

УДК 532.546.06

© 1996 г. В.Н. Эмих

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ДРЕНИРУЕМОЙ КАЙМЕ ПРЕСНЫХ ВОД И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

На основе полученного ранее [1, 2] аналитического решения задачи о фильтрации в дренируемой кайме пресных вод над солеными разработан и реализован в компьютерной программе алгоритм расчета геометрических характеристик каймы, включая положение ее свободных границ. Прямой порядок вычислений с предварительным определением неизвестных параметров конформных отображений позволил осуществить полный гидродинамический анализ течения в кайме с интерпретацией дренажного стока как водозабора. При этом в каждом конкретном варианте числовых расчетов выявляется оптимальная глубина заложения водозабора, обеспечивающая его максимально возможную продуктивность на грани дестабилизации обеих свободных границ каймы. Другим приложением рассматриваемой краевой задачи является расчет зоны опреснения почвенного слоя, содержавшего соленые грунтовые воды, в результате их замещения пресными поверхностными водами и дренирования.

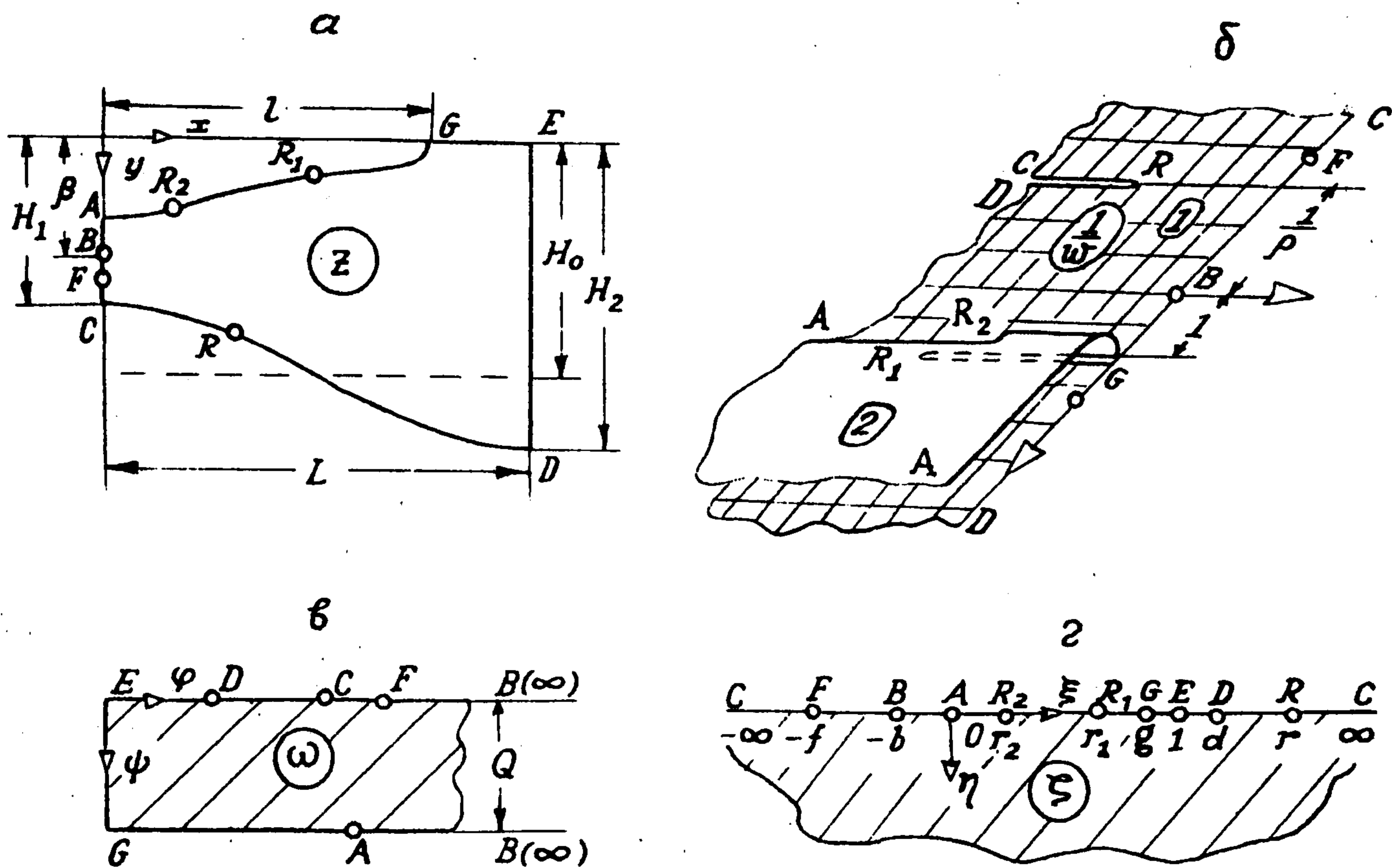
**1. Краевая задача и задача на параметры.** Рассмотрим безнапорную установившуюся фильтрацию пресных вод над покоящимися солеными из периодически расположенных линейных поверхностных источников к заложенным посередине между ними на одной глубине равнодебитным точечным стокам. Полупериод такой каймы пресных вод схематично изображен на фиг. 1, *a* в качестве области течения.

Сформулируем краевую задачу о нахождении приведенного к коэффициенту фильтрации комплексного потенциала потока  $\omega(z) = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  – потенциал скорости фильтрации,  $\psi$  – функция тока [3]) – аналитической функции комплексной координаты  $z = x + iy$  точек области течения при следующих граничных условиях, согласованных с выбором системы координат:

$$\begin{aligned} GE: y = 0, \varphi = 0; \quad AB: x = 0, \psi = G; \quad BC: x = 0, \psi = 0 \\ ED: x = L, \psi = 0; \quad AG: \varphi - y = 0, \psi = Q; \quad CD: \varphi + \rho y = C, \psi = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $Q$  – фильтрационный расход водозабора (точечного стока  $B$ ) в расчете на выделенную область течения;  $\rho = \rho_2 / \rho_1 - 1$  ( $\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности пресных и соленых вод). Специфичное для задачи первое условие на участке  $CD$  основано на предположениях о неподвижности соленых вод и о непрерывности давления при переходе через линию раздела между ними и фильтрующимися пресными водами [4].

