

УДК 533.6

© 1996 г. С.П. Баутин, А.Л. Казаков

### ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ, РАСХОДЯЩИМИСЯ ОТ ОСИ ИЛИ ЦЕНТРА СИММЕТРИИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ

Исследуются цилиндрически и сферически симметричные нестационарные течения идеального газа. В пространстве независимых переменных  $\zeta = t/r$ ,  $\chi = r$  рассмотрена задача Коши с данными при  $\zeta = 0$ . Доказано существование и единственность аналитического решения этой задачи. В пространстве переменных  $t$ ,  $r$  рассмотрена задача Коши с начальными данными на разных поверхностях: при  $r = 0$  задана нулевая скорость газа; на неизвестном фронте ударной волны (УВ), расходящемся с конечной скоростью от оси или центра симметрии, выполняются условия Гюгоньо. Также доказано существование и единственность аналитического решения этой задачи, в том числе, однозначно определяется закон движения расходящейся УВ. Решены две задачи о фокусировании газа и о последующем отражении с конечной скоростью УВ: 1) фокусируется волна сжатия, вызванная плавным движением поршня в покоящийся газ; 2) фокусируется волна разрежения, возникающая при схлопывании одномерной полости. Решения этих задач представляет собой обобщение на случай двух независимых переменных автомодельных решений Л.И. Седова [1–3]. Кроме этого решение второй задачи продолжает математическое исследование процесса схлопывания одномерной полости [4, 5].

В классе автомодельных течений, зависящих от одной независимой переменной  $\lambda = r/t$ , известны [1–3] решения, описывающие фокусировку волны сжатия, вызванную плавным движением поршня в однородный покоящийся газ, а также описывающие [1] фокусировку в вакууме с конечной скоростью волны разрежения. После фокусировки слабого разрыва или свободной границы от центра или оси симметрии расходится с конечной постоянной скоростью отраженная УВ, за которой сжатый газ покоится. С помощью характеристической задачи Коши [6] в некоторой окрестности точки  $(t = t_0, r = r_0)$   $r_0 > 0$  решены неавтомодельные задачи о поршне, плавно вдвигающемся в газ из точки  $r = r_0$  [7] и задача о схлопывании одномерной полости [4, 5]. В классе автомодельных течений, зависящих от одной переменной  $\xi = t/r^k$ ,  $1 < k < 2$ , были построены [8, 9] течения с отраженными от точки  $r = 0$  УВ, скорость которых переменна и в точке  $r = 0$  равна бесконечности. Доказаны [10, 11] существование и единственность кусочно-аналитических решений в задаче об отражении пространственной УВ от криволинейной стенки и в задаче о взаимодействии криволинейных фронтов УВ. В этих двух задачах необходимо исследовать задачи Коши с начальными данными, одновременно поставленными на разных поверхностях [12–14].

**1. Постановка задач.** Рассмотрим систему уравнений газовой динамики [15, 16] для идеального политропного газа с уравнением состояния  $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$ ;  $p$  – давление,  $S$  – энтропия (далее за  $s$  обозначена функция  $A(S)$ ),  $\rho$  – плотность,  $\gamma = \text{const} > 1$  – показатель политропы газа. Будут исследоваться цилиндрически ( $\nu = 1$ ) или сферически ( $\nu = 2$ ) симметричные течения, зависящие от времени  $t$  и расстояния  $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{\nu+1}^2)^{1/2}$  ( $x_1, x_2, x_3$  – пространственные координаты). В качестве

искомых функций  $U = U(t, r)$  возьмем [5]  $U = (\sigma, u, s)$  ( $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$ ,  $u$  – скорость газа). Скорость звука в газе тогда задается соотношением  $c = \sigma s$ , а система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{\gamma-1}{2}\sigma\left(u_r + v\frac{u}{r}\right) &= 0 \\ u_t + \frac{2}{\gamma-1}\sigma s^2\sigma_r + uu_r + \frac{2}{\gamma}\sigma^2ss_r &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$s_t + us_r = 0$$

Будем искать кусочно-аналитические решения системы (1.1) для двух следующих задач: 1) о плавном движении поршня в газ, который порождает фокусирующуюся волну сжатия, 2) о схлопывании одномерной полости. Конфигурация соответствующих течений в плоскости переменных  $t, r$  приведена на фиг. 1.

