

УДК 533.6.011.5

© 1996 г. Я.М. Каждан

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ ПЛОСКОЙ ЩЕЛИ В ВАКУУМ

Рассматривается истечение газа из плоской щели в вакуум и исследуется течение в области, где оно может быть представлено автомодельным решением соответствующей газодинамической системы. Исследуются асимптотики в окрестности особых поверхностей течения. В частности, определяется отклонение свободной поверхности от ее аналога в решении типа Прандтля–Майера.

Нестационарному истечению газа в вакуум посвящен ряд исследований (например, [1–4]).

1. Рассматривается следующая ситуация. Из плоской щели $-a < x < a$, $y \leq 0$, заполненной идеальным газом с показателем адиабаты γ , в момент $t = 0$ начинается истечение газа в область вакуума. При $t < 0$ газ неподвижен и скорость звука $c = c_0$. Возникшее течение при $t \geq 0$ симметрично относительно плоскости $x = 0$ и до некоторого момента $t = t_0^*$ в пространстве x, y, t распадается на две области: 1) область невозмущенного одномерного течения – соответствующая плоской волне Римана и 2) область возмущенного двумерного течения.

Методом сращиваемых асимптотических разложений [5–7] определяются асимптотики течения при временах, близких к моменту начала разлета, и при конечных временах в окрестностях границы волны Римана и границы разлета. В силу симметрии течения рассматривается лишь область $(x \geq 0, y, t)$.

Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным переменным:

$$x = a\bar{x}, \quad y = a\bar{y}, \quad t = t_0\bar{t}, \quad v_x = c_0\bar{v}_x, \quad v_y = c_0\bar{v}_y, \quad c = c_0\bar{c}, \quad t_0 = a/c_0 \quad (1.1)$$

(v_x и v_y – соответствующие компоненты скорости). В новых переменных щель определяется неравенствами: $-1 \leq x \leq 1$, а скорость звука в газе до начала разлета $c_0 = 1$. В дальнейшем черту в обозначениях переменных опускаем. В рассматриваемых областях до некоторого момента $t = t_0^*$ течение автомодельно. Граница между областями 1 и 2 совпадает с характеристикой, выходящей из границы щели $x = 1$, $y = 0$ в момент $t = 0$. Момент t_0^* совпадает с моментом встречи этой характеристики с плоскостью $x = 0$.

Автомодельными переменными и функциями будут следующие:

$$\xi = \frac{x-1}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}, \quad v_x = v_x(\xi, \eta), \quad v_y = v_y(\xi, \eta), \quad c = c(\xi, \eta) \quad (1.2)$$

В автомодельных переменных течение определяется уравнениями

$$(v_x - \xi) \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial v_x}{\partial \eta} + \frac{h-1}{2} \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

$$(v_x - \xi) \frac{\partial v_y}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial v_x}{\partial \eta} + \frac{h-1}{2} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad (1.3)$$

$$(v_x - \xi) \frac{\partial f}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{2f}{h-1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \left(f = c^2, \quad h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)$$

В дальнейшем в автомодельной плоскости ξ, η удобно перейти к полярным координатам φ и r , где φ – угол, образованный лучом из точки $\xi = 0, \eta = 0$ с полуосью ($\eta = 0, \xi \leq 0$), и r – расстояние от начала ($\xi = 0, \eta = 0$) до точки ξ, η ($r^2 = \xi^2 + \eta^2$), и к соответствующим компонентам скорости: $v_r = \partial r / \partial t$, $v_\varphi = -r \partial \varphi / \partial t$. При этом

$$\xi = -r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi \quad (1.4)$$

$$v_x = -v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi - v_\varphi \cos \varphi$$

В полярных координатах газодинамическая система переписывается в следующем виде:

$$(v_r - r) \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{h-1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$(v_r - r) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{h-1}{2r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.5)$$

$$(v_r - r) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{2}{h-1} f \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right] = 0$$

2. Течение в первой области – волна Римана – определяется формулами

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{h-1}{h} (\eta + 1), \quad c = \frac{1}{h} (h-1-\eta) \quad (2.1)$$

Уравнение характеристики, разделяющей волну Римана и возмущенное двумерное течение, определяется исходя из системы (1.3) и значений функций в волне Римана

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2c\xi}{\xi^2 - c^2} \quad (2.2)$$

При начальных значениях: $\xi = 0, \eta = 0$ решением уравнения (2.2), т.е. уравнением характеристики будет

$$\xi = -[h(h-2)]^{-1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{h-1} \right)^{h-2} \right]^{1/2} (h-1-\eta) \quad (2.3)$$

Течению в первой области будет соответствовать волна Римана до момента t_0^* встречи разделяющей характеристики с плоскостью $x = 0$. Линии пересечения в плоскости ξ, η будет соответствовать точка минимума функции $\xi(\eta)$, определяющей эту характеристику:

$$\xi_{\min} = -\frac{h-1}{h} \left(\frac{2}{h} \right)^{1/(h-2)}, \quad \eta_{\min} = (h-1) \left[1 - \left(-\frac{2}{h} \right)^{1/(h-2)} \right] < h-1 \quad (2.4)$$

На плоскости $x = 0$ величина $\xi = -1/t$. Следовательно,

$$t_0^* = \frac{h}{h-1} \left(\frac{h}{2} \right)^{1/(h-2)} \quad (2.5)$$

Таким образом, при $t = t_0^*$ первая область существует лишь в пределах $0 < \eta < \eta_{\min}$ и, следовательно, свободная граница, уравнение которой в волне Римана $\eta = h - 1$, в первой области не возникает.

В полярных координатах волна Римана в первой области определяется формулами

$$v_r = \frac{h-1}{h}(1+r\sin\varphi)\sin\varphi, \quad v_\varphi = -\frac{h-1}{h}(1+r\sin\varphi)\cos\varphi \quad (2.6)$$

$$f = \left(\frac{h-1}{h} - \frac{r\sin\varphi}{h} \right)^2$$

а уравнение, определяющее разделяющую характеристику, имеет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{v_\varphi(v_r - r) - \sqrt{f}r\cos\varphi}{f - v_\varphi^2} \quad (2.7)$$

Уравнение самой характеристики дается неявной функцией:

$$r\cos\varphi = (h-1-r\sin\varphi)[h(h-2)]^{-1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{r\sin\varphi}{h-1} \right)^{h-2} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

