УДК 532.546

© 1996 г. Н.Т. Карачурин, С.А. Кондаратцев, М.М. Хасанов

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматриваются алгоритмы решения обратной задачи определения функций относительных фазовых проницаемостей (ОФП) по данным нестационарных лабораторных исследований образцов пористой среды. Для регуляризации этой задачи предлагается использовать априорную информацию о виде ОФП, полученную в ходе стационарных исследований литологически близких образцов пористой среды. Разработаны методы определения оптимальной сложности соотношений, аппроксимирующих относительные фазовые проницаемости. Приведены примеры использования предложенных алгоритмов при решении модельной задачи и обработке реальных данных.

1. Постановка задачи. Процесс вытеснения жидкости из образца пористой среды описывается уравнением Баклея–Леверетта:

$$\frac{ds}{d\tau}+f'(s)\frac{ds}{d\xi}=0,\quad f(s)=\frac{f_1(s)}{f_1(s)+\mu_0 f_2(s)},\quad \xi=\frac{x}{l} \tag{1.1}$$

где s – насыщенность агентом вытеснения, τ – безразмерное время, равное отношению объема закачанного агента к общему объему пор, x – пространственная координата, l – длина образца, $f'(s)$ – производная функция Баклея–Леверетта $f(s), f_1(s)$ и $f_2(s)$ – относительные фазовые проницаемости агента вытеснения и жидкости соответственно, $\mu_0=\mu_1/\mu_2$ – отношение их вязкостей.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям $s(0,\tau)=s_T$, $s(\xi,0)=s_c$ имеет, как известно, вид [1]:

$$s=\begin{cases}\Psi(\xi/\tau), & \xi<\xi_c(\tau)\\ s_c, & \xi\geqslant\xi_c(\tau)\end{cases}$$

где s_c и s_T – начальная и конечная насыщенность пористой среды вытесняющим агентом, Ψ – функция, являющаяся результатом обращения функции $f'(s)$ на $[s_*, s_T]$, $\xi_c=\upsilon\tau$, $\upsilon=f'(s_*)$ – скорость движения фронта, s_* – значение насыщенности на фронте вытеснения, определяемое из условия

$$f'(s_*)=(f(s_*)-f(s_C))/(s_*-s_C)$$

Зависимость безразмерного перепада давления $\Delta P(\tau)$ от времени определяется выражением

$$\Delta P(\tau)=\int_0^1\frac{d\xi}{\Phi(s(\xi,\tau))},\quad \tau\geqslant\tau_*;\quad \Delta P(\tau)=\int_0^{\xi_c}\frac{d\xi}{\Phi(s(\xi,\tau))}+\frac{1-\xi_c}{\mu_0 F_2},\quad \tau<\tau_*$$

где $\tau_*=1/f'(s_*)$ – безразмерное время, за которое фронт вытеснения достигает выхода образца ($\xi = 1$), F_2 – относительная фазовая проницаемость вытесняемой жидкости при $s = s_c$. При переходе к безразмерным переменным за масштаб давления принимается величина $\Delta P_m = \Delta Pk/(\mu_1 lv)$, где k – проницаемость по воздуху, l – длина образца, v – скорость фильтрации, μ_1 – вязкость агента вытеснения. Объем вытесненной жидкости, приведенный к объему пор, представляется так:

$$V_2(\tau) = \tau, \quad \tau < \tau_*; \quad V_2(\tau) = \tau_* + \int_{\tau_*}^{\tau} [1 - f(s(1,t))]dt, \quad \tau \geq \tau_*$$

Ставится обратная задача определения относительных фазовых проницаемостей (ОФП) $f_1(s)$ и $f_2(s)$ по замерам перепада давления $\Delta P^0(\tau_i)$ и объема вытесненной жидкости $V_2^0(\tau_i)$ (τ_i – время i-го замера, $i = 1, \ldots, M$; M – объем выборки).

Следует отметить, что наиболее точно ОФП определяются по данным стационарных исследований, в ходе которых агент вытеснения и вытесняемую жидкость подают в образец пористой среды в определенном соотношении и на каждом режиме дожидаются установления стационарной фильтрации (т.е. стабилизации показаний приборов, измеряющих градиент давления и водонасыщенность образца пористой среды). Но они требуют больших затрат времени, что ограничивает число образцов, которые могут быть исследованы. Поэтому часто оценка ОФП производится по данным нестационарных исследований в соответствии с постановкой, рассмотренной выше. Однако реализация этого метода осложняется тем, что ОФП оцениваются косвенным образом, путем решения соответствующей обратной задачи, что приводит к неустойчивости. Ниже рассматриваются помехоустойчивые алгоритмы определения функций ОФП по данным нестационарных исследований, основанные на привлечении априорной информации о виде ОФП.