В первой задаче в момент  $t = t_0$  при  $0 \leq r \leq r_0$  однородный газ покоится и в него из точки  $A$  ( $t = t_0, r = r_0$ ) начинает плавно двигаться непроницаемый поршень (линия АВ на фиг. 1 – траектория движения поршня). По однородному покоящемуся в области  $\Omega_0$  газу с постоянной скоростью  $-c_0$  ( $c_0$  – скорость звука в газе в области  $\Omega_0$ ) начинает распространяться звуковая характеристика (прямая АО на фиг. 1), отделяющая область волны сжатия  $\Omega_1$  от области покоя  $\Omega_0$ . Момент фокусировки характеристики АО берется за  $t = 0$ . При аналитическом законе движения поршня в некоторой окрестности точки А в области  $\Omega_1$  существует единственное аналитическое решение задачи о поршне [6, 7], которое соответствует изэнтропическому течению. Вне этой окрестности в области  $\Omega_1$  могут возникнуть особенности типа градиентной катастрофы.

Если закон движения поршня выбрать специальным образом, то течение в области  $\Omega_1$  будет автомодельным. Точнее [1–3]: для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), описывающей автомодельные течения  $U = U(\lambda)$ , строится конкретная интегральная кривая, проходящая через соответствующие особые точки. Тем самым в области  $\Omega_1$  выбирается конкретная волна сжатия. По ней однозначно восстанавливаются линии АО, АВ, ОС – траектория движения отраженной УВ (см. фиг. 1). Для этих автомодельных течений траектория ОС будет прямой, а в области  $\Omega_2$  между отраженной УВ ОС и осью  $r = 0$  сжатый газ снова покоится и является однородным. В области  $\Omega_1$  параметры газа постоянны на прямых  $\lambda = \text{const}$ , в том числе  $\sigma(0, r) = \text{const} > 0$ ,  $u(0, r) = \text{const} < 0$ . Ясно, что автомодельными течениями  $U = U(\lambda)$  не передать в момент  $t = 0$  произвольные профили газодинамических параметров:

$$\sigma(0, r) = \sigma_0(r), \quad \sigma_0(0) > 0, \quad u(0, r) = u_0(r), \quad u_0(0) < 0$$

Если предположить, что при произвольных  $\sigma_0(r), u_0(0)$  в области  $\Omega_1$  при  $t \geq 0$  существует решение системы (1.1), то отраженная УВ ОС уже не будет прямой, а для течения газа в области  $\Omega_2$  уже не будут постоянными  $\sigma, u, s$ .

Во второй задаче (о схлопывании одномерной полости [4, 5]) в момент  $t = t_0$  при  $0 \leq r \leq r_0$  (фиг. 1) – вакуум, а при  $r \geq r_0$  – заданы распределения газодинамических параметров такие, что  $c(t_0, r_0) > 0$ . При этом величина  $s(t_0, r)$  может быть и не постоянной. В момент  $t = t_0$  стенка  $r = r_0$  мгновенно убирается и при  $t > t_0$  начинается истечение газа в вакуум в направлении оси или центра симметрии.

Было установлено [4, 5], что в некоторой окрестности точки А существует единственное решение поставленной задачи о распаде такого разрыва и это решение некоторое время при  $t > t_0$  является аналитическим. Для  $\gamma < 3$  доказано, что свободная граница, отделяющая область вакуума  $\Omega_0$  от области фокусирующейся волны

разрежения  $\Omega_1$  (фиг. 1), некоторое время движется с постоянной скоростью, равной  $u(t_0, r_0) - 2c(t_0, r_0)/(\gamma - 1)$ . Кроме того, доказано, что при  $\gamma \leq \gamma_* = 1 + 2/(\nu + 1)$  свободная граница вплоть до момента фокусировки имеет эту постоянную скорость движения. Далее за момент  $t = 0$  выбран момент фокусировки свободной границы в центре или на ось симметрии. На фиг. 1 свободной границе соответствует прямая АО.

Автомодельные решения  $U(\lambda)$  также описывают [1] процесс фокусировки волны разрежения, у которой постоянна скорость движения свободной границы. Распределения газодинамических параметров в фиксированный момент времени являются специальными и однозначно определяются выбором конкретного автомодельного течения  $U(\lambda)$ . Поскольку во всех перечисленных течениях в момент фокусировки волны разрежения скорость газа в точке  $r = 0$  конечна и строго отрицательна, то можно предположить, что при  $t \geq 0$  от центра или оси симметрии с конечной скоростью отразится УВ ОС (фиг. 1), которая будет отделять течение в  $\Omega_1$  от течения в  $\Omega_2$  между ОС и осью  $r = 0$ . В общем случае течения в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  неизэнтропические.