Поставленная задача возникла как расширение задачи о дренаже в почвенном слое с водоупором. Построение решения для этой схемы с последующим его распространением на рассматриваемую задачу изложено ранее [2]. Оно основано на конформных отображениях области функции  $\omega$  (фиг. 1, *б*) и двулистной области  $1/w$  (фиг. 1, *в*) инверсии годографа скорости фильтрации  $\bar{w} = w_x + iw_y$ , сопряженной с комплексной скоростью  $w = w_x - iw_y = d\omega / dz$  [3], на полуплоскость  $\text{Im } \zeta \geq 0$  (фиг. 1, *г*). На участке  $0 \leq \zeta \leq g$ , соответствующем кривой депрессии, отобража-



Фиг. 1

ющие функции можно представить в записи [1]

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \frac{Q\sqrt{(1+b)(b+g)}}{\pi} \int_{\zeta}^g \frac{du}{(b+u)\sqrt{(1-u)(g-u)}} + iQ = \\ &= \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\zeta)}{(1-g)(b+\zeta)}} + iQ \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(\zeta)} &= \frac{dz}{d\omega} = \frac{M}{2} \int_{\zeta}^g \frac{P(u)du}{\sqrt{u^3(g-u)(d-u)^3}} + i = \\ &= -M \frac{(f+\zeta)\sqrt{g-\zeta}}{\sqrt{\zeta(d-\zeta)}} - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2K}{\pi} Z(\alpha, k) + i; \quad M > 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$P(u) = u^3 - c_1 u^2 + c_2 u - c_3; \quad c_1 = 2d + f + aE$$

$$c_2 = g(d + 2f + a\Phi), \quad c_3 = dfg; \quad a = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2\sqrt{d}}{\pi M}$$

$$Z(\alpha, k) = E(\alpha, k) - \frac{E}{K} F(\alpha, k), \quad \Phi = \frac{E - k'^2 K}{k^2} \quad (1.3)$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{(1-\zeta/g)/(1-\zeta/d)}, \quad k = \sqrt{g/d}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

В эти выражения входят неполные  $F(\alpha, k)$ ,  $E(\alpha, k)$  и полные  $K$ ,  $E$  эллиптические интегралы первого и второго рода при модуле  $k$  в лежандровой нормальной формуле, а также связанная с ним дзета-функция Якоби  $Z(\alpha, k)$  ([5], формулы (110.02), (110.03), (140.01)).

Используя зависимость (1.2) для  $1/w$ , преобразованную к участку  $AB$  ( $-\infty < \zeta < 0$ ), и условие  $(1/w)_{\zeta=-b} = 0$ , имеем

$$M = \frac{\sqrt{b(b+d)}}{\rho(f-b)\sqrt{b+g}} J(\rho, b, d, g); \quad J = 1 - (1+\rho)\Lambda_0\left(\arcsin\sqrt{\frac{d}{b+d}}, k\right) \quad (1.4)$$

Здесь содержится другая, также стандартизованная эллиптическая лямбда-функция Хоймана (С. Neuman; [5], формула (150.03))

$$\Lambda_0(\gamma, k) = \frac{2}{\pi} [EF(\gamma, k') + KE(\gamma, k') - KF(\gamma, k)] \quad (1.5)$$

Так как  $M > 0$ , то из (1.4) следует

$$f < b \text{ при } J < 0; \quad f > b \text{ при } J > 0 \quad (1.6)$$

В рамках первого соотношения возможен предельный случай  $f = 0$ . При этом на участке  $AB$  гидродинамическое давление  $p \leq 0$ , причем равенство выполняется только в точке  $A$ , которая становится точкой заострения кривой депрессии [6]. Последующее сколь угодно малое понижение давления на указанном участке при увеличении отбора воды нарушит динамическое равновесие между потоком и воздушной фазой над ним, что приведет к прорыву воздуха в водозабор.

Со вторым соотношением (1.6) связан предельный случай  $f = \infty$ , характеризуемый соотношением  $dp/dy \geq \rho_2 g$  на участке  $BC$ ; равенство сохраняется лишь в точке  $C$ , превращающейся в точку заострения линии раздела [1]. Динамическое равновесие между движущимися в кайме пресными и подстилающими их солеными водами держится, образно говоря, только на этой точке, ибо в пределах участка  $BC$  градиент гидродинамического давления уже превышает градиент гидростатического равновесия в зоне соленых вод и дальнейшая сколь угодно малая активизация водозабора приведет к прорыву в него соленых вод.

Из соотношений (1.2) имеем после некоторых преобразований, включающих интегрирование по частям ([2], § 12)

$$z(\zeta) = z(\zeta_0) + \frac{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)}{w(\zeta_0)} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d}{du} \left( \frac{1}{w(u)} \right) [\omega(\zeta) - \omega(u)] du \quad (1.7)$$

Применительно к участку  $AG$  примем в (1.7)  $\zeta_0 = g$ ,  $z(\zeta_0) = l$ ,  $\omega(\zeta_0) = iQ$ ,  $w(\zeta_0) = -i$  (фиг. 1). Используя интегральное представление (1.2) для функции  $1/w(\zeta)$ , получим уравнение кривой депрессии в комплексно-параметрической форме ( $0 \leq \zeta \leq g$ )

$$z(\zeta) = l + Q + i\omega(\zeta) + \frac{M}{2} \int_{\zeta}^g \frac{P(u)[\omega(\zeta) - \omega(u)] du}{\sqrt{u^3(g-u)(d-u)^3}} \quad (0 \leq \zeta \leq g) \quad (1.8)$$

Функция  $\omega(\zeta)$  определена первой зависимостью (1.2).