При $\varphi \rightarrow 0$ уравнения характеристики и функций на ней имеют следующие асимптотики:

$$r \approx \frac{h-1}{h}\varphi + \frac{(h-1)(7h+6)}{12h^2}\varphi^3, \quad f \approx \left(\frac{h-1}{h} \right)^2 \left[1 - \frac{2}{h}\varphi^2 + \frac{12-5h}{6h^2}\varphi^4 \right] \quad (2.9)$$

$$v_r \approx -\frac{h-1}{h}\varphi \left[1 + \frac{5h-6}{6h}\varphi^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{(h-1)(h-2)}{h^2} + \frac{1}{30} \right) \varphi^4 \right]$$

$$v_\varphi \approx \frac{h-1}{h} \left[1 + \frac{h-2}{2h}\varphi^2 + \frac{1}{24} \frac{h^2+10h-12}{h^2} \varphi^4 \right]$$

Точке встречи характеристики с плоскостью симметрии $x = 0$ соответствуют значения

$$\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\eta_{\min}}{\xi_{\min}} \right) = \operatorname{arctg} \left\{ h \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{1/(h-2)} - 1 \right] \right\} \quad (2.10)$$

$$r = (h-1) \left[1 - 2 \left(\frac{2}{h} \right)^{1/(h-2)} + \left(\frac{1}{h^2} + 1 \right) \left(\frac{2}{h} \right)^{2/(h-2)} \right]^{1/2}$$

3. Метод определения асимптотики газодинамических функций во второй области сводится к представлению газодинамических функций в виде нескольких первых членов асимптотических рядов и подстановки их в систему (1.5), после чего очевидным образом получают уравнения, определяющие коэффициенты разложения. При этом должны в определенных порядках совпадать асимптотики на границах соседних областей, найденные по значениям функций в каждой из них.

Во второй области течение в главном члене типа Прандтля – Майера, где все газодинамические величины – функции только угла φ . Согласно (1.5) эти функции

определяются системой уравнений

$$\frac{v_\varphi}{r}(v_r' + v_\varphi) = 0, \quad \frac{v_\varphi}{r}(v_r - v_\varphi') - \frac{h-1}{2r}f' = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{v_r}{r}f' + \frac{2}{h-1}f(v_\varphi' - v_r) = 0$$

и начальными данными

$$\varphi = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = -\frac{h-1}{h}, \quad f = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \quad (3.2)$$

Решение системы (3.1, 3.2) выписывается в явном виде

$$v_r = \frac{h-1}{\sqrt{h}} \sin \frac{\varphi}{\sqrt{h}}, \quad v_\varphi = -\frac{h-1}{h} \cos \frac{\varphi}{\sqrt{h}}, \quad f = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{\sqrt{h}} \quad (3.3)$$

При этом $0 \leq \varphi \leq \sqrt{h} \pi/2$. Линия $\varphi = \sqrt{h} \pi/2$ при отсутствии возмущения соответствует свободной границе. Очевидно, предлагаемое исследование справедливо лишь при условии $\sqrt{h} \pi/2 < \varphi_0$, где φ_0 – угол, соответствующий полуплоскости, ограничивающей исходную область вакуума. Так как $\varphi_0 < 3\pi/2$, то в дальнейшем считаем параметр $h < 9$.

При $\varphi \rightarrow 0$ имеет место асимптотика

$$v_r = \varphi \left(\frac{h-1}{h} - \frac{h-1}{6h^2} \varphi^2 \right), \quad v_\varphi = -\frac{h-1}{h} + \frac{h-1}{2h^2} \varphi^2 \quad (3.4)$$

$$f = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{h} \varphi^2\right)$$

Асимптотика течения при $\varphi \rightarrow 0$ вдоль разделяющей характеристики (2.9) совпадает с соответствующей асимптотикой решения Прандтля – Майера (3.4) лишь в главном члене. Поэтому для сращивания этих решений, исходя из асимптотик (2.9) и (3.4), ищем асимптотику решения в части, примыкающей к характеристике области 2, при $\varphi \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 0$ в виде

$$v_r = v_{r0}(\zeta)\varphi + v_{r1}(\zeta)\varphi^3 + v_{r2}(\zeta)\varphi^5$$

$$v_\varphi = v_{\varphi0}(\zeta) + v_{\varphi1}(\zeta)\varphi^2 + v_{\varphi2}(\zeta)\varphi^4 \quad (3.5)$$

$$f = f_0(\zeta) + f_1(\zeta)\varphi^2 + f_2(\zeta)\varphi^4 \quad (\zeta = r/\varphi)$$

Краевыми условиями для уравнений, определяющих функции с индексами 0 и 1, будут значения этих функций при $\zeta = \zeta_0 = (h-1)/h$, соответствующие характеристике, и при $\zeta = \zeta_1 = 0$, соответствующие решению Прандтля – Майера. Имеем

$$\zeta = \zeta_0: \quad v_{r0}(\zeta_0) = \frac{h-1}{h}, \quad v_{\varphi0}(\zeta_0) = -\frac{h-1}{h}, \quad f_0 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2$$

$$v_{r1}(\zeta_0) = \frac{(h-1)(5h-6)}{6h^2}, \quad v_{\varphi1}(\zeta_0) = -\frac{(h-1)(h-2)}{2h^2} \quad (3.6)$$

$$f_1(\zeta_0) = -2 \frac{(h-1)^2}{h^3}$$

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta_1: v_{r0}(\zeta_1) &= \frac{h-1}{h}, \quad v_{\varphi 0}(\zeta_1) = -\frac{h-1}{h}, \quad f_0 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \\ v_{r1}(\zeta_1) &= -\frac{h-1}{6h^2}, \quad v_{\varphi}(\zeta_1) = \frac{h-1}{2h^2} \\ f_1(\zeta_1) &= -\frac{(h-1)^2}{h^3} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции с индексом 0 определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} v_{r0} v'_{r0} \zeta + \frac{h-1}{2} f'_0 \zeta - v_{\varphi 0} (v_{r0} + v_{\varphi 0}) &= 0 \\ v_{\varphi 0} v'_{\varphi 0} \zeta + \frac{h-1}{2} f'_0 \zeta &= 0, \quad \frac{2}{h-1} f_0 v'_{\varphi 0} + v_{\varphi 0} f'_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Штрих здесь и далее означает производную по соответствующей переменной.

Решение системы – постоянные, совпадающие с краевыми условиями для функций с индексом 0.