Цель данной работы следующая. Сначала исходя из произвольных начальных условий  $U(0, r) = U_0(r)$ :

$$\begin{aligned} \sigma(0, r) &= \sigma_0(r), & \sigma_0(0) &> 0 \\ u(0, r) &= u_0(r), & u_0(0) &< 0 \\ s(0, r) &= s_0(r), & s_0(0) &< 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

необходимо построить решение системы (1.1) в области  $\Omega_1$  и увязать его с задачей о фокусировке либо волны сжатия (первая задача), либо волны разрежения (вторая задача). Потом в области  $\Omega_2$  необходимо построить другое решение системы (1.1), у которого  $u(t, 0) = 0$ . Одновременно с построением решения в  $\Omega_2$  необходимо построить неизвестную УВ ОС, на которой построенное в  $\Omega_1$  и искомое в  $\Omega_2$  течения связаны соотношениями Гюгонио [15, 16].

**2. Построение решений в области  $\Omega_1$ .** Если данные (1.2) в некоторой окрестности точки  $r = 0$  являются аналитическими функциями, то решение задачи Коши (1.1), (1.2) однозначно строится в виде формального степенного ряда

$$U(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k(r)t^k}{k!}$$

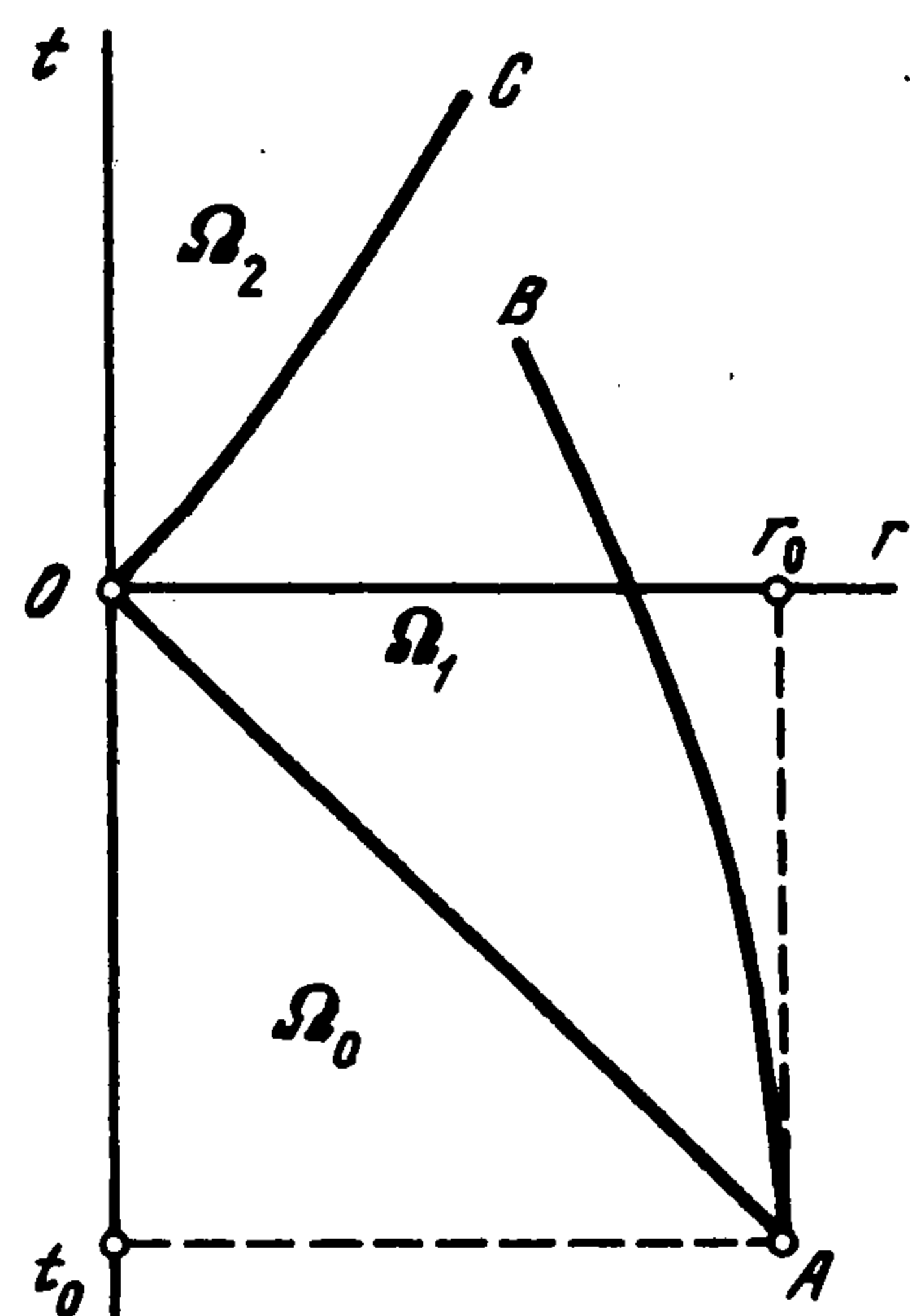
При этом индукцией по  $k$  устанавливается, что  $U_k(r) = U_{k0}(r)/r^k$   $k \geq 1$ . Функции  $U_{k0}(r)$  — аналитические в той же окрестности точки  $r = 0$ , что и функции  $U_0(r)$  из (1.2). Следовательно, решение задачи (1.1), (1.2) однозначно представлено в виде формального ряда

