^-))(\sigma^+ - \sigma^-) \geq 0 \quad (2.6)$$

причем равенство в (2.6) достигается только при условии $\sigma^+ = \sigma^-$ или $U_1'(\sigma^+) = U_1'(\sigma^-)$ (последнее имеет место только для несжимаемых материалов).

Аналогично для монотонно возрастающей функции $U_2'(\Sigma)$ имеем

$$(U_2'(\Sigma^+) - U_2'(\Sigma^-))(\Sigma^+ - \Sigma^-) \geq 0 \quad (2.7)$$

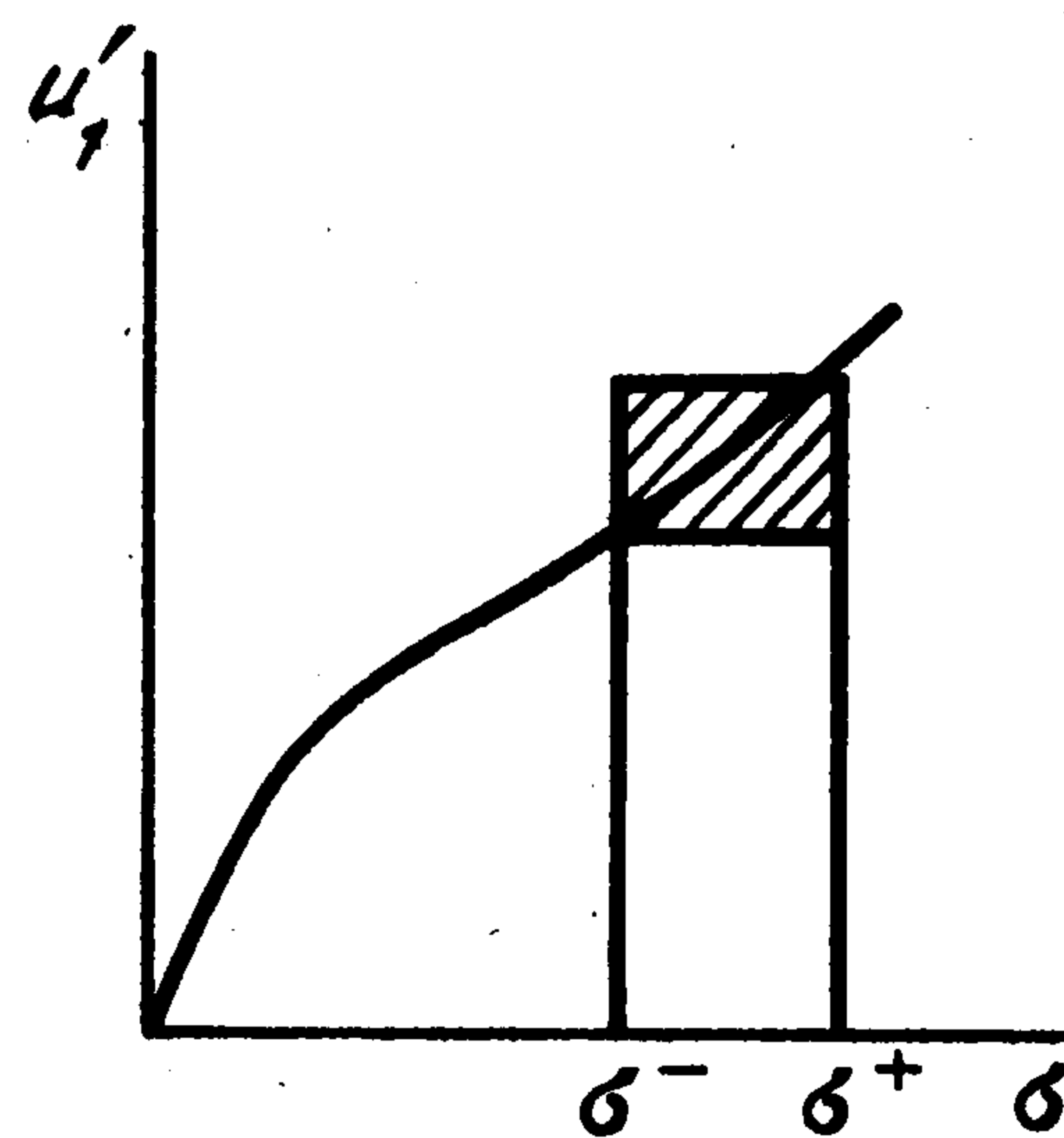
причем равенство имеет место, когда $\Sigma^+ = \Sigma^-$ или $U_2'(\Sigma^+) = U_2'(\Sigma^-)$ (последнее имеет место для неупрочняющегося материала).