Для получения уравнений, определяющих функции с индексом 1, применим прием, которым неоднократно воспользуемся в дальнейшем. Дело в том, что подстановка первых двух членов представления (3.5) в систему (1.5) дает лишь два линейно независимых уравнения, определяющих функции с индексом 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} v'_{r1} \zeta - \frac{1}{2} f_1 \zeta - \frac{1}{h} (3v_{r1} + v_{\varphi 1}) &= 0 \\ \frac{2}{h} v'_{\varphi 1} \zeta - f_1 \zeta + 2f_1 - \frac{4}{h} v_{\varphi 1} + \frac{2(h-1)}{h^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

При этом второе уравнение может быть заменено первым интегралом, который при учете краевых условий (3.6), (3.7) запишем в виде

$$v_{\varphi 1} - \frac{h}{2} f_1 = \frac{h-1}{2h} \quad (3.10)$$

Для того чтобы получить недостающее третье уравнение, выпишем два уравнения из системы, определяющей функции с индексом 2.

$$\begin{aligned} v_{\varphi 0} v'_{\varphi 2} \zeta + \frac{h-1}{2} f'_2 \zeta &= 4v_{\varphi 0} v_{\varphi 2} + 2(h-1)f_2 - (v_{r0} - \zeta) v'_{\varphi 1} \zeta + \\ + v_{\varphi 1} (2v_{\varphi 1} - 2v'_{\varphi 1} \zeta) - v_{r0} v_{\varphi 1} - v_{\varphi 0} v_{r1} \\ \frac{-2(h-1)}{h} v'_{\varphi 2} \zeta + \frac{h-1}{h} f'_2 \zeta &= -8 \frac{h-1}{h^2} v_{\varphi 2} + 4 \frac{h-1}{h} f_2 + \\ + \frac{2}{h-1} [f_0 v'_{r1} \zeta + f_1 v'_{\varphi 1} \zeta + (v_{\varphi 1} + v_{r0} - \zeta) f_1 \zeta + f_0 v_{r1} - (v_{r0} - (h+1)v_{\varphi 1}) f_1] \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на $2/h$, получаем недостающее третье уравнение.

Таким образом, с помощью первого интеграла (3.10) определение функций с индексом 1 может быть сведено к интегрированию системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2h-3}{h} - 2\zeta + \frac{2h}{h-1} v_{\varphi 1} \right) v'_{\varphi 1} \zeta + \frac{h-1}{h} v'_{r1} \zeta &= \frac{h-1}{h} (1 - 2v_{\varphi 1}) + \frac{h}{h-1} v_{\varphi 1}^2 \\ - v'_{\varphi 1} \zeta + v'_{r1} \zeta &= v_{\varphi 1} + 3 v_{r1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом, согласно краевым условиям (3.6), (3.7), требуется найти интегральную кривую, соединяющую точку A и B , где

$$A: \zeta = \frac{h-1}{h}, \quad v_{r1} = \frac{(h-1)(5h-6)}{6h^2}, \quad v_{\varphi1} = -\frac{(h-1)(h-2)}{2h^2}$$

$$B: \zeta = 0, \quad v_{r1} = -\frac{h-1}{6h^2}, \quad v_{\varphi1} = \frac{h-1}{2h^2}$$

Точное решение системы (3.11) выписывается явно:

$$v_{r1} = -\left[\frac{(\alpha + \chi)^2(2\alpha\chi - 5/2\alpha^2)}{3\alpha^2} + \frac{\alpha}{6h} \right], \quad v_{\varphi1} = -\frac{1}{2}(\alpha + \chi)^2 + \frac{\alpha}{2h} \quad (3.12)$$

$$\left(\alpha = \frac{h-1}{h}, \quad \chi = \zeta - \frac{h-1}{h} \right)$$

По первому интегралу (3.10) определяется функция

$$f_1 = -\frac{1}{h}(\alpha + \chi)^2 + \frac{\alpha^2}{h^2} \quad (3.13)$$

которая, как легко проверить, удовлетворяет краевым условиям. Из полученных формул следует два важных для дальнейших исследований вывода.

1°. В полученной асимптотике по степеням χ коэффициенты при нулевой и первой степенях χ совпадают с соответствующими коэффициентами невозмущенного течения.

2°. Так как $\alpha + \chi = r/\varphi$, то запись полученного решения по степеням r имеет вид

$$G = (v_r, v_\varphi, f) = G_0(\varphi) + r^2 G_2(\varphi) + \dots \quad (3.14)$$

Полученное решение будет продолжено в двух направлениях: вдоль разделяющей характеристики и при конечных значениях φ , но при малых значениях r .

4. Для получения асимптотики решения в окрестности характеристики, уравнение которой обозначим $r = r(\varphi)$, представим газодинамические функции в виде асимптотических рядов:

$$G = G_0(\varphi) + (g-1)G_1(\varphi) + (g-1)^2 G_2(\varphi) + \dots, \quad g = r/r(\varphi) \quad (4.1)$$

Системе уравнений, которые будут получены для определения $G_1(\varphi)$, должны удовлетворять функции, соответствующие как невозмущенному, так и возмущенному течениям. Начальные асимптотики для возмущенного течения при $\varphi \rightarrow 0$ соответствуют функциям, определенным в разд. 3.

В силу отмеченного в конце разд. 3 вывода 1° функции $G_0(\varphi)$ и $G_1(\varphi)$ совпадают с соответствующими решениями для невозмущенного течения. В результате подстановки рядов (4.1) в систему (1.5) получена система для определения $G_2(\varphi)$, в которой лишь два уравнения линейно независимы. Недостающее третье уравнение получим использованным ранее методом.

Выпишем систему уравнений для функций с индексом 3. Определитель системы здесь также равен нулю, но правые части содержат функции с индексом 2 и их производные. Линейная комбинация полученных уравнений с коэффициентами

$$1, \quad A = r'/r$$

$$B = [rv_{\varphi0} \cos \varphi - \sqrt{f_0}(v_{r0} - r)] / [(\gamma - 1)\sqrt{f_0}(f_0 - v_{\varphi0}^2)]$$