Ориентируясь на прямую постановку задачи, условимся задавать в каждом конкретном варианте величины  $Q$ ,  $\rho$  и геометрические параметры каймы  $l$ ,  $L$ ,  $\beta$ ,  $H_0$ . С использованием последних выведем следующую систему уравнений относительно четырех неизвестных параметров конформных отображений  $b$ ,  $d$ ,  $g$  и  $f$ :

$$\frac{M}{2} \int_0^g U(u)[\varphi(u) - \varphi(0)] du = l \quad \left( \varphi(u) = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-u)}{(1-g)(b+u)}} \right)$$

$$l + Q - \frac{MQ}{\pi} \int_g^1 U(u) \arcsin \sqrt{\frac{(b+g)(1-u)}{(1-g)(b+u)}} du = L$$

$$\varphi(0) + \frac{M}{2} \int_{-b}^0 U(u) [\varphi(0) - \varphi(u)] du = \beta \quad (1.9)$$

$$\frac{Q\sqrt{(1+b)(b+g)}}{\pi L} \int_d^\infty \left[ H_2 + \frac{\varphi_1(d) - \varphi_1(u)}{\rho} \right] \frac{|\operatorname{Re}(1/w)_{CD}| du}{(b+u)\sqrt{(u-1)(u-g)}} = H_0$$

$$U(u) = \frac{P(u)}{\sqrt{|u^3(g-u)(d-u)^3|}}, \quad \varphi_1(u) = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(b+g)(u-1)}{(1-g)(b+u)}}, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right)_{CD} =$$

$$= - \left\{ \left[ M(f+u) + \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2K}{\pi} \sqrt{d} \right] \sqrt{\frac{u-g}{u(u-d)}} - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2K}{\pi} Z\left(\arcsin \sqrt{\frac{d}{u}}, k\right) \right\}$$

Первое уравнение системы следует из равенства (1.8) при  $\zeta = 0$ ,  $z = iy_A$ ,  $\omega = \varphi(0) + iQ$  с учетом связи  $y_A = y(0) = \varphi(0)$ , определяемой первым граничным условием (1.1) на кривой депрессии  $AG$ . При выводе двух следующих уравнений, включающих величины  $L$  и  $\beta$ , зависимость (1.7) для  $z(\zeta)$  предварительно преобразовывалась применительно к участкам  $GE$  и  $AC$ . Последнее уравнение отражает условие сохранения первоначального объема соленых вод при формировании каймы. В исходной записи это условие приводит к соотношениям [1]

$$\int_0^L y_{CD}(x) dx = - \int_d^\infty y_{CD}(u) \frac{dx_{CD}(u)}{du} du = H_0 L \quad (1.10)$$

Зависимость  $y_{CD}(u)$  получается из первого условия (1.1) на  $CD$ ; с использованием точки  $D$  его можно записать в виде

$$\varphi_1 + \rho y = \varphi_1(d) + \rho H_2$$

Функция  $\varphi_1(u)$  содержится в (1.9). Что касается максимальной глубины каймы  $H_2$  (фиг. 1,  $a$ ), то перед каждым обращением к интегралу в левой части четвертого уравнения (1.9) она вычисляется с остальными постоянными, входящими в интеграл. Выражение для  $H_2$  вытекает из формулы (1.7), преобразованной к участку  $ED$  при  $\zeta_0 = 1$ .

Возвращаясь к подынтегральному выражению во втором интеграле (1.10), вновь воспользуемся краевыми условиями (1.1) на участке  $CD$  и получаемым из первой зависимости (1.2) интегральным представлением для  $\omega_{CD}(u) = \varphi_{CD}(u)$  ( $d \leq u \leq \infty$ ). При этом имеем

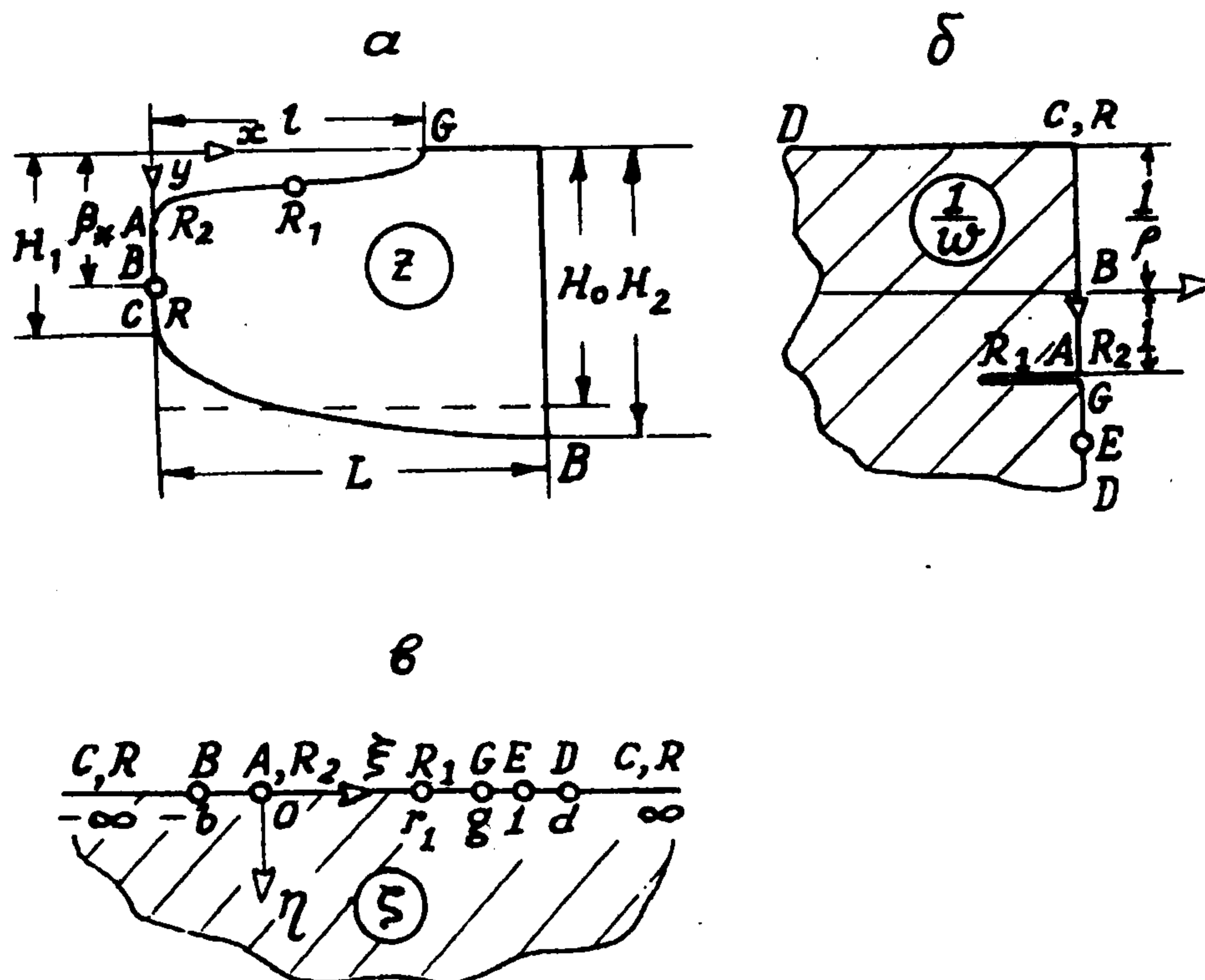
$$\frac{dx_{CD}(u)}{du} = \frac{dz}{du} - i \frac{dy}{du} = \frac{dz}{d\omega} \frac{d\varphi}{du} + \frac{i}{\rho} \frac{d\varphi}{du} = \frac{Q\sqrt{(1+b)(b+g)}}{\pi(b+u)\sqrt{(u-1)(u-g)}} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right)_{CD}$$