Из соотношений (2.4)–(2.7) следует, что на поверхности разрыва должны иметь место равенства

$$\Sigma(\sigma_{ij}^+) = \Sigma(\sigma_{ij}^-), \quad \sigma^+ = \sigma^- \quad (2.8)$$

$$(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} = 0, \quad (\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} = 0 \quad (2.9)$$

Условие выпуклости поверхности $\Sigma = \text{const}$ имеет вид $(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \partial \Sigma(\sigma_{ij}^+) / \partial \sigma_{ij}^+ \geq 0$,



Фиг. 2

поэтому значения σ_{ij}^- при фиксированных σ_{ij}^+ таковы, что в них функция

$$B = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} = \Sigma(\sigma_{ij}^+) - \sigma_{ij}^- \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} = \Sigma(\sigma_{ij}^-) - \sigma_{ij}^- \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} \quad (2.10)$$

принимает минимальное значение.

Минимум функции B при условиях (2.8) имеет место, если

$$\frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} - \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} + \psi_1 \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} + \psi_2 \delta_{ij} = 0 \quad (2.11)$$

Свертывая (2.11) с δ_{ij} , получаем $\psi_2 = 0$, свертывая (2.11) с σ_{ij}^- и учитывая равенства (2.9), получаем $\psi_1 = 0$, а из (2.11) имеем

$$\frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^-)}{\partial \sigma_{ij}^-} = \frac{\partial \Sigma(\sigma_{ij}^+)}{\partial \sigma_{ij}^+} \quad (2.12)$$

Из равенства (2.12) следует, что главные направления тензоров σ_{ij}^+ и σ_{ij}^- совпадают на поверхности разрыва, и, следовательно, равенства (2.9) можно записать в системе координат, совпадающей с главными направлениями тензора напряжений в виде

$$(\sigma_i^+ - \sigma_i^-) \frac{\partial \Sigma(\sigma_i^+)}{\partial \sigma_i^+} = 0, \quad (\sigma_i^- - \sigma_i^+) \frac{\partial \Sigma(\sigma_i^-)}{\partial \sigma_i^-} = 0 \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) может выполняться, если поверхность $\Sigma = \text{const}$ имеет плоские участки, т.е. $\Sigma = a_i \sigma_i$, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, а σ_i^+ и σ_i^- лежат на этом плоском участке. В этом случае из первого соотношения (1.13), равенств (2.2) и (2.8) для скачков главных напряжений получаем соотношения

$$[\sigma_1] l_j l_j v_j + [\sigma_2] m_i m_j v_j + [\sigma_3] n_i n_j v_j = 0 \quad (2.14)$$

$$[\sigma_1] + [\sigma_2] + [\sigma_3] = 0 \quad (2.15)$$

$$a_1 [\sigma_1] + a_2 [\sigma_2] + a_3 [\sigma_3] = 0 \quad (2.16)$$

Из соотношения (2.14) следует

$$[\sigma_1] l_j v_j = 0, \quad [\sigma_2] m_j v_j = 0, \quad [\sigma_3] n_j v_j = 0 \quad (2.17)$$