обращает в нуль комбинацию левых частей уравнений и дает недостающее третье уравнение для определения функций с индексом 2. В результате получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 & 2Sv_{r2} + (h-1)f_2 = -v_{r1}(v_{r1} - r) + \left(v'_{r0} - \frac{r'}{r}v_{r1}\right)(v_{\varphi1} - v_{\varphi0}) + \\
 & + \left(v'_{r1} - v_{r1}\frac{r'}{r}\right)v_{\varphi1} + 2v_{\varphi0}v_{\varphi1} - v_{\varphi0}^2 \\
 & 2Sv_{\varphi2} + (h-1)\frac{r'}{r}f_2 = -v_{\varphi1}(v_{r1} - r) + \left(v'_{r0} - \frac{r'}{r}v_{\varphi1}\right)(v_{\varphi1} - v_{\varphi0}) + \\
 & + \left(v_{\varphi1} - \frac{r'}{r}v_{\varphi1}\right) - v_{\varphi0}v_{r1} - v_{r0}v_{\varphi1} + v_{r0}v_{\varphi0} + \frac{h-1}{2}(f'_1 - f'_0) \\
 & v_{\varphi0}v'_{r2} + \left(Av_{\varphi0} + \frac{2}{h-1}Bf_0\right)v'_{\varphi2} + \left(\frac{h-1}{2}A + v_{\varphi0}B\right)f'_2 = \\
 & = \left[2(v_{r1} - r) + v_{r1} + 2(v_{\varphi1} - v_{\varphi0}) + A(v_{\varphi1} + v_{\varphi0}) + B\left(\frac{h+3}{h-1}f_1 + \frac{2}{h-1}f_0\right)\right]v_{r2} + \\
 & + \left\{-\left(v'_{r0} - v_{r1}\frac{r'}{r} + 2v_{r0}\right) + A\left[2(v_{r1} - r) - v'_{\varphi0} + 3v_{\varphi1}\frac{r'}{r} + v_{\varphi0}\right] - \right. \\
 & \left. - B\left(f'_0 - \frac{h+3}{h-1}f_1\frac{r'}{r}\right)\right\}v_{\varphi2} + \\
 & + B\left[2\left(v_{r1} - r + v_{\varphi1}\frac{r'}{r}\right) + \frac{2}{h-1}\left(v_{r0} - v'_{\varphi0} + v_{r1} + v_{\varphi1}\frac{r'}{r}\right)\right]f_2 - \\
 & - (v_{\varphi1} - v_{\varphi0})v'_{r1} - v_{\varphi0}v_{r1}\frac{r'}{r} - v_{\varphi1}^2 + v_{\varphi1}(2v_{\varphi0} + v'_{r0}) + \\
 & + A\left[\frac{h-1}{2}\left(f'_1 - f_1\frac{r'}{r}\right)v_{\varphi1} - \left(v'_{\varphi1} - v_{\varphi1}\frac{r'}{r} - v_{r1}\right)(v_{\varphi1} - v_{\varphi0}) - v_{r0}v_{\varphi1}\right] + \\
 & + B\left\{\left(f'_0 - f_1\right)v_{\varphi0} + v_{\varphi0}\left(f'_1 - f_1\frac{r'}{r}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{h-1}\left[-f_0v_{r1} + (v_{r1} - v_{r0} + v'_{\varphi0} - v'_{\varphi1})f_1 + f_0(v'_{\varphi1} - v_{\varphi1})\frac{r'}{r}\right]\right\}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S &= v_{r0} - r + \frac{r'}{r}v_{\varphi0}, \quad v_{r0} = \frac{h-1}{h}(r \sin \varphi + 1) \sin \varphi \\
 v_{\varphi0} &= -\frac{h-1}{h}(r \sin \varphi + 1) \cos \varphi, \quad f = \left(\frac{h-1}{h} - \frac{r \sin \varphi}{h}\right)^2 \\
 v_{r1} &= \frac{h-1}{h}r \sin^2 \varphi, \quad v_{\varphi1} = -\frac{h-1}{h}r \sin \varphi \cos \varphi \\
 f_1 &= -2\left(\frac{h-1}{h} - \frac{r \sin \varphi}{h}\right)r \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

После подстановки выражений $v_{r2}(\varphi)$ и $v_{\varphi2}(\varphi)$, взятых из первых двух уравнений, в третье получаем линейное дифференциальное уравнение для функции $f_2(\varphi)$, которое нужно проинтегрировать в пределах $0 < \varphi < \varphi_0 = -\arctg\{h[1-(h/2)^{1/(h-2)}]\} < \pi/2$, причем коэффициент при f_2' равен $-2r \cos \varphi / [(\chi - 1)\sqrt{f}]$ при начальной асимптотике

$$\varphi \rightarrow 0; f_2 \approx -(h-1)^2 h^{-3} \varphi^2 \quad (4.4)$$

Особенности в решении могут возникнуть лишь при обращении в нуль какой-либо из величин $f_0 - v_{\varphi 0}^2$, S . Однако можно показать, что эти величины обращаются в нуль лишь при $\varphi = 0$.

Таким образом, в окрестности характеристики во второй области функции с индексами 0, 1, 2 непрерывны и обладают непрерывными производными. Это утверждение справедливо и для коэффициентов асимптотического ряда с более высокими номерами, так как возникновение особенности в соответствующих уравнениях связано с обращением в нуль выражений $f_0 - v_{\varphi 0}^2$ и S . Поэтому можно считать границей рассматриваемого течения характеристику (2.8) в пределах $0 < \varphi < \varphi_0$.

5. Асимптотику течения при $r \rightarrow 0$ и φ конечном, исходя из (3.14), следует искать в виде

$$v_r = v_{r0}(\varphi) + r^2 v_{r2}(\varphi), \quad v_\varphi = v_{\varphi 0}(\varphi) + r^2 v_{\varphi 2}(\varphi) \quad (5.1)$$

$$f = f_0(\varphi) + r^2 f_2(\varphi)$$

Функции с индексом 0 соответствуют решению Прандтля – Майера:

$$v_{r0} = \frac{h-1}{\sqrt{h}} \sin \frac{\varphi}{\sqrt{h}}, \quad v_{\varphi 0} = -\frac{h-1}{h} \cos \frac{\varphi}{\sqrt{h}}, \quad f_0 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{\sqrt{h}} \quad (5.2)$$

Функции с индексом 2 определяются системой:

$$v_{\varphi 0} v_{r2}' + (2v_{\varphi 0} + v_{r0}') v_{\varphi 2} - 2v_{r0} v_{r2} - (h-1) f_2 = 0$$

$$v_{\varphi 0} v_{\varphi 2}' + \frac{h-1}{2} f_2' + (v_{\varphi 0}' - 3v_{r0}) v_{\varphi 2} - v_{\varphi 0} v_{r2} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{2}{h-1} v_{\varphi 0}^2 v_{\varphi 2}' + v_{\varphi 0} f_2' + f_0' v_{\varphi 2} - \frac{6}{h-1} f_0 v_{r2} + \left(-\frac{2h}{h-1} v_{r0} + \frac{2}{h-1} v_{\varphi 0}'\right) f_2 = 0$$