Содержащаяся в (1.9) запись выражения  $\operatorname{Re}(1/w)_{CD}$  основана на представлении (1.2) для функции  $1/w(\zeta)$ , преобразованному применительно к участку  $CD$  ([2], формула (13.3)).

Величины  $l$ ,  $L$ ,  $\beta$  и  $H_0$  задаются с учетом естественных ограничений  $0 < l < L$ ,  $0 < \beta < H_0$ . Величина  $Q$ , не должна превышать значения, при котором возникнет тот или иной из двух отмеченных выше критических режимов течения. Именно для такого режима и необходимо поэтому предварительно рассчитать течение в кайме. Однако заранее неизвестно, каким он окажется при выбранной комбинации вышеперечисленных физических параметров.

**2. Двойной критический режим.** В качестве ключевого этапа исследования ранее

была отмечена [2] своеобразная ситуация, присущая рассматриваемой задаче: течение на грани дестабилизации обеих свободных границ с одновременным превращением их точек  $A$  и  $C$  в точки заострения (фиг. 2,  $a$ ). При таком режиме течения, называемом далее двойным критическим, весь второй лист области  $1/w$  (фиг. 1,  $b$ ) вырождается в точку  $1/w = i$ , а квадрант  $\text{Re}(1/w) \leq 0, \text{Im}(1/w) \leq 0$  – в точку  $1/w = -ip$  (фиг. 2,  $b$ ).



Фиг. 2

Конформное отображение области на полуплоскость  $\text{Im } \zeta \geq 0$  (фиг. 2,  $b$ ) осуществится посредством функции

$$\frac{1}{w} = N \int_{\zeta}^g \frac{(r-u)du}{\sqrt{u(g-u)(d-u)^3}} + i = -\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{2}{\pi} KZ(\alpha, k) + i \quad (2.1)$$

Зависимость (1.2) для функции  $w(\zeta)$  сохраняется, равно как и представление (1.7) для функции  $z(\zeta)$ , в котором теперь имеем, исходя из (2.1) и используя в ходе преобразований формулу дифференцирования функции  $Z(\alpha, k)$  по аргументу ([5], формула (730.03)),

$$\frac{d}{du} \left( \frac{1}{w} \right) = N \frac{u-r}{\sqrt{u(g-u)(d-u)^3}}; \quad N = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{E\sqrt{d}}{\pi}; \quad r = \frac{g\Phi}{E} \quad (2.2)$$

Функция  $\Phi$  определена в группе формул (1.3).

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи содержит три неизвестных параметра отображений:  $b$ ,  $d$  и  $g$ . Между ними существует связь, выражаемая условием  $(1/w)_{\zeta=-b} = 0$ . С использованием представления функции  $1/w(\zeta)$  на участке  $AC$ , получаемого из зависимости (2.1), это условие приводит к соотношению (ср. с (1.4))

$$J(\rho, b, d, g) = 1 - (1 + \rho) \Lambda_0(\arcsin \sqrt{d/(b+d)}, \sqrt{g/d}) = 0 \quad (2.3)$$

Функция  $\Lambda_0$  выражена формулой (1.5).

Итак, при наличии трех определяющих геометрических характеристик фильтрационной схемы ( $l$ ,  $L$  и  $H_0$ ) независимы теперь лишь два параметра отображения;

отнесем к ним параметры  $d$  и  $g$ . Наряду с ними вычислению из системы трех уравнений, связанных с упомянутыми характеристиками и аналогичных первому, второму и четвертому уравнениям системы (1.9), подлежит и фильтрационный расход  $Q$  дренажного стока  $B$ ; аналог же третьего уравнения системы (1.9) используется затем для нахождения ординаты  $\beta = \beta_*$  стока. Исключая из этой системы величину  $Q$ , перейдем к системе

$$f_1(d, g) = l / L, \quad f_2(d, g) = L / H_0 \quad (2.4)$$

Тем самым решение исходной системы сводится на первом этапе к нахождению параметров  $d$  и  $g$ , причем

$$g \in (g_0, 1), \quad d \in (1, d_0); \quad g_0 = \operatorname{sn}^2(lK, k), \quad d_0 = 1 / k^2 \quad (2.5)$$

Здесь  $\operatorname{sn}$  – эллиптическая функция Якоби ([5], формула (120.01)).

Равенства (2.5) определяют аффиксы точек  $G$  и  $D$  на плоскости  $\zeta$  при  $Q = 0$ , когда область  $z$  – прямоугольник. Ограничения (2.5) связаны со следующей устойчивой тенденцией, выявляемой и используемой при расчетах: с возрастанием фильтрационного расхода  $Q$  при фиксировании прочих входных физических величин параметры  $g$  и  $d$  сближаются друг с другом и с единицей, соответственно возрастая и убывая (фиг. 1, 2). Это согласуется с изменением взаимного расположения угловых особых точек на границе области течения при интенсификации стока, в результате которой к нему приближаются подвижные точки  $A(0)$  и  $C(\infty)$ , отдаляясь вместе с тем первая – от фиксированных точек  $G(g)$  и  $E(1)$ , а вторая – от точек  $E(1)$  и  $D(d)$  (фиг. 1, а, 2). Правда, последняя является в области  $z$  подвижной, тем не менее отмеченный выше характер зависимости ее аффикса  $d$  от расхода  $Q$  неуклонно проявляется при расчетах.