Из (2.15) заключаем, что скачки двух главных напряжений одновременно не могут обращаться в нуль. Для определенности положим $[\sigma_2] \neq 0$, $[\sigma_3] \neq 0$, тогда $m_j v_j = 0$ и $n_j v_j = 0$. Отсюда $l_j v_j = 1$ и $[\sigma_1] = 0$. При этом из (2.15) и (2.16) следует, что $a_2 = a_3 = -a_1/2$. Таким образом, для сжимаемых изотропных сред ($U_1'(\sigma) \neq 0$) разрывы напряжений возможны только при выборе эффективного напряжения Σ в виде максимального приведенного напряжения $\Sigma = \max |\sigma_i - \sigma|$. При этом направляющие косинусы главных напряжений непрерывны, эффективное главное напряжение (σ_1) непрерывно, нормаль к поверхности разрыва совпадает с направлением эффективного главного направления ($l_j v_j = 1$), а скачки двух других главных напряжений равны по величине, но противоположны по знаку.

Если материал несжимаемый, то $U_1'(\sigma) = 0$, и условие (2.6) выполняется при любых σ^+ и σ^- , а скачки напряжений удовлетворяют условиям (2.16) и (2.17).

Пусть $[\sigma_1] = 0$, $[\sigma_2] \neq 0$, $[\sigma_3] \neq 0$. Тогда из (2.16) и (2.17) $m_i v_i = n_i v_i = 0$, $l_i v_i \neq 0$, а $a_2 [\sigma_2] + a_3 [\sigma_3] = 0$. Таким образом, в несжимаемой среде, имеющей кусочно-линей-

ный потенциал, возможны поверхности разрыва напряжений, на которых одно главное напряжение, направленное по нормали к поверхности разрыва, непрерывно, а разрыв претерпевают главные напряжения, лежащие в касательной плоскости.

Пусть $[\sigma_1] = [\sigma_2] = 0$, $[\sigma_3] \neq 0$. Тогда из (2.17) имеем $n_i v_i = 0$, а из (2.16) следует, что $a_3 = 0$. Следовательно, если $\Sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, то в несжимаемой среде возможна поверхность разрыва напряжений, на которой максимальное и минимальное главные напряжения непрерывны, а разрыв претерпевает только промежуточное главное напряжение, которое лежит в плоскости, касательной к поверхности разрыва.

Во всех случаях на поверхности разрыва напряжений деформации непрерывны, а следовательно, на поверхности разрыва деформаций напряжения непрерывны.

Если на некоторой поверхности S напряжения соответствуют гладкому участку функции Σ , то деформации непрерывны на поверхности S . Поэтому на поверхности разрыва деформаций напряжения соответствуют угловым точкам функции Σ . В этом случае соотношения (1.7) принимают вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{3}U'_1(\sigma)\delta_{ij} + U'_2(\Sigma) \left(\alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} + (1-\alpha) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (2.18)$$

Используя геометрические условия совместности и соотношения (1.8), из уравнений (2.18) получаем

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_i^{(1)} v_j + \bar{u}_j^{(1)} v_i) = [\alpha] U'_2(\Sigma) (A_1 l_i l_j + A_2 m_i m_j + A_3 n_i n_j) \quad (2.19)$$

$$A_i = \partial \Sigma_1 / \partial \sigma_i - \partial \Sigma_2 / \partial \sigma_i$$

Свертывая (2.19) с δ_{ij} , получаем $\bar{u}_i^{(1)} v_i = 0$. Тогда после свертки с v_i и (2.19) следуют соотношения

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i^{(1)} = [\alpha] U'_2(\Sigma) (A_1 l_i l_k v_k + A_2 m_i m_k v_k + A_3 n_i n_k v_k) \quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.20) в (2.19), получаем, что на поверхности разрыва деформаций выполняются соотношения

$$A_1 (l_i l_j - (l_i v_j + l_j v_i) l_k v_k) + A_2 (m_i m_j - (m_i v_j + m_j v_i) m_k v_k) + A_3 (n_i n_j - (n_i v_j + n_j v_i) n_k v_k) = 0 \quad (2.21)$$