$$U(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k0}(r) \frac{(t/r)^k}{k!} \quad (2.1)$$

где  $U_{00}(r) = U_0(r)$ . Чтобы исследовать область сходимости (а следовательно, и область применимости) ряда (2.1), в системе (1.1) делается замена переменных

$$\zeta = t/r, \quad \chi = r \quad (2.2)$$

с якобианом  $J = 1/r$ . Замена (2.2) является вырожденной при  $r = 0$  (для исследования



Фиг. 1

различных особенностей решений системы уравнений газовой динамики часто применяются вырожденные замены переменных (см., например, [4, 5, 7, 17, 18]).

Система (1.1) в переменных  $\zeta, \chi$  запишется в виде

$$(1 - \zeta u) \sigma_\zeta - \frac{\gamma - 1}{2} \zeta \sigma u_\zeta + \chi \left[ u \sigma_\chi + \frac{\gamma - 1}{2} \sigma u_\chi \right] + \nu \frac{\gamma - 1}{2} \sigma u = 0$$

$$-\frac{2}{\gamma - 1} \zeta \sigma s^2 \sigma_\zeta + (1 - \zeta u) u_\zeta - \frac{2}{\gamma} \zeta \sigma^2 s s_\zeta + \chi \left[ \frac{2}{\gamma - 1} \sigma s^2 \sigma_\chi + u u_\chi + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_\chi \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$(1 - \zeta u) s_\zeta + \chi u s_\chi = 0$$

Если в системе (2.3) положить  $\partial/\partial\chi = 0$ , то получится СОДУ, эквивалентная соответствующей СОДУ из [1-3] и описывающая автомодельные течения, которые зависят только от  $\zeta$ .

Из вида замены (2.2) следует, что момент  $t = 0$  соответствует линии  $\zeta = 0$ , а начальные условия (1.2) переходят в начальные условия

$$U(\zeta, \chi)|_{\zeta=0} = U_0(\chi) \quad (2.4)$$

*Теорема 1.* Если  $U_0(\chi)$  – функции аналитические в некоторой окрестности точки  $\chi = 0$ , то задача Коши (2.3), (2.4) имеет в некоторой окрестности точки  $\chi = 0$  единственное аналитическое решение

$$U(\zeta, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k1}(\chi) \frac{\zeta^k}{k!}, \quad U_{01}(\chi) = U_0(\chi) \quad (2.5)$$

При этом, если  $s_0(\chi) = s_0(0) = \text{const}$ , то  $s(\zeta, \chi) = s_0(0)$ .

Эта теорема есть следствие теоремы Коши – Ковалевской.