Представим второе уравнение системы (2.4) в записи

$$F_2(d) = f_2[d, g(d)] = L / H_0 \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) решается относительно параметра  $d$ , для каждого из значений которого, перебираемых в процессе решения, параметр  $g$  определяется из первого уравнения (2.4) во внутреннем цикле. При этом для каждой пары параметров  $d$  и  $g$  вычислению функции  $f_1(d, g)$ , включающей в себя также параметр  $h$ , предшествует его нахождение из соотношения (2.3). Реализация подобных процедур базируется на детальном численном исследовании поведения каждой из функций, входящих в уравнения, и выявлении интервалов, в которых должны содержаться искомые параметры. В частности, параметр  $g$  определяется из ее первого уравнения с учетом устанавливаемого монотонного возрастания функции  $f_1(g, d)$  с увеличением параметра  $g$  (при этом, как отмечалось выше, параметр  $d$  фиксируется). Функция  $F_2(d)$  в уравнении (2.6) является, напротив, монотонно убывающей.

После нахождения параметров  $d$  и  $g$  в двойном критическом режиме фильтрационный расход  $Q = Q_*$  дренажного стока определяется из уравнения, связанного с величиной  $H_0$ ; затем вычисляется ордината стока  $\beta = \beta_*$ . Именно величина  $Q_*$  оказывается максимально достижимой продуктивностью водозабора из каймы, обеспечиваемой при расположении стока  $B$  на глубине  $\beta_*$ . Сам же двойной критический режим как бы окаймляет все режимы дренирования, которые могут реализоваться в задаче для заданной комбинации входных физических параметров  $\rho$ ,  $l$ ,  $L$  и  $H_0$  при варьировании ординаты  $\beta$  дренажного стока  $B$  в интервале  $(0, H_0)$ , включая и отмечавшиеся выше простые критические режимы, связанные с какой-либо одной из свободных границ.

**3. Течение к водозабору.** Вернемся к проблеме отбора из каймы пресных грунтовых вод, на решение которой ориентирована поставленная в разд. 1 краевая задача.

Нахождение величины  $\beta_*$  позволяет выделить тот из двух простых критических режимов, на который выйдет фильтрационный процесс с увеличением интенсивности стока, заложенного на глубине  $\beta$ :  $f = 0$  при  $\beta < \beta_*$  или  $f = \infty$  при  $\beta > \beta_*$ . Все зависимости, уравнения, подынтегральные функции получаются для этих режимов из приведенных выше соответствующим предельным переходом по параметру  $f$ .

Система (1.9) используется для нахождения параметров  $b$ ,  $d$  и  $g$ , подчиненных теперь ограничениям

$$b \in (0, b_*) \text{ при } \beta < \beta_*, \quad b \in (b_*, \infty) \text{ при } \beta > \beta_*; \quad g \in (g_0, g_*), d \in (d_*, d_0) \quad (3.1)$$

Звездочкой отмечены значения параметров, вычисляемые в двойном критическом режиме.

Кроме того, определению и здесь подлежит расход  $Q$ , который вначале также исключается из системы (1.9) посредством ее преобразования к виду (ср. с (2.4), (2.6))

$$\begin{aligned} F_1(g) &= f_1(b, d, g) = l / L \\ F_2(d) &= f_2[b, d, g(b, d)] = L / H_0 \\ F_3(b) &= f_3[b, d(b), g(b, d)] = \beta / l \end{aligned} \quad (3.2)$$

В соответствии с этой записью функция  $f_3$  в третьем уравнении системы (3.2), решаемом во внешнем цикле процедуры, представлена как сложная функция параметра  $b$ , изменение которого в том или ином простом критическом режиме регламентируется ограничениями (3.1). Для каждого из значений параметра  $b$ , перебираемых в ходе решения и фиксируемых при обращении к первым двум уравнениям системы, из последних по описанной выше схеме находятся параметры  $d$  и  $g$ , которые и вносятся в функцию  $F_3(b)$ , подлежащей вычислению на каждом шаге упомянутого внешнего цикла.

Сопоставляя два последних ограничения (3.1) с соответствующими ограничениями (2.5), видим, что расчет двойного критического режима позволяет несколько сузить исходные интервалы поиска параметров  $d$  и  $g$ , согласовав их с диапазоном  $(0, Q_*)$  возможных значений расхода  $Q$ . Соблюдение таких скорректированных интервалов в сочетании с соответствующим ограничением на изменение параметра  $b$  здесь и при последующих вычислениях обеспечивает выполнение условия  $M > 0$  и монотонное возрастание функции  $F_3(b)$  от 0 до  $\beta_*/l$  при  $f = 0$  и от  $\beta_*/l$  до  $H_0/l$  при  $f = \infty$ , используемое при решении третьего уравнения системы (3.2).

После нахождения параметров  $b$ ,  $d$  и  $g$  из четвертого уравнения системы (1.9), как и прежде, вычисляется расход  $Q$ , значение которого при  $f = 0$  и при  $f = \infty$  обозначим соответственно через  $Q_1$  и  $Q_2$ . Его зависимость от глубины стока при  $l = 40$ ,  $L = 50$ ,  $H_0 = 20$ ,  $\rho = 0,02$  иллюстрирует график на фиг. 3; координаты  $\beta = \beta_* = 0,993$  и  $Q = Q_* = 0,180$  его точки максимума найдены в двойном критическом режиме. В итоге выясняется вопрос о допустимых значениях  $Q$  при заложении дренажного стока на произвольной глубине  $\beta$ , что открывает путь к расчету течения при любом значении  $Q$ , не выходящем за установленные для него границы.