Из последних двух уравнений можно получить конечное соотношение, связывающее функции $v_{r2}, v_{\varphi 2}, f_2$. Используя его, можно свести систему (5.3) к двум дифференциальным уравнениям, определяющим функции $v_{r2}, v_{\varphi 2}$ и к конечному выражению f_2 через эти функции:

$$v_{\varphi 0} v_{r2}' + \left(\frac{2h}{h+1} \frac{v_{\varphi 0}^2}{v_{r0}} - 2v_{r0}\right) v_{r2} - \frac{3(h-1)}{h+1} v_{\varphi 0} v_{\varphi 2} = 0$$

$$\frac{3h}{h+1} v_{\varphi 0} v_{\varphi 2}' - \frac{h}{h+1} \frac{v_{\varphi 0}^2}{v_{r0}} v_{r2}' - \frac{3h}{h+1} v_{r0} v_{\varphi 2} - \left(\frac{h+2}{h+1} + \frac{(h-1)^2}{h(h+1)v_{r0}^2}\right) v_{\varphi 0} v_{r2} = 0 \quad (5.4)$$

$$f_2 = \frac{v_{\varphi 0}}{(h^2 - 1)v_{r0}} [(4h-2)v_{r0} v_{\varphi 2} - 2h v_{\varphi 0} v_{r2}]$$

Из решения Прандтля – Майера следует, что при $\varphi = \sqrt{h}\pi/2$ функция $f_0 = 0$, т.е. этому значению φ при $r \rightarrow 0$ соответствует свободная граница. Поэтому интегрирование следует вести в пределах изменения φ : $0 \leq \varphi \leq \sqrt{h}\pi/2$. Согласно (3.12) и

(3.13) при $\varphi \rightarrow 0$ имеет место асимптотика

$$v_{r2} \approx \frac{3}{2}\varphi + \varphi^2, \quad v_{\varphi 2} \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\varphi, \quad f_2 \approx -\frac{1}{h}\left(1 + \frac{2}{3}\varphi\right) \quad (5.5)$$

Выход из начала, согласно асимптотике (5.5), определяет единственную интегральную кривую системы (5.4), асимптотика которой при $\varphi \rightarrow \sqrt{h}\pi/2$ дается формулами

$$v_{r2} \approx \frac{3\sqrt{h}}{h+1} C_1 \theta^{1+h}, \quad v_{\varphi 2} \approx C_1 \theta^h$$

$$f_2 \approx -\frac{\theta}{\sqrt{h}(h+1)} \left[\frac{4h-2}{\sqrt{h}} C_1 \theta^h + \frac{3\sqrt{h}}{h+1} C_1 \theta^{1+h} \right] \quad (5.6)$$

где $\theta = \pi/2 - \varphi/\sqrt{h}$, а C_1 — постоянная, зависящая от величины h . Таким образом при $r \rightarrow 0$ в окрестности свободной границы асимптотика газодинамических функций может быть представлена в виде

$$v_r \approx \frac{h-1}{\sqrt{h}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{3\sqrt{h}}{h+1} C_1 \theta^{1+h} r^2 + \dots, \quad v_\varphi \approx -\frac{h-1}{h} \theta + C_1 \theta^h r^2 + \dots$$

$$f \approx \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \theta^2 - \frac{C_1 \theta^{h+1}}{\sqrt{h}(h+1)} \left[\frac{4h-2}{\sqrt{h}} + \frac{6\sqrt{h}}{h+1} \theta \right] r^2 + \dots \quad (5.7)$$

6. Свободная граница определяется уравнениями

$$f = 0, \quad \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{hr} \frac{v_r - r}{v_\varphi} \quad (6.1)$$

с начальными данными: $\theta = 0, r = 0$.

В главных членах при $\theta \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 0$, имеем $v_r \approx (h-1)/\sqrt{h}, v_\varphi \approx -(h-1)\theta/h$.

Поэтому

$$dr/d\theta = -hr/\theta \quad (6.2)$$

т.е. согласно начальным данным при $\theta \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 0$ уравнение свободной границы: $\theta = 0$. При $\theta \rightarrow 0$ и конечных значениях r , согласно (5.7), асимптотику течения в окрестности свободной границы представим в виде

$$v_r = \cos\theta v_{r0}(r) + \theta^{h+1} v_{r1}(r) + \theta^{h+3} v_{r2}(r) + \dots$$

$$v_\varphi = \sin\theta v_{\varphi 0}(r) + \theta^h v_{\varphi 1}(r) + \theta^{h+2} v_{\varphi 2}(r) + \dots \quad (6.3)$$

$$f = \sin^2\theta f_0(r) + \theta^{h+1} f_1(r) + \theta^{h+3} f_2(r) + \dots$$

Для дальнейшего нам достаточно определить функции с индексами 0 и 1. Уравнения, определяющие функции с индексом 0, таковы:

$$(v_{r0} - r)v'_{r0} = 0, \quad (v_{r0} - r)v'_{\varphi 0} + \frac{1}{\sqrt{hr}} v_{\varphi 0}^2 + \frac{v_{r0} v_{\varphi 0}}{r} + \frac{h-1}{\sqrt{hr}} f_0 = 0$$

$$(v_{r0} - r)f'_0 + 2 \frac{v_{\varphi 0}}{\sqrt{hr}} f_0 + \frac{2}{h-1} \left(\frac{v_{r0}}{r} + v'_{r0} + \frac{v_{\varphi 0}}{\sqrt{hr}} \right) f_0 = 0 \quad (6.4)$$

при начальных данных

$$r = 0 \rightarrow v_{r0} = \frac{h-1}{\sqrt{h}}, \quad v_{\varphi 0} = -\frac{h-1}{h}, \quad f_0 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 \quad (6.5)$$

Очевидным решением этой задачи будут постоянные, соответствующие (6.5).