Чтобы найти на оси  $O\zeta$  граничные точки области сходимости ряда (2.5), представим решение задачи (2.3), (2.4) в виде

$$U(\zeta, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k2}(\zeta) \frac{\chi^k}{k!}. \quad (2.6)$$

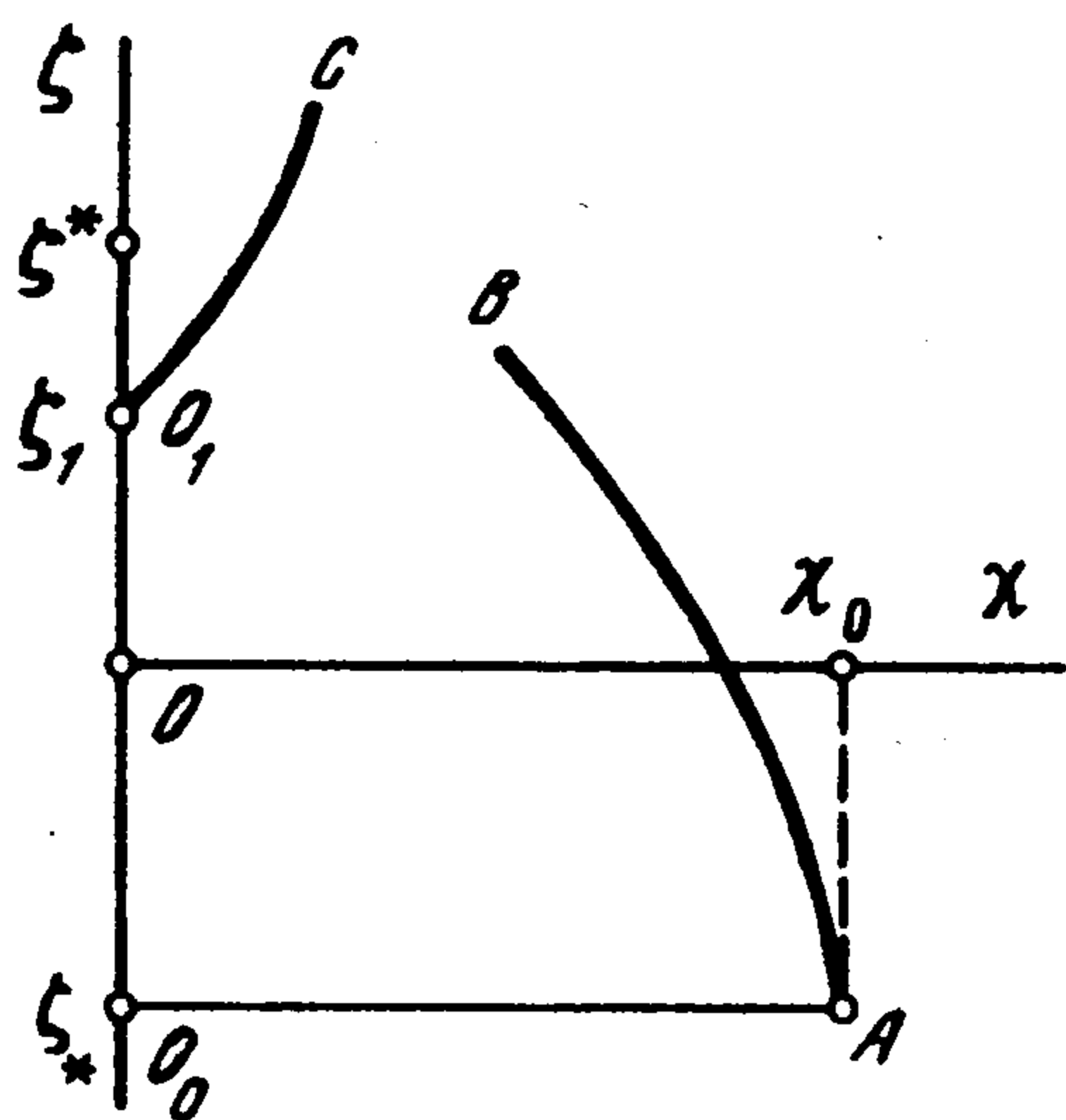
Тогда  $U_{02}(\chi)$  является решением задачи Коши, которая получится, если в задаче (2.3), (2.4) положить  $\chi = 0$  (задача А). Из-за вырожденности преобразования (2.2) система (2.3) при  $\chi = 0$  принимает тот же вид, что и при  $\partial/\partial\chi = 0$ , т.е. СОДУ из задачи А эквивалентна СОДУ, описывающей [1-3] автомодельные решения  $U(t, r) = U(r/t)$  системы уравнений газовой динамики.

В решении задачи А  $s_{02}(\zeta) = s_0(0) = \text{const}$ , а функции  $\sigma_{02}(\zeta), u_{02}(\zeta)$  в общем случае через квадратуры не выписываются [1]. Однако у этой СОДУ решения и все их особенности известны [1]. В том числе, известны  $\zeta = \zeta_* < 0$  и  $\zeta = \zeta^* > 0$  – граничные точки области существования аналитического решения задачи А.