Для подобных режимов дренирования, называемых далее нормальными, система уравнений (1.9), как уже отмечалось, подлежит решению в полном объеме. Преобразуем ее к виду (ср. с (3.2))

$$\begin{aligned} F_1(g) &= f_1(b, f, d, g) = l / L \\ F_2(d) &= f_2[b, f, d, g(b, f, d)] = L / H_0 \\ F_3(b) &= f_3[b, f(b), d(b, f), g(b, f, d)] = \beta / l \\ F_4(f) &= f_4[b, f, d(b, f), g(b, f, d)] = Q / H_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

В этой записи отражена реализованная в программе вычислений четырехслойная

циклическая процедура решения системы уравнений (1.9). Третье уравнение системы (3.3) решается, как и для простого критического режима, во внешнем цикле относительно параметра  $h$ , ограничения на который сообразованы с диапазонами  $(0, Q_1)$  или  $(0, Q_2)$  возможных значений расхода  $Q$  следующим образом:

$$\begin{aligned} b &\in (b_1, b_0) \text{ при } \beta < \beta_* \\ b &\in (b_0, b_2) \text{ при } \beta > \beta_* \\ b_0 &= \text{sn}^2(\beta K', k') / \text{cn}^2(\beta K', k') \\ K' &= F(\pi/2, k') \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $b_0, b_1, b_2$  – значения параметра  $h$  соответственно при  $Q = 0, Q_1, Q_2$ ;  $\text{sn}$  – эллиптическая функция Якоби ([5], формула (120.01)).

Дополнительным по отношению к простому критическому режиму является теперь очередной цикл, вложенный во внешний. С ним связано нахождение параметра  $f$  из четвертого уравнения системы (3.3). Непосредственно в этот цикл вложены два внутренних, в которых при ограничениях (3.1) относительно параметров  $d$  и  $g$  решается подсистема первых двух уравнений системы (3.3).

Что же касается ограничений на параметр  $f$ , то их установление потребовало дополнительного выяснения некоторых деталей.

Если принять, что зависимости  $f(Q)$  и  $h(Q)$  непрерывны, то для нормальных режимов дренирования, близких к реализуемому при заданном значении  $\beta$  критическому режиму, сохранится присущее последнему соотношение между параметрами  $f$  и  $h$  и, следовательно, имеем

$$0 < f < h \text{ при } \beta < \beta_*; \quad h < f < \infty \text{ при } \beta > \beta_* \quad (3.5)$$

Обращаясь к равенствам (1.4) и учитывая условие  $M > 0$ , замечаем, что при варьировании параметров  $h, d$  и  $g$  в процессе решения системы (3.3) каждое из соотношений (3.3) между параметрами  $h$  и  $f$  может превратиться в противоположное с изменением знака функции  $J(\rho, h, d, g)$ . Ее зависимость от каждого из входящих в него параметров отображения определяется неравенствами

$$\frac{\partial J}{\partial b} > 0, \quad \frac{\partial J}{\partial g} > 0, \quad \frac{\partial J}{\partial d} < 0 \quad (3.6)$$

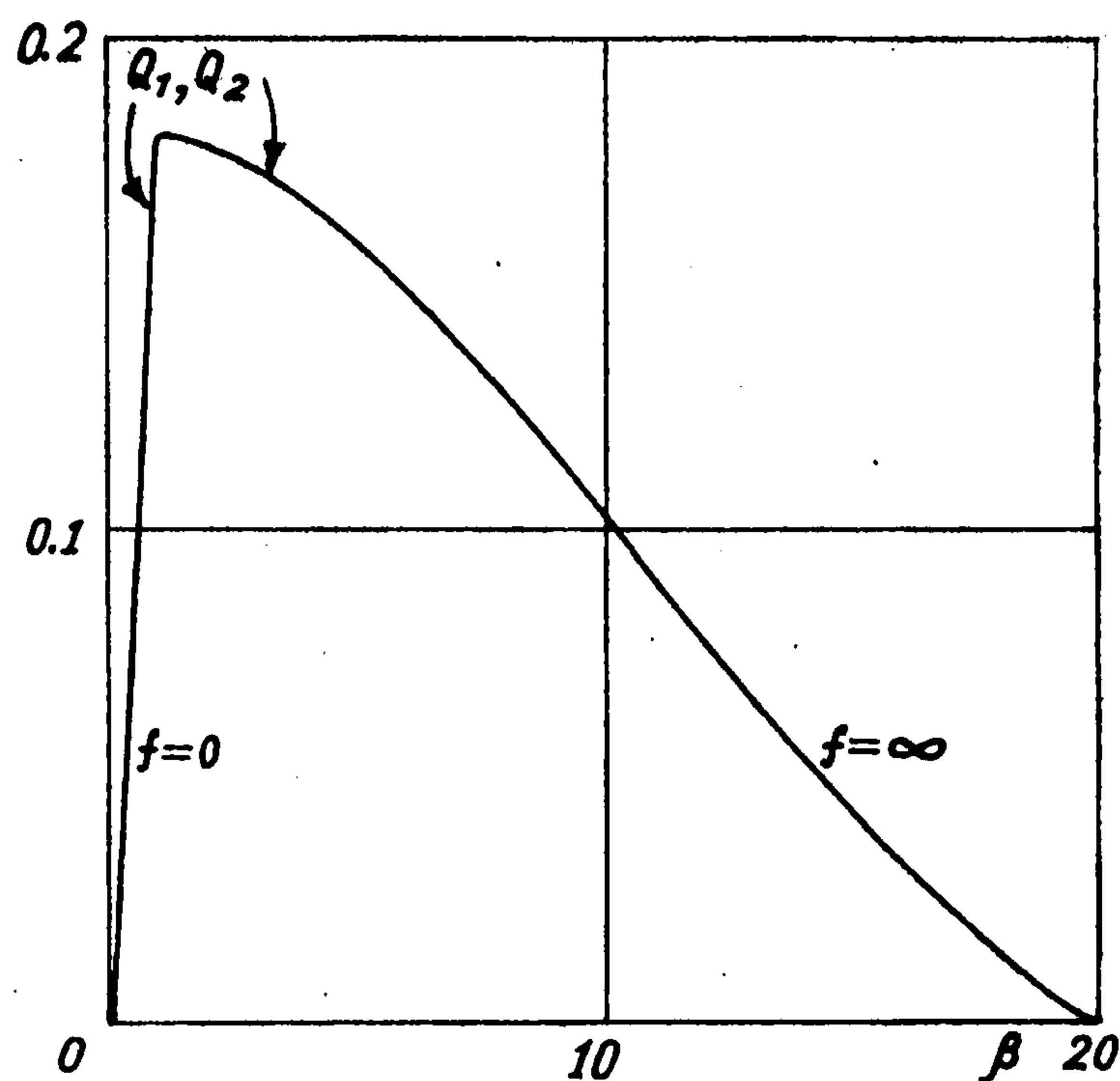
получаемыми посредством дифференцирования функции  $\Lambda_0$  ([5], формулы (710.11), (730.04)) с учетом выражения (1.3) для модуля  $k$ .