Систему уравнений, определяющих функции с индексом 1, с учетом полученных значений функций с индексом 0, запишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{h-1}{\sqrt{h}} - r\right) \frac{dv_{r1}}{dr} + \frac{h-1}{2} \frac{df_1}{dr} &= \frac{h^2-1}{h\sqrt{hr}} v_{r1} - \frac{(h-1)}{hr} v_{\varphi 1} \\ \left(\frac{h-1}{\sqrt{h}} - r\right) \frac{dv_{\varphi 1}}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{h-1}{h\sqrt{h}} v_{\varphi 1} - \frac{h^2-1}{2\sqrt{h}} f_1 \right) \\ \left(\frac{h-1}{\sqrt{h}} - r\right) \frac{df_1}{dr} &= \frac{1}{r\sqrt{h}} \left[\frac{-2(h-1)(2h-1)}{h^2} v_{\varphi 1} + \frac{(h-1)^2}{h} f_1 \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

при начальной асимптотике:

$$v_{\varphi 1} = C_1 r^2, \quad v_{r1} = \frac{3\sqrt{h}}{h+1} C_1 r^2, \quad f_1 = -\frac{4h-2}{h(h+1)} C_1 r^2 \quad (6.7)$$

Соответствующее решение этой системы выписывается явно

$$\begin{aligned} v_{r1} &= M^{\frac{h+1}{h}} \left[C_2 + \frac{h-1}{h} C_1 \int M^{3-1/h} r^{-3} \left(3 \frac{(h-1)^2}{\sqrt{h}(h+1)} + r \right) dr \right] \\ v_{\varphi 1} &= C M^2, \quad f_1 = -\frac{4h-2}{h(h+1)} v_{\varphi 1}, \quad M = \frac{r}{(h-1)/\sqrt{h} - r} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Оно согласуется с начальной асимптотикой (5.7), если положить $C = (h-1)^2 C_1/h$, а $C_2 = 0$. Таким образом, в окрестности свободной границы при $\theta \rightarrow 0$ и $r \rightarrow (h-1)/\sqrt{h}$ имеем

$$\begin{aligned} v_r &\approx \frac{h-1}{\sqrt{h}} \cos \theta + 2 \frac{(h-1)^3}{h(h+1)} C_1 r^2 \left(\frac{h-1}{\sqrt{h}} - r \right)^{-3} \theta^{h+1} + \dots \\ v_\varphi &\approx -\frac{h-1}{h} \sin \theta + \theta^h C_1 \left[\frac{(h-1)^2}{h} \frac{r^2}{[(h-1)/\sqrt{h} - r]^2} \right] + \dots \\ f &\approx \left(\frac{h-1}{h} \right)^2 \sin^2 \theta + \theta^{h+1} C_1 \left[\frac{(h-1)^2 (4h-2)}{h^2 (h+1)} \frac{r^2}{[(h-1)/\sqrt{h} - r]^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

7. Очевидно, точка $\theta = 0$, $r = (h-1)/\sqrt{h}$ является особой для решения (6.9), исходя из асимптотических формул (6.9) решение в окрестности этой особой точки при $h < 5$ представим в виде

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r1}(\psi), \quad v_\varphi = \theta v_{\varphi 1}(\psi), \quad f = \theta^2 F_1(\psi) \\ \psi &= \frac{\sqrt{h} |\theta|^{(h-1)/2}}{h-1-\sqrt{h}r} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Соответствующие уравнения для функций с индексом 1 выглядят так:

$$\begin{aligned} v'_{r1} &= 0; \quad (2 + v_{\varphi 1}) v'_{\varphi 1} \psi + \frac{h-1}{2} F'_1 \psi = -2 \left(\frac{v_{\varphi 1}^2}{h-1} + v_{\varphi 1} + F_1 \right) \\ (2 + v_{\varphi 1}) F'_1 \psi + \frac{2}{h-1} F_1 v'_{\varphi 1} \psi &= -2 \left(\frac{2h}{(h-1)^2} F_1 v_{\varphi 1} + \frac{2}{h-1} F_1 \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

а начальные асимптотики при $\psi \rightarrow 0$:

$$v_{r1} = \frac{h-1}{\sqrt{h}}, \quad v_{\varphi1} = -\frac{h-1}{h} + \frac{(h-1)^2}{h} C_1 \psi^2$$

$$F_1 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 - \frac{(4h-2)(h-1)^2}{h^2(h+1)} C_1 \psi^2 \quad (7.3)$$

В результате деления второго уравнения системы (7.2) на третье получается уравнение, с использованием решения которого можно свести решение системы (7.2), (7.3) к квадратурам. После замены

$$v_{\varphi1} = -\frac{h-1}{h} + W, \quad F_1 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 + \Phi$$

это уравнение и начальные данные для него запишутся в виде

$$\frac{d\Phi}{dW} = \frac{[4(2h-1)W + 2(h-1)h(W^2 - \Phi)][h^2\Phi + (h-1)^2]}{(h-1)h[-2(h-1) + (h^3 - 2h^2 + 3h)W + h^2W^2]W + (h-1)h^2(h^2 - 1 - hW)\Phi} \quad (7.4)$$

$$W = 0, \quad \Phi = 0$$

Уравнение (7.4) имеет шесть особых точек (W_i, Φ_i) ($i = 1, \dots, 6$). Для каждой точки определен характер особенности и согласно (7.2) соответствующее значение ψ_i и асимптотики $W_i(\psi)$, $\Phi_i(\psi)$ при $\psi \rightarrow \psi_i$.

Особая точка $W_1 = 0, \Phi_1 = 0$ совпадает с начальными данными. Характер особенности – седло, сепаратрисы которого

$$1a) \quad \Phi = \frac{2}{h} W, \quad 1b) \quad \Phi = -\frac{4h-2}{h(h+1)} W$$

Согласно (7.3) интегральная кривая уравнения (7.4) следует по сепаратрисе 1b, при этом соответствующее значение $\psi = \psi_1 = 0$ и асимптотика при $\psi \rightarrow \psi_1$: $W_1 \approx C\psi^2, \Phi \approx [h(h+1)]^{-1}(4h-2)C\psi^2$.

Особая точка $W_2 = -(h+1)/h, \Phi_2 = -[(h-1)/h]^2$ – седло, сепаратрисы которого

$$2a) \quad \Phi = \Phi_2, \quad 2b) \quad \Phi - \Phi_2 \approx 2(h-3)(h-1)^{-1}(W - W_2)$$

Соответствующее значение $\psi = \psi_2$ ($\psi_2 \neq 0$), асимптотики $W(\psi)$ и $\Phi(\psi)$ при $\psi \rightarrow \psi_2$ будут согласно сепаратрисе 2b):

$$W \approx W_2 + \frac{4(h+1)}{h-3} \ln \frac{\psi}{\psi_2}, \quad \Phi \approx \Phi_2 + \frac{8(h+1)}{(h-1)^2} \ln \frac{\psi}{\psi_2}$$

Кривая $\psi = \psi_2$ при $\theta \rightarrow 0$ представляет свободную границу, так как на ней выполнены соответствующие условия: $f(\psi_2) = 0$, и при $\theta \rightarrow 0$ совпадает с интегралом уравнения $dr/d\theta = \sqrt{hr}(v_r - r)v_\varphi^{-1}$, или в главных членах $d\psi/d\theta = (h-1)\psi(v_\varphi + 2)(2v_\varphi\theta)^{-1}$.