2. Обоснование параметризации функций ОФП по данным стационарных исследований. Во избежание неустойчивости при нахождении функциональных зависимостей необходимо применять регуляризующие алгоритмы [2], обеспечивающие корректность решения обратной задачи определения ОФП. Как известно, одним из эффективных способов регуляризации является параметризация искомых функций. Так, рассматривались ОФП в виде [3]

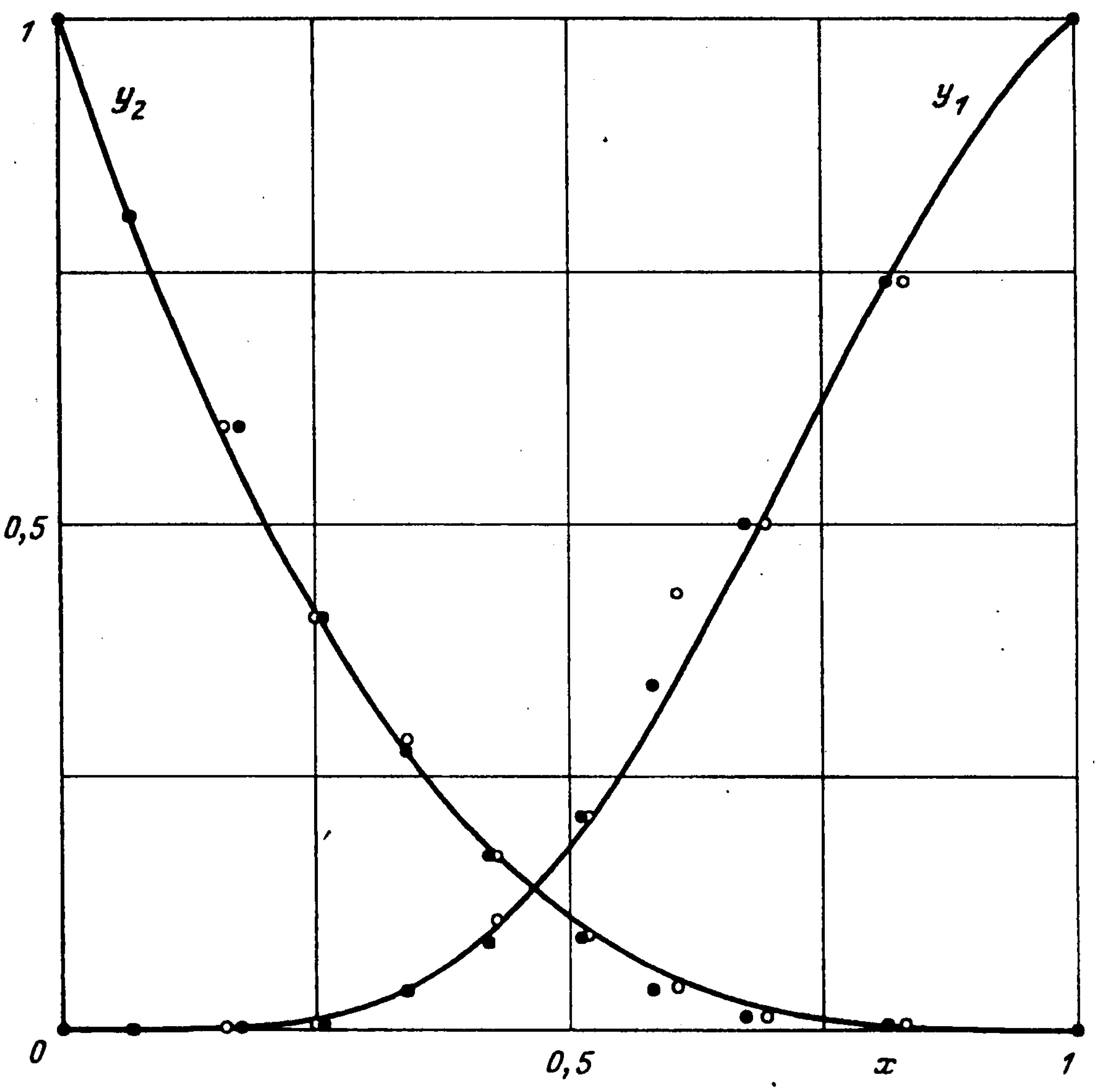
$$f_1(s) = A_1\left(\frac{s - s_c}{1 - s_c}\right)^{N_1}, \quad f_2(s) = A_2\left(\frac{s_T - s}{s_T - s_C}\right)^{N_2}$$