Соотношения (3.6) позволяют обозначить интервалы значений параметра  $b$ , в рамках которых функция  $J$  сохраняет знак при любых значениях параметров  $d$  и  $g$ , подчиненных ограничениям (3.1)

$$J < 0 \text{ при } 0 < b < b_*, \quad J > 0 \text{ при } b_0 < b < \infty; \quad b_* < b_0 \quad (3.7)$$

Здесь  $b_0$  – корень уравнения (2.3) при  $d = d_0, g = g_0$ ; значение  $b = b_*$  находится из этого же уравнения при  $d = d_*, g = g_*$ .

В тех случаях, когда исходный интервал изменения параметра  $h$ , предписанный первым или вторым (в зависимости от соотношения между величинами  $\beta$  и  $\beta_*$ ) из ограничений (3.4), укладывается в соответствующий интервал (3.7), регламентация



Фиг 3

(3.5) сохраняется при всех допустимых значениях параметров  $b$ ,  $d$  и  $g$ . С ее учетом решается четвертое уравнение системы (3.3) при фиксированном параметре  $b$  и при параметрах  $d$ ,  $g$ , предвычисляемых во внутренних циклах. Однозначная разрешимость уравнения обеспечивается устанавливаемым при расчетах монотонным убыванием функции  $F_4(f)$  по мере сближения параметров  $f$  и  $b$  и тем обстоятельством, что в диапазоне изменения этой функции содержится заданное значение  $Q/H_0$ . При малых расходах  $Q$  действует асимптотика ([2], формула (13.9))

$$f \approx b + \frac{2K(\sqrt{1/d})}{\pi r L} \sqrt{\frac{b(1+b)(b+d)}{d}} J(\rho, b, d, g) Q$$

имеющая гидродинамическую окраску: "гашение" стока  $B$  при совмещении с ней точки  $F$ , скорость в которой конечна.

В случае рассогласования соответствующих интервалов (3.4) и (3.7) изменения параметра  $b$  предусмотрены дополнительные процедуры, обеспечивающие определение всех параметров отображения.

При полном затоплении поверхности упрощается схема течения вместе с описывающей его краевой задачей. Единственно возможный теперь при любой глубине стока  $\beta$  критический режим дренирования связан с остающейся одной свободной границей: линией раздела между каймой и солеными водами. Значение  $Q$ , вычисляемое в таком режиме и определяющее затем диапазон возможных изменений расходов в других режимах дренирования, неограниченно возрастает по мере приближения стока к затопленной поверхности, если, конечно, исходить из того, что поступление с поверхности способно восполнить любой отбор из каймы. Гидродинамическую модель течения можно связать в этом случае с известной проблемой отбора пресных вод, поступающих в грунт из так называемых инфильтрационных бассейнов и очищающихся от примесей при фильтрации на пути к водозабору.

Проиллюстрируем некоторые особенности течения в кайме по результатам расчетов, выполненных при  $l = 40$ ,  $L = 50$ ,  $H_0 = 50$ ,  $\beta = 2$ ,  $\rho = 0,02$ ; входным и вычисляемым геометрическим величинам можно присвоить любую размерность длины.

В первой строке приведенной таблицы содержатся основные результаты вычислений для двойного критического режима дренирования. Параметры  $d_*$  и  $g_*$  определены из системы уравнений (2.4) при ограничениях (2.5), значения  $d_0 = 2$  и  $g_0 = 0,931$  в которых вычислены по формулам (2.5). Значение параметра  $b_*$  в той же строке связано со значениями  $d_*$  и  $g_*$  соотношением (1.3), что отмечалось в разд. 2. После нахождения параметров  $b_*$ ,  $d_*$ , и  $g_*$  рассчитаны глубина  $\beta_* = 5,70$  заложения дренажного стока и его фильтрационный расход  $Q_* = 1,54$ , максимально достижимый в этом варианте. В таблицу включены три геометрические величины  $H_1$ ,  $H_2$  и  $y_A$ , определяющие положение концевых точек свободных границ каймы (фиг. 2, а). Для каждого режима вычисляются также координаты отдельных промежуточных точек свободных границ.

Сообразно с выбором величины  $\beta = 2 < \beta_*$  вычисления на следующем этапе производятся для простого критического режима  $f = 0$ , связанного с кривой депрессии, точка А которой остается точкой заострения, и представленного второй строкой таблицы. При более высоком, чем в двойном критическом режиме, расположении стока существенно сокращается диапазон его продуктивности. Вместе с тем значительно ослабевает напряжение на линии раздела, верхняя точка С которой отходит далеко вниз от своего положения в двойном критическом режиме, приближаясь к невозмущенному уровню  $H_0$  соленых грунтовых вод. Параметры

$b$	$d$	$g$	$f$	$Q$	$H_1$	$H_2$	$y_A$
$2,4 \cdot 10^{-3}$	1,39	0,973		1,54	27,2	57,7	5,40
$0,12 \cdot 10^{-3}$	1,94	0,940	0	0,456	47,3	52,3	1,91
$4,92 \cdot 10^{-3}$	1,995	0,932	$4,91 \cdot 10^{-3}$	0,0456	49,8	50,2	0,136

отображения определяются из системы уравнений (3.2) при ограничениях (3.1), из которых на параметр  $b$  действует в данном случае первое.