Действительно

$$f(\psi_2) = \theta^2 F_1(\psi_2) = \theta^2 \{[(h-1)/h]^2 + \Phi_2\} = 0$$

$$v_{\varphi1}(\psi_2) = -(h-1)/h + W_2 = -2$$

Особая точка $W_3 = (h-1)/h, \Phi_3 = -[(h-1)/h]^2$ – узел, отдельный ус которого $\Phi - \Phi_3 = 2(3-h)(h-1)^{-1}(W - W_3)$, а кривые общего направления определяются асимп-

ТОТИКОЙ

$$W - W_3 \approx C(\Phi - \Phi_3)^{(h-1)/2} + \frac{h-1}{2(3-h)}(\Phi - \Phi_3) \quad (7.5)$$

При $h < 3$ этой точке соответствует $|\psi| = \infty$ при асимптотике $W \approx W_3 + C/\psi$.

Особая точка $W_4 = -(h-1)^2/h$, $\Phi_4 = -[(h-1)/h]^2$ – узел, отдельный ус которого $\Phi - \Phi_4 = [(h-3)/2](W - W_4)$, а асимптотика кривых общего направления:

$$W - W_4 \approx C(\Phi - \Phi_4)^{1/2} + [2/(h-3)](\Phi - \Phi_4)$$

Этой точке соответствует значение $\psi = 0$ при $h < 3$ и $|\psi| = \infty$ при $h > 3$. При этом $W - W_4 \approx C|\psi|^{2/(3-h)}$.

Особая точка $W_5 = -2(h-1)/[h(h-2)]$, $\Phi_5 = -4(h^2 - 3h + 1)/[h(h-2)]^2$ – узел, отдельный ус которого $\Phi - \Phi_5 \approx 2(h-3)[(h-1)(h-2)^2]^{-1}(W - W_5)$, а интегральные кривые общего направления касаются прямой

$$\Phi - \Phi_5 \approx 2(h-3)[(h-1)(h-2)]^{-1}(W - W_5).$$

При подходе интегральных кривых по общему направлению этой точке соответствует значение $\psi = \psi_5 \neq 0$ при асимптотике

$$W - W_5 \approx \frac{2}{h-2} \ln \frac{\psi}{\psi_5}$$

Линия $\psi = \psi_5$ при $2 < h < 3$ в главном порядке при $\theta \rightarrow 0$ и $r \rightarrow (h-1)/\sqrt{h}$ совпадает с характеристикой, которая при этом определяется уравнением

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{(h-1)\psi}{\theta} \left[\frac{\sqrt{h}M \pm \sqrt{F_1[(h-1-\sqrt{hr})^2 - h\theta^2]N}}{[\sqrt{hr} - (h-1)]N} - \frac{1}{2} \right] \quad (7.6)$$

$$M = v_{\varphi 1}[(h-1)/\sqrt{h} - r], \quad N = F_1 - v_{\varphi 1}^2$$

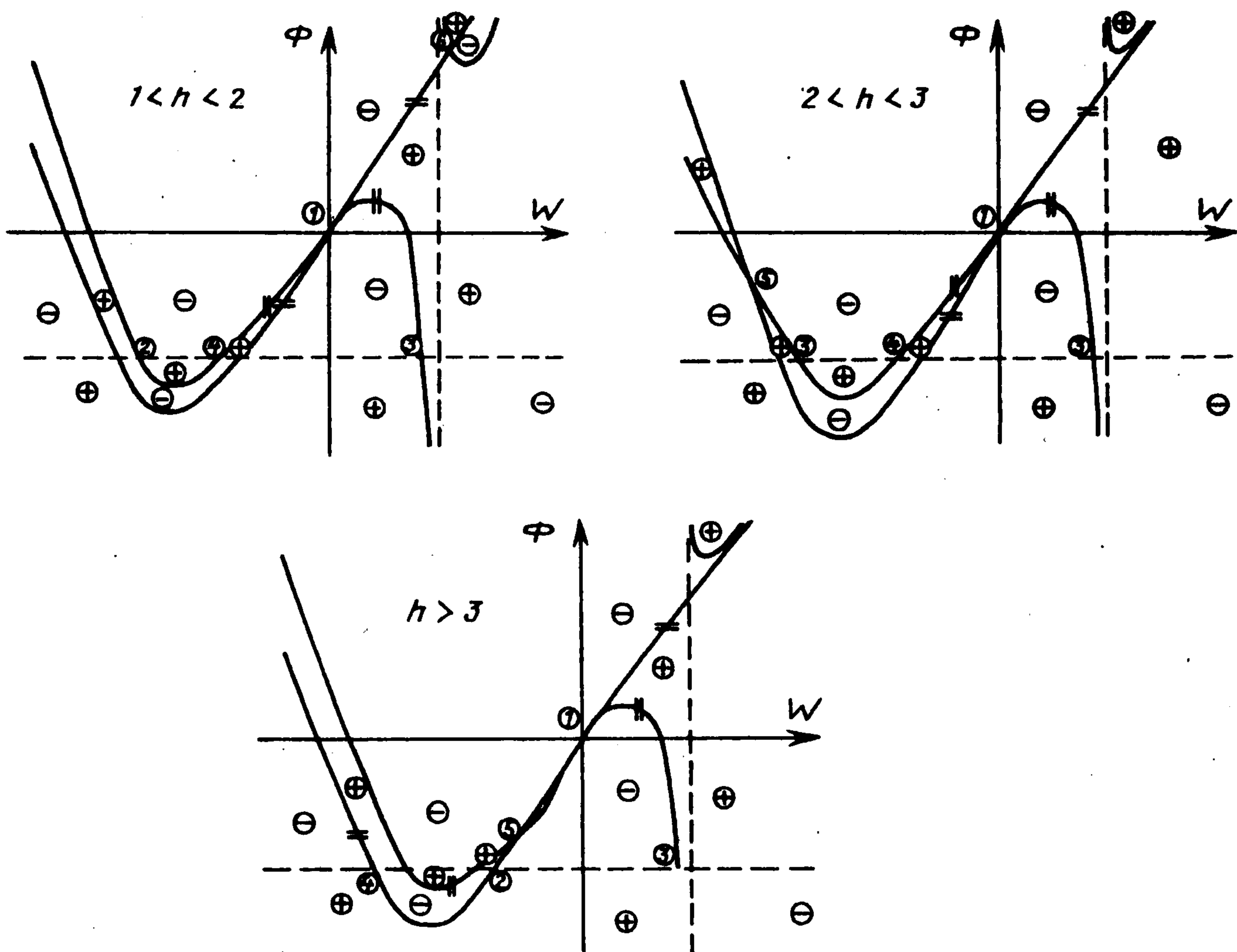
Так как при конечных значениях ψ разность $(h-1)/\sqrt{h} - r \approx \theta^{(h-1)/2}$, то при $h < 3$ уравнение (7.6) асимптотически приобретает вид

$$\frac{d\psi}{d\theta} \approx \frac{h-1}{2} \frac{\psi}{\theta} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{F} \pm v_{\varphi 1}} \right)$$

В силу приведенных ранее асимптотик это уравнение переписывается в виде: $d\psi/d\theta \approx h(\psi - \psi_5)/[(h-2)\theta]$, т.е. $\psi = \psi_5 + A\theta^{h/(h-2)}$, где A – постоянная, зависящая от параметра h .