Среди шести соотношений (2.21) независимых только три, так как после свертки с δ_{ij} и v_j они преобразуются в одно уравнение. Независимые соотношения из (2.21) получаем, проектируя их на $l_i l_j$, $m_i m_j$, $n_i n_j$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 (1 - 2(l_k v_k)^2) &= 0 \\ A_2 (1 - 2(m_k v_k)^2) &= 0 \\ A_3 (1 - 2(n_k v_k)^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Учитывая, что $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ и $(l_k v_k)^2 + (m_k v_k)^2 + (n_k v_k)^2 = 1$, заключаем, что равенства (2.22) могут выполняться только при условиях

$$\begin{aligned} A_1 = 0, \quad (m_k v_k)^2 = (n_k v_k)^2 = \frac{1}{2}, \quad l_k v_k = 0 \\ A_2 = 0, \quad (l_k v_k)^2 = (n_k v_k)^2 = \frac{1}{2}, \quad m_k v_k = 0 \\ A_3 = 0, \quad (l_k v_k)^2 = (m_k v_k)^2 = \frac{1}{2}, \quad n_k v_k = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, поверхности разрыва деформаций в нелинейно-упругих средах воз-

можно только при потенциалах, зависящих от $\Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|$, и совпадающих с поверхностями максимального сдвига.

3. Рассмотрим поверхности разрыва производных напряжений и деформаций. Будем полагать, что на таких поверхностях напряжения, деформации и первые производные напряжений непрерывны, а первые производные напряжений и вторые производные перемещений могут иметь разрыв. Геометрические условия совместности при этом можно записать в виде

$$[\sigma_{ij,k}] = \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \nu_k, \quad [u_{i,jk}] = \bar{u}_i^{(2)} \nu_j \nu_k \quad (3.1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = [d\sigma_{ij} / dn], \quad \bar{u}_i^{(2)} = [d^2 u_i / dn^2] = [\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_k] \nu_k \nu_j$$

Из соотношений (1.7), (1.13) получаем, что на поверхности разрыва выполняются соотношения

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \nu_j = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2} (\bar{u}_i^{(2)} \nu_j + \bar{u}_j^{(2)} \nu_i) = \frac{1}{3} U_1''(\sigma) \bar{\sigma}^{(1)} \delta_{ij} + \left(U_2''(\Sigma) \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{kl}} + U_2''(\Sigma) \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right) \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} \quad (3.3)$$

Свертывая равенство (3.3) с $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$ и учитывая (3.2), получаем

$$\frac{1}{3} U_1''(\sigma) (\bar{\sigma}^{(1)})^2 + U_2''(\Sigma) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \right)^2 + U_2'(\Sigma) \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0 \quad (3.4)$$

Так как $U_1''(\sigma) \geq 0$, $U_2'(\Sigma) \geq 0$, $U_2''(\Sigma) \geq 0$, то уравнение (3.4) выполняется, если

$$U_1''(\sigma) \bar{\sigma}^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0 \quad (3.5)$$

Для выпуклых поверхностей $\Sigma = \text{const}$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \geq 0 \quad (3.6)$$

причем равенство в (3.6) имеет место только при $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0$.

Таким образом, если поверхность $\Sigma = \text{const}$ выпуклая, то соотношения нелинейной теории упругости в виде (1.7) не допускают существования поверхностей разрыва производных напряжений и деформаций, т.е. $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0$, $\bar{u}_i^{(2)} = 0$. Можно показать, что при выполнении условия выпуклости невозможны разрывы производных напряжений и деформаций любого порядка, а общие уравнения нелинейной теории упругости эллиптические.

Направление Δ_{ij} будем называть [6] направлением уплощения поверхности Σ , если имеют место равенства

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}} \Delta_{ij} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Delta_{ij} \Delta_{kl} = 0 \quad (3.7)$$

Если на поверхности Σ имеется направление уплощения, то равенство в (3.6) может выполняться и при $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \neq 0$, но иногда тензор $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$ должен совпадать с тензором уплощения. Известно [6], что для изотропных сред главные оси тензора уплощения совпадают с главными осями тензора σ_{ij} , поэтому уравнения (3.7) можно представить

в виде

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_i} \Delta_i = 0, \quad \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \Delta_i \Delta_j = 0 \quad (3.8)$$

(Δ_i – главные значения тензора Δ_{ij}). На гранях кусочно-линейных поверхностей $\Sigma = \text{const}$ второе условие (3.8) выполняется тождественно.