где параметры A_1, A_2, N_1, N_2 определяются из условия максимальной близости теоретических зависимостей к экспериментальным. Однако анализ стационарных исследований показывает, что вид кривых фазовых проницаемостей часто отличается от степенного. Более того, пористые среды с различными физико-химическими свойствами могут характеризоваться кривыми ОФП совершенно различного вида.

Обоснованную параметризацию функций ОФП можно осуществить, если из независимых экспериментов или литературы известен вид ОФП, определенных на литологически близких образцах пористых сред стационарными методами исследования. Эта возможность основывается на том, что экспериментальные зависимости, полученные на различных образцах пористых сред со сходными физико-химическими свойствами, могут быть представлены в некой универсальной форме путем перехода к нормированным координатам, предложенным впервые Коллинзом

$$x = \frac{s - s_C}{s_T - s_C}, \quad y_i = \frac{f_i(s)}{F_i}$$

где F_1 и F_2 – ОФП агента вытеснения и вытесняемой жидкости при $s = s_T$ и $s = s_C$ соответственно. В этих координатах ОФП, снятые на различных (но литологи-



чески близких) образцах, ложатся на единые универсальные кривые, аналитические выражения для которых ищутся в виде $y_i = F_i(x, p)$, где $p \in R^N$ – параметры, определяемые известными методами восстановления экспериментальных зависимостей, N – их число.

В качестве примера рассмотрим ОФП, снятые при проведении стационарных исследований на литологически близких образцах пористых сред Приобского месторождения. Графики этих функций в нормированных координатах представлены на фигуре (светлыми точками – ОФП образца, для которого s_c = 0,298, s_T = 0,695, темными точками – ОФП образца с s_c = 0,4, s_T = 0,707). Как видно, экспериментальные точки действительно ложатся на единые кривые, которые могут быть представлены в аналитической форме

$$y_1 = x^{p_1 + p_2 x}, \quad y_2 = (1 - x)^{p_3 + p_4 x}$$

В связи с неустойчивостью обратной задачи важен вопрос об уменьшении сложности модели (т.е. числа параметров p, определяемых по данным нестационарных исследований). Для уменьшения числа искомых параметров некоторым из них могут быть присвоены эталонные значения, т.е. значения, полученные в стационарных исследованиях литологически близких образцов. В ряде случаев в целях упрощения модели могут быть использованы соотношения между параметрами, следующие из данных стационарных опытов.

Иногда опыты по вытеснению прерывают, не дожидаясь установления стационарного режима фильтрации. В этом случае в число неизвестных параметров включаются величины s_T и F_1, а для уменьшения сложности модели некоторым из параметров p могут быть присвоены значения p^c, определенные по данным эталонных опытов.

3. Алгоритм решения обратной задачи. Решение обратной задачи сводится к минимизации невязки

$$I_0(p) = \sum_i [\alpha(\Delta P^0(\tau_i) - \Delta P(\tau_i, p))^2 + (V_2^0(\tau_i) - V_2(\tau_i, p))^2]$$

по параметрам $p \in R^N$. Функции $\Delta P(\tau)$ и $V_2(\tau)$ находятся по формулам, приведенным в разд. 1, $\alpha = (V_2^*/\Delta P^*)$ – коэффициент, учитывающий различие в масштабах изменения и размерностях величин V_2 и ΔP, V_2^* и ΔP^* – их характерные значения.

Минимум невязки определяется методом последовательного спуска, причем минимизация по каждому из искомых параметров проводится методом золотого сечения. Для сужения области поиска выделяется некоторая начальная точка p_0 (первое приближение), в малой окрестности которой ищется решение. Точка p_0 может быть найдена, в частности методом Монте-Карло, путем случайного выбора точек p из некоторой области и сравнения значений невязки в этих точках.

Оптимальное число искомых параметров N может быть найдено следующими двумя способами.