Особая точка $|W_6| = \infty$, $\Phi_6 = \infty$ – узел. Асимптотика кривых общего направления имеет вид $\Phi \approx CW^2$, а соответствующее значение $\psi = \psi_6 = -0$ при асимптотике $W \approx A|\psi|^{2/(h-1)}$, $\Phi \approx CA^2|\psi|^{4/(h-1)}$. При этом $v_{\varphi} \approx (h-1)/\sqrt{h} - r$, $f \approx [(h-1)/\sqrt{h} - r]^2$ и линия $\psi = 0$ соответствует характеристике, что следует из асимптотического вида уравнения характеристик в данном случае: $d\psi/d\theta \approx (h-1)\psi/(2\theta)$, т.е. $\psi \approx B|\theta|^{(h-1)/2}$, где B – постоянная, зависящая от параметра h .

Из схемы изоклин (фигура) и приведенных выше значений переменной ψ в соответствующих особых точках определяется ход интегральной кривой (знаки плюс и минус на схемах соответствуют знаку производной $d\Phi/dW$ в области, ограниченной



Фиг.

изоклинами нуля и бесконечности; горизонтальные штриховые прямые соответствуют $A = -[(h-1)/h]^2$, вертикальные – значению $W = (h^2-1)/h$. При этом следует учесть, что интегральная кривая (ИК) в конечном счете должна попасть в точку, соответствующую свободной границе, т.е. в особую точку W_2, Φ_2 .

При $h < 3$ искомая ИК, выходя из первой особой точки, соответствующей $\psi = +0$, проходит в точку W_3, Φ_3 , соответствующую значению $\psi = \pm\infty$, касаясь линии $\Phi = -[(h-1)/h]^2$, после чего следует в бесконечно удаленную точку $W_6 = \pm\infty, \Phi_6 = \infty$. Дальнейшее ее движение зависит от того, будет ли $h < 2$, либо $h > 2$.

Схема 1: $1 < h < 2$. В бесконечно удаленной точке, меняя направление, что возможно, так как соответствующее ей значение $\psi = -0$ в главном члене совпадает с уравнением характеристики, приходит в седловую точку W_2, Φ_2 по ее сепаратрисе.

Схема 2: $2 < h < 3$. Учитывая, что ИК при $W = -\infty, \Phi = \infty$ проходит левее изоклин нуля и бесконечности уравнения (7.4), заключаем, что при ее продолжении $W > -\infty$, она попадает по общему направлению в узловую точку W_5, Φ_5 , после чего, меняя направление, приходит в седловую точку W_2, Φ_2 . Смена направления возможна, так как точке W_5, Φ_5 соответствует линия $\psi = \psi_5$, уравнение которой в главных членах совпадает с уравнением характеристики.

Таким образом, при $h < 3$ движение ИК завершается на линии $\psi = \psi_2$.

Схема 3: $h > 3$. В этом случае в окрестности особой точки W_3, Φ_3 решение (7.5) в главных членах представляется в виде

$$W = \frac{h-1}{2(3-h)} \Phi \quad (7.7)$$

т.е. продолжение ИК уравнения (7.4) при $W > W_3$ привело бы к отрицательным значениям $F(\psi)$, а следовательно, $f(\psi)$, что противоречиво. Поэтому при $h > 3$ ИК уравнения (7.6) выходит из соответствующей начальным значениям особой точки W_1, Φ_1 по сепаратрисе $1в$ в направлении $\Phi > 0$, т.е. в сторону отрицательных значений переменной ψ . При этом сепаратриса, согласно

схеме изоклин 3, пересекает изоклину нуля, затем изоклину бесконечности и в результате попадает в узел, соответствующий особой точке W_4, Φ_4 , по общему направлению. В этой точке $v_{\varphi 1} = -(h-1)$ и $F_1 = 0$, причем $d\Phi/dW = 0$, соответствующее значение $\psi = -\infty$, $v_{\varphi 1} \approx |\psi|^{2/(3-h)}$, $F_1 \approx |\psi|^{4/(3-h)}$. Следовательно, производные всех порядков по ψ от функций $v_{\varphi 1}$ и F_1 в этой точке обращаются в нуль, в силу чего допустимо дальнейшее движение ИК по линии $F_1 = [(h-1)/h]^2 + \Phi = 0$, являющейся интегралом уравнения (7.4), до особой точки W_2, Φ_2 . Таким образом, уравнение свободной границы при всех значениях $1 < h < 5$ ($3/2 < \gamma < \infty$) в окрестности точки ($\theta = 0, r = (h-1)/\sqrt{h}$) представляется в виде

$$r \approx \frac{h-1}{\sqrt{h}} - \frac{(-\theta)^{(h-1)/2}}{\psi_2} \quad (7.8)$$

т.е. отклоняется от линии $\theta = 0$.

Отметим, что линия $\psi = -\infty$ также удовлетворяет условиям свободной границы. Однако возможность дальнейшего продвижения ИК до особой точки W_2, Φ_2 и непрерывность ожидаемых результатов по параметру h , дает основание считать, что свободная граница при $h > 3$ определяется уравнением (7.8).

Работа выполнена по предложению А.Н. Крайко. С ним же были обсуждены предварительные результаты, что привело к их частичной корректировке. Рукопись оформлена М.С. Гавреевой и Е.А. Забродиной. Графические построения выполнены А.В. Севериным. Всем этим лицам автор выражает свою глубокую признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
2. Сучков В.А. Истечение в вакуум на косой стенке // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 739–740.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Истечение идеального газа в вакуум // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. N 4. С. 817–820.
4. Крайко А.Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 70–80.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
6. Каждан Я.М. О движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 916–928.
7. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1995