Учитывая (3.8) и (3.5), получаем, что соотношения (3.2) и (3.3) будут выполнены, если

$$\bar{\sigma}_1^{(1)} l_i l_k v_k + \bar{\sigma}_2^{(1)} m_i m_k v_k + \bar{\sigma}_3^{(1)} n_i n_k v_k = 0 \quad (3.9)$$

$$\bar{\sigma}_1^{(1)} + \bar{\sigma}_2^{(1)} + \bar{\sigma}_3^{(1)} = 0 \quad (3.10)$$

$$a_1 \bar{\sigma}_1^{(1)} + a_2 \bar{\sigma}_2^{(1)} + a_3 \bar{\sigma}_3^{(1)} = 0 \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.9)–(3.11) с соотношениями (2.14)–(2.16), получаем, что выводы, полученные для поверхностей разрыва напряжений, можно переформулировать для поверхностей разрыва производных напряжений и деформаций без изменения.

Если напряженное состояние соответствует сингулярной точке поверхности $\Sigma = \text{const}$, то на поверхности разрыва производных напряжений и деформаций получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\bar{u}_i^{(2)} v_j + \bar{u}_j^{(2)} v_i) &= \frac{1}{3} U_1''(\sigma) \bar{\sigma}^1 \delta_{ij} + U_2'(\Sigma) \bar{\alpha}^{(1)} \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \\ &+ U_2'(\Sigma) \left(\alpha \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} + (1-\alpha) \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right) \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} + U_2''(\Sigma) \left(\alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{kl}} + (1-\alpha) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{kl}} \right) \times \\ &\times \left(\alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} + (1-\alpha) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Свертывая (3.12) с $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$ и учитывая (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} U_1''(\sigma) \bar{\sigma}^{(2)} + U_2'(\Sigma) \left(\alpha \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} + (1-\alpha) \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} + \\ + U_2''(\Sigma) \bar{\alpha}^{(1)} \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + U_2''(\Sigma) \left(\left(\alpha \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} + (1-\alpha) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Предполагая, что условие $\Sigma_1 = \Sigma_2$ имеет место с обеих сторон от поверхности разрыва, получаем

$$\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \right) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0 \quad (3.14)$$

Учитывая, что $0 \leq \alpha \leq 1$, из соотношений (3.13) и (3.14) находим

$$U_1''(\sigma) \bar{\sigma}^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} = \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} \bar{\sigma}_{kl}^{(1)} = \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = 0 \quad (3.15)$$

Из условия выпуклости получаем, что на поверхности разрыва $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = 0$.

Условия (3.2) при этом восполнены, а (3.12) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_i^{(2)}v_j + \bar{u}_j^{(2)}v_i) = U_2'(\Sigma)\bar{\alpha}^{(1)}(A_1l_i l_j + A_2m_i m_j + A_3n_i n_j) \quad (3.16)$$

Сравнивая (3.16) и (2.20), заключаем, что свойства поверхностей разрыва деформаций совпадают со свойствами поверхностей, на которых производные деформаций претерпевают разрыв.

Таким образом, общие соотношения нелинейной теории упругости при потенциалах, выбранных как функции Σ в виде (1.3) и (1.4), имеют характеристические поверхности.

При выборе Σ в виде (1.4) это поверхности, ортогональные максимальному по модулю главному напряжению, а напряженное состояние на поверхности разрыва соответствует граням поверхности $\Sigma = \text{const}$.