В нормальном режиме дренирования, с которым связана третья строка таблицы, расход  $Q$  задан равным десятой части его максимально возможного при  $\beta = 2$  значения  $Q_1 = 0,456$ , что почти в 34 раза меньше значения  $Q_*$  в двойном критическом режиме. В результате такого ослабления дренажа значительно выполаживаются обе свободные границы каймы, о чем можно судить по величинам  $H_1, H_2, u_A$ . Но и теперь на кривой депрессии сохраняются две точки перегиба  $R_1(23,3; 0,0554)$  и  $R_2(1,86, 0,125)$ . Линия раздела имеет, как и в простом критическом режиме, единственную точку перегиба  $R(24,2; 50,0)$ . Отчетливо проявляется отмеченная выше тенденция к сближению параметров  $b$  и  $f$  при малых значениях  $Q$ .

**4. Расчет зоны опреснения почвы.** Предположим, что в почву, первоначально содержащую соленые грунтовые воды, начинает поступать с поверхности пресная вода при одновременном включении дренажа с некоторой интенсивностью  $Q$ . Через него из почвы отводятся сначала только соленые, а с некоторого момента – также и пресные воды, постепенно замещающие соленые.

Если в ходе этого процесса динамическое равновесие фильтрационного потока с атмосферой не нарушится, то в пределе сформируется стационарное течение пресных вод над оставшимися невытесненными солеными в одном из описанных выше критических режимов, связанном с линией раздела. Средняя толщина  $H_0$  слоя пресной воды в образовавшейся кайме определится соотношением (1.10).

При ослаблении интенсивности дренажа и предполагаемом сохранении объема соленых вод произойдет выполаживание линии раздела. Увеличение же дренажного расхода  $Q$  нарушит создавшееся равновесие между пресными и солеными водами, приведя к дополнительному дренированию последних и возрастанию глубины  $H_0$  зоны опреснения. При этом во избежание прорыва воздуха в дренаж величина  $Q$  не должна превышать значения  $Q_*$ , при котором в сформированной кайме на грани дестабилизации окажется также ее кривая депрессии.

Таким образом, и здесь на первом этапе необходимо рассчитать двойной критический режим, но при заданной ординате  $\beta$  дренажного стока. В соответствии с этим вместо системы (2.4) теперь решается система

$$F_1(g) = f_1(b, g) = l / L, \quad F_2(b) = f_2[b, g(b)] = \beta / l \quad (4.1)$$

Параметр  $d$ , также содержащийся в функциях  $f_1$  и  $f_2$ , предвычисляется из соотношения (2.3) для каждой пары параметров  $b$  и  $g$ , перебираемых в процессе решения системы (4.1).

После нахождения параметров  $b, d$  и  $g$  вычисляются интенсивность дренажа  $Q_*$ , при которой зона опреснения сформируется в указанном режиме, а также максимально достижимая при выбранных значениях величин  $l, L, \beta$  и  $\rho$  средняя толщина  $H_{0*}$  зоны.

Далее для некоторого конкретного значения  $Q \in (0, Q_*)$  осуществляется расчет каймы в критическом режиме  $f = \infty$ , связанном с линией раздела. При этом решению подлежит следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} F_1(g) &= f_1(b, d, g) = l / L \\ F_2(b) &= f_2[b, d, g(b, d)] = \beta / l \\ F_3(d) &= f_3[b(d), d, g(d)] = Q / L \end{aligned} \quad (4.2)$$

Во внешнем цикле этой процедуры решается третье уравнение относительно параметра  $d$ , причем теперь  $d \in (1, d_*)$ . Численно устанавливается и используется при решении системы монотонное возрастание каждой из функций  $F_1, F_2, F_3$  по своему параметру. Регулирование интервалов изменения параметров осуществляется с соблюдением соотношения  $J > 0$ , которое в данном случае обеспечивает в силу (1.4) выполнение условия  $M > 0$ .

Проиллюстрируем вышеизложенное примером числовых расчетов при  $l = 40$ ,  $L = 50$ ,  $\beta = 2$ ,  $\rho = 0,02$ . Для этой комбинации входных параметров получены величины  $Q_* = 0,440$  и  $H_{0*} = 30,4$ . Затем при двух заданных значениях дренажных расходов  $Q = 0,0440$  и  $0,396$  вычислено соответственно  $H_0 = 10,3$  и  $29,0$ .

Сравнивая приведенные значения величин  $Q_*$ ,  $H_{0*}$  и  $\beta$  со значениями  $Q_* = 1,54$ ,  $H_0 = 50$  и  $\beta_* = 5,70$  числового примера предыдущей задачи, найденными при тех же входных параметрах  $l$ ,  $L$ , и  $\rho$  в двойном критическом режиме, отметим расширение возможностей дренажа как опреснителя почв при его почти трехкратном заглублении.

Интересно, что в принятой модели течения эти возможности становятся неограниченными независимо от глубины заложения дрен в случае полного затопления поверхности – при отсутствии депрессионной кривой, лимитирующей интенсификацию дренажа. Конечно, расход реальных дрен, в том числе и вакуумных, всегда ограничен особенностями их конструкции, водопроницаемостью почв, ресурсами поверхностных источников, восполняющих дренаж. Впрочем, назначение последнего в моделируемом процессе состоит лишь в том, чтобы создать в корневой зоне почвы слой пресных грунтовых вод определенной мощности, после чего дрены можно вообще выключить.

Гидромелиоративная проблема, с которой связана рассмотренная здесь модификация исходной краевой задачи, поставлена С.А. Аверьяновым [7]. Им предложено приближенное решение задачи, основанное на замене обеих свободных границ фиксированными горизонтальными, последующая корректировка которых производится посредством первых краевых условий (1.1) для этих границ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эмих В.Н. Гидродинамическая модель дренажа в кайме пресных грунтовых вод над солеными // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 4. С.825–828.
2. Эмих В.Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. Новосибирск: Наука, 1993. 209 с.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях разной плотности // Изв. АН СССР. ОТН. 1940. № 6. С. 73–80.
5. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin, ets.: Springer, 1971. 358 p.
6. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
7. Аверьянов С.Ф. Рассоляющее действие фильтрации из каналов // Влияние орошения на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 44–120.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
22.XII.1994