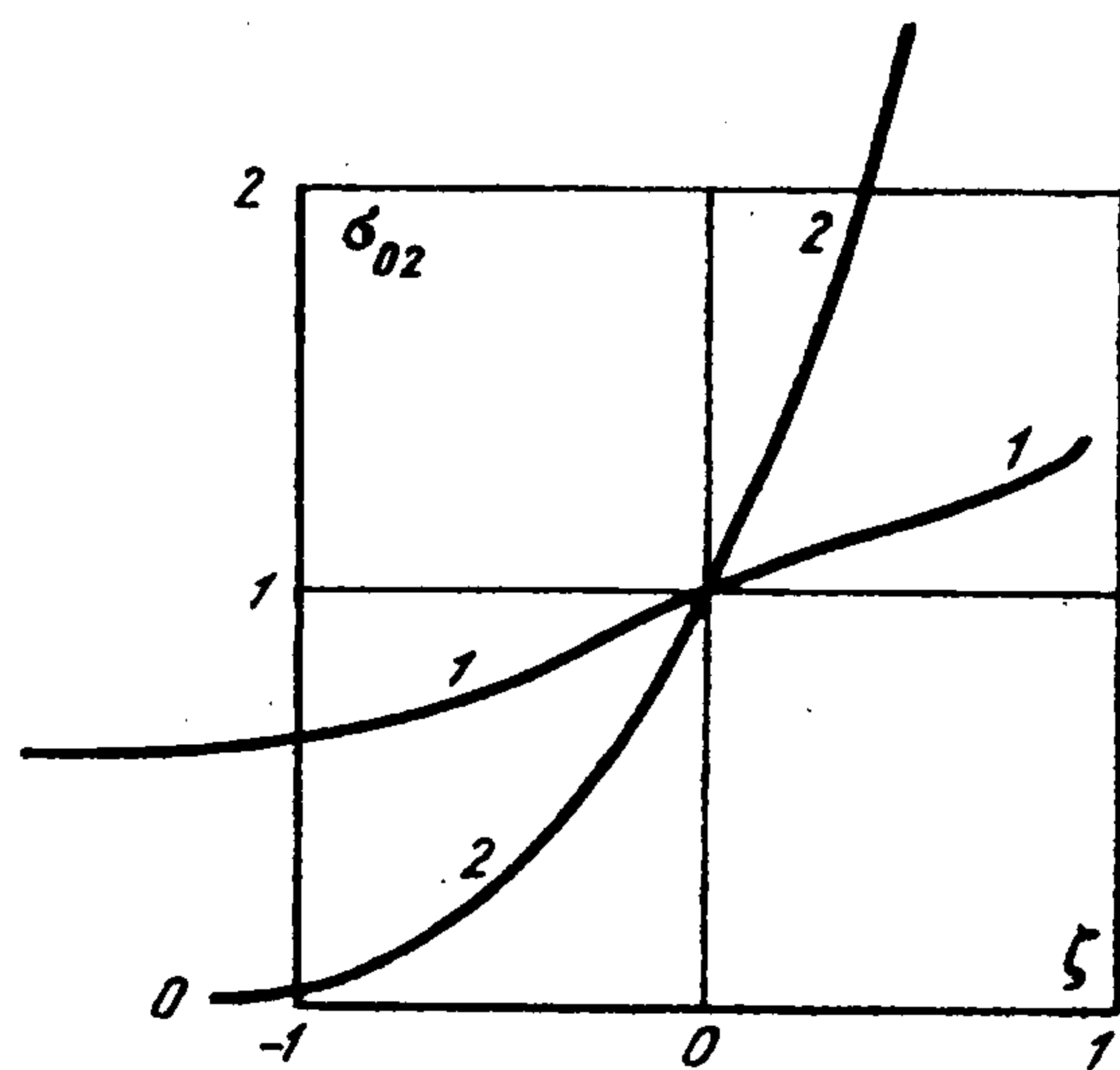
При этом в случае фокусировки волны сжатия значение  $\zeta = \zeta_*$  (прямая  $AO_0$  на фиг. 2) соответствует звуковой характеристике  $AO$  с фиг. 1:  $\sigma(\zeta_*, \chi) = \text{const} > 0$ ,  $u(\zeta_*, \chi) = 0$ ,  $\sigma(\zeta_*, \chi) s_0(0) = -1/\zeta_*$ . В случае фокусировки волны разрежения значение  $\zeta = \zeta_*$  ( $AO_0$  на фиг. 2) соответствует свободной границе ( $AO$  на фиг. 1):  $\sigma(\zeta_*, \chi) = 0$ ,  $u(\zeta_*, \chi) = \text{const} = 1/\zeta_*$ .