4. Традиционное рассмотрение теории единственности основывается на уравнении виртуальных работ, которые запишем в виде

$$\int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_i N_j dS + \int_S (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) v_j u_i dS + \int_V F_i u_i dV \quad (4.1)$$

Здесь V – объем рассматриваемого тела, Ω – поверхность, его ограничивающая, N_i – нормаль к Ω , S – поверхность разрыва напряжений внутри объема V , σ_{ij}^+ и σ_{ij}^- – напряжения с двух сторон от S , v_i – нормаль к S внешняя к области "плюс". Уравнение (4.1) выполняется, если u_i , e_{ij} , σ_{ij} удовлетворяют второму уравнению (1.13) и уравнению (1.14).

Для уравнений (1.7), (1.13), (1.14) рассмотрим решения, удовлетворяющие на поверхности Ω краевым условиям:

$$\sigma_{ij} N_j = p_i(x_k), \quad x_k \in \Omega_p; \quad u_i = f_i(x_k), \quad x_k \in \Omega_u \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jm} N_m L_k = p_i(x_k), \quad u_i L_i = f_L(x_k), \quad x_k \in \Omega_{pi}$$

Здесь $p_i(x_k)$, $f_i(x_k)$, $f_L(x_k)$, $L_i(x_k)$ – заданные функции на соответствующих поверхностях, $p_i L_i = 0$ на Ω_{pi} , $\Omega = \Omega_p + \Omega_u + \Omega_{pi}$. На поверхностях разрыва напряжений выполняются условия (2.2).

Пусть имеются два решения $\sigma_{ij}^{(1)}$, $e_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$, $e_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$, удовлетворяющие сформулированным условиям. Тогда разность этих решений согласно уравнению (4.1) должна удовлетворить уравнению

$$(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)})(e_{ij}^{(1)} - e_{ij}^{(2)}) = 0 \quad (4.3)$$

Из уравнения (4.3) получаем выводы, следующие из анализа соотношений (2.3). Отсюда вытекает, что при выпуклых гладких поверхностях $\Sigma = \text{const}$ распределение напряжений и деформаций определяется единственно. Если поверхность $\Sigma = \text{const}$ имеет плоские участки, то напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$ могут в некоторых областях различаться. При этом $\Sigma(\sigma_{ij}^{(1)}) = \Sigma(\sigma_{ij}^{(2)})$, $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$ для сжимаемых сред, главные оси тензоров $\sigma_{ij}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$ совпадают, главные напряжения $\sigma_i^{(1)}$ и $\sigma_i^{(2)}$ могут различаться, но лежать на одном и том же плоском участке поверхности $\Sigma = \text{const}$, распределение деформаций в этом случае единственно. Если поверхность $\Sigma = \text{const}$ имеет угловые точки, то области, в которых напряженное состояние соответствует этим точкам, в обоих решениях совпадают, а в этих областях совпадают напряжения. Следовательно, для

заданных краевых условий (4.2) область V разбивается единственным образом на сумму областей $V_k (V = \Sigma V_k)$ так, что в каждой области выполняется режим, соответствующий конкретным граням и ребрам поверхности $\Sigma = \text{const}$.

Соотношения (1.7) трактовались выше как уравнения теории упругости. Одновременно их можно рассматривать в качестве соотношений деформационной теории пластичности при активном нагружении. Более того, использование эквивалентного напряжения в виде (1.4) оказывается более соответствующим экспериментальным данным, приведенным в [7], нежели соотношения классической теории, когда поверхности Σ выбираются в виде (1.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16523).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д.Д.* К построению теории упругости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 6. С. 1321–1324.
2. *Ивлев Д.Д.* К построению гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 2. С. 280–282.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Ерхов М.И.* Теория идеально-пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
5. *Ходж Ф.Г.* Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М.: Машгиз, 1963. 380 с.
6. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
7. *Жигалкин В.М., Усова О.М., Шемякин Е.И.* Простое и сложное нагружение стали в условиях нормальных и низких температур. Л., 1-я Всесоюз. школа-семинар, 1983. С. 129–141.

Владивосток

Поступила в редакцию
30.XI.1993