Метод структурной минимизации среднего риска. Проблема правильного соотнесения сложности идентифицируемой модели с количеством и уровнем погрешности имеющихся данных может быть решена при помощи метода структурной минимизации [4]. Оказывается, что если на допустимом множестве решения задать структуру, то наряду с минимизацией эмпирического риска (невязки) внутри элементов структуры появляется дополнительная возможность минимизации по элементам структуры. Это позволяет найти решение, дающее более глубокий гарантированный минимум среднего риска, чем решение, доставляющее минимум эмпирическому риску на всем допустимом множестве решений.

В рассматриваемом случае структура задается множеством параметризацией ОФП. Ограничимся рассмотрением следующих четырех моделей, сложность которых определяется числом искомых параметров:

1) $f_1(s) = F_1 x^{p_1}, \quad f_2(s) = F_2 x^{p_2}$

2) $f_1(s) = F_1 x^{p_1 + p_3 x}, \quad f_2(s) = F_2 x^{p_2}$

3) $f_1(s) = F_1 x^{p_1}, \quad f_2(s) = F_2 x^{p_2 + p_4 x}$

4) $f_1(s) = F_1 x^{p_1 + p_3 x}, \quad f_2(s) = F_2 x^{p_2 + p_4 x}$

Оценки значений параметров $\tilde{p}$ в этих моделях определяются по исходной выборке $(\Delta P^0(\tau_i), V_2^0(\tau_i))$, $i = 1, \ldots, M$, путем минимизации невязки (функционала эмпирического риска) $I_0(p)$: $\tilde{p} = \arg\inf I_0(p)$.

Устойчивость решения обратной задачи обеспечивается за счет выбора из четырех представленных моделей соотношения оптимальной сложности. Было показано [4], что для каждого N с вероятностью $1 - \eta$ можно построить верхнюю оценку среднего риска вида

$$I(N) = I_0(\tilde{p})\Omega\left(\frac{N}{M}, \frac{\ln \eta}{M}\right)$$

где множитель Ω определяет степень соответствия сложности модели (величины N) объему выборки M. Величина первого множителя, как правило, уменьшается с ростом N, а величина второго растет. Метод упорядоченной минимизации среднего риска состоит в том, чтобы найти модель, минимизирующую оценку $I(N)$.

Для практических расчетов применяется оценка

$$I=\left[I_0(\tilde{p})/\left\{1-\left(\frac{N(\ln(M/N)+1)-\ln\eta}{M}\right)^{1/2}\right\}\right]_\infty,\ \text{где}\ [z]_\infty=\begin{cases}z, & z\geqslant 0\\ \infty, & z<0\end{cases}$$

Нечеткие ограничения. Оптимальная сложность модели может быть также найдена путем формализации расплывчатой цели "сделать невязку как можно меньше, а модель как можно проще" методами теории нечетких множеств [5, 6]. В частности, можно потребовать максимизации критерия

$$W=((1-\mu_n(\tilde{I}_0)N)))(1-\mu_c(N)))^{1/2}$$

где $\mu_n(I)$ и $\mu_c(N)$ – функции принадлежности нечетких множеств "большая невязка" и "большая сложность модели", определяемые как

$$\mu_n(I)=\begin{cases}r^{m_1}, & r\leqslant 1\\ 1, & r>1\end{cases},\quad r=\frac{I_0}{I_c};\quad \mu_C(N)=\begin{cases}(2N/M)^{m_2}, & 1\leqslant N\leqslant M/2\\ 1, & N>M/2\end{cases}$$

где $\tilde{I}(N)$ – мимимальное значение невязки, достигаемое путем варьирования N параметров p, $I_c=\tilde{I}(N_1)$, где N_1 – некоторое начальное число параметров (например $N_1=2$), m_1 и m_2 – показатели степени, определяющие отношение алгоритма к уменьшению невязки и увеличению сложности модели (так, если $m_2<1$, то уже при малых N модель признается сложной, а при $m_2>1$ число параметров может быть слегка увеличено).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
3. *Халимов Э.М., Леви Б.И., Дзюба В.И., Пономарев С.А.* Технология повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1984. 271 с.
4. *Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кощеев Т.А. и др.* Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В.Н. Вапника. М.: Недра, 1984. 815 с.
5. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 168 с.
6. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. С. 172–215.

Уфа

Поступила в редакцию
7.X.1994