Значение  $\zeta = \zeta^*$  в обеих рассматриваемых задачах оказывается больше, чем значение  $\zeta = \zeta_1$ :  $\zeta^* > \zeta_1 > 0$ , где  $1/\zeta_1$  – скорость отраженной УВ  $OC$  в случае автомодельных течений (метод определения  $\zeta = \zeta_1$  описан ниже).

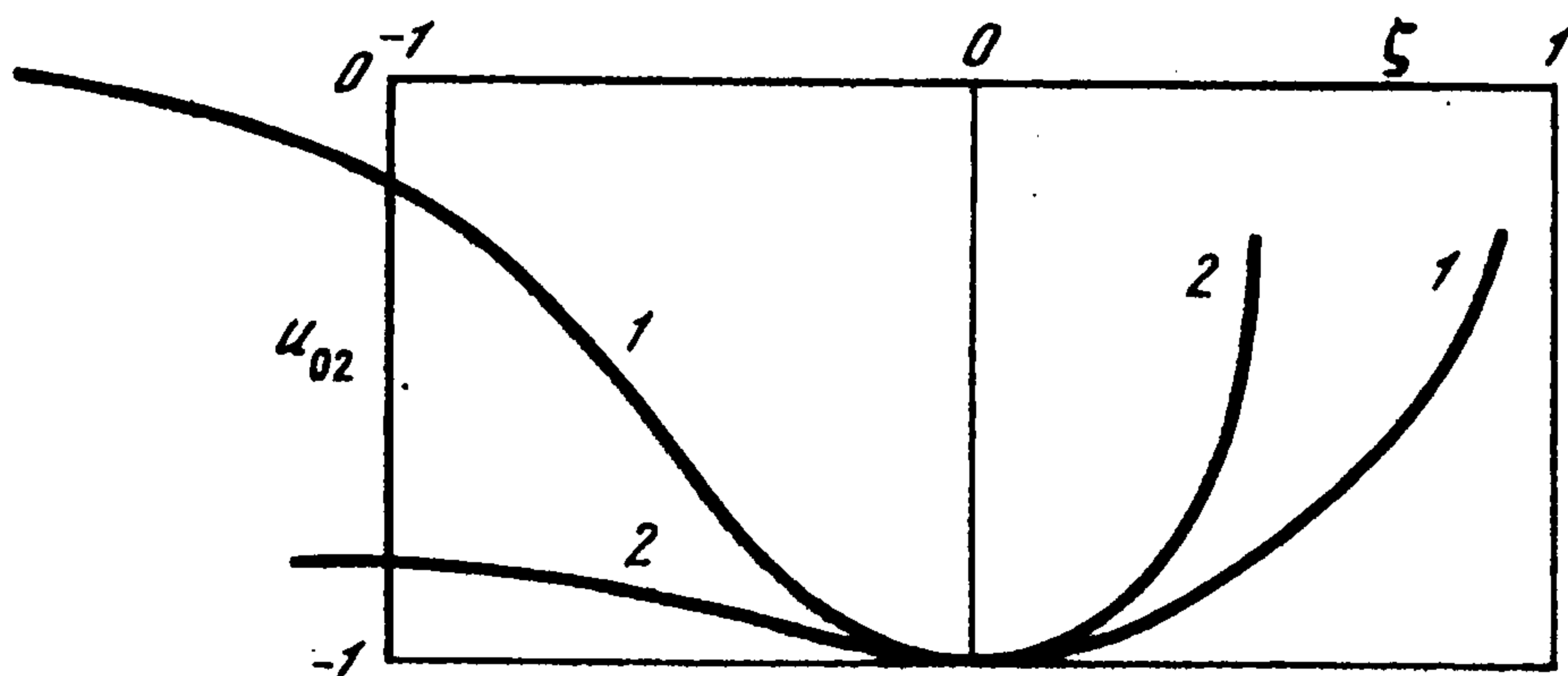
На фиг. 3, 4 приведены интегральные кривые задачи А в случае  $\nu = 2, \gamma = 1,4$  (линии 1) и  $\nu = 2, \gamma = 3$  (линии 2).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Чтобы построить остальные  $U_{k2}(\zeta)$ , надо задачу (2.3), (2.4) последовательно дифференцировать по  $\chi$  и полагать  $\chi = 0$ . В результате будут получаться линейные СОДУ для  $U_{k2}(\zeta)$  с начальными условиями:  $U_{k2}(0) = \partial^k U_0(\chi) / \partial \chi^k |_{\chi=0}$ . При решении этих задач Коши однозначно определяется все  $U_{k2}(\zeta)$ . Построенный таким образом ряд (2.6) есть переразложение ряда (2.5), решающего задачу (2.3), (2.4). Поскольку СОДУ, из которых определяются  $U_{k2}(\zeta)$   $k \geq 1$ , являются линейными, то при  $\zeta_* < \zeta < \zeta^*$  у  $U_{k2}(\zeta)$  особенностей нет. Тогда методикой, изложенной в [4, 5], доказываем, что граничными по оси  $O\zeta$  точками области сходимости ряда (2.6) (а следовательно, и ряда (2.5)) являются точки  $\zeta = \zeta_*$  и  $\zeta = \zeta^*$ .

Решение задачи А не является постоянным, и из этого следует, что в пространстве переменных  $t, r$  в области  $\Omega_1$  вектор-функции  $U(t, r)$  на разных прямых  $t/r = \text{const}$  принимает разные значения в точке  $(t = 0, r = 0)$ . Поэтому и возникает вопрос о выборе значений газодинамических параметров в точке  $(t = 0, r = 0)$  для расчета скорости движения отраженной УВ в момент  $t = 0$ . Будем считать, что траектория отраженной у.в. (линия ОС на фиг. 1) задается уравнением  $r = \varphi(t)$ , и тогда скорость движения УВ  $D(t) = \varphi'(t)$ . Надо подобрать значение  $\zeta_1$ , чтобы величина  $1/\zeta_1$  задавала бы значение  $D(0)$ . Для функции  $D(t)$  из условий Гюгонио [16] следует соотношение

$$D = \frac{3-\gamma}{4} u_0 + \left[ \frac{(\gamma+1)^2}{16} u_0^2 + c_0^2 \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

при выводе которого параметры газа перед УВ помечены индексом нуль, а скорость газа за УВ предполагается равной нулю. Следовательно, искомое значение  $\zeta_1$  должно удовлетворять соотношению  $1/\zeta_1 = y(\zeta_1)$ , где  $y(\zeta)$  – правая часть соотношения (2.7), в котором вместо  $u_0, c_0$  надо подставить соответственно  $u_{02}(\zeta), \sigma_{02}(\zeta) s_{02}(\zeta)$ . Отсюда при заданном решении задачи А величина  $\zeta_1$  определяется однозначно. Описанная про-

цедура эквивалентна определению параметров газа за отраженной УВ ОС при построении решений в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в классе автомодельных течений [1–3].

По заданной аналитической  $r = \varphi(t)$  в пространстве переменных  $\zeta, \chi$  однозначно определяется аналитическая кривая  $\zeta = \varphi_1(\chi)$ , проходящая через точку  $O_1$  ( $\zeta = \zeta_1, \chi = 0$ ) (линия  $O_1C$  на фиг. 2). Тогда параметры газа перед у.в.  $r = \varphi(t)$  – решение задачи (2.3), (2.4) на линии  $\zeta = \varphi_1(\chi)$  – являются аналитическими функциями от одной переменной (или от  $r$ , или от  $t$ ).

**3. Построение решения в области  $\Omega_2$  и закона движения отраженной УВ.** По формулам

$$r = \varphi(\eta), \quad t = \theta + \eta \quad (3.1)$$

заменяем  $r, t$  на независимые переменные  $\eta, \theta$ . Якобиан преобразования  $J = \varphi'(\eta)$ . Здесь функция  $r = \varphi(t)$  пока неизвестна и задает траекторию движения отраженной УВ. При этой замене ось  $r = 0$  переходит в ось  $\eta = 0$ ; УВ – линия ОС – переходит в другую координатную ось  $\theta = 0$ .

Запишем условия Гюгонио [16] на УВ (т.е. на оси  $\theta = 0$ ) в эквивалентном виде для  $u, s, D$  через  $U_1$  и  $l$

$$u(\theta, \eta)|_{\theta=0} = \left[ u_1 + \frac{2}{\gamma+1} \sigma_1 s_1 \left( M - \frac{1}{M} \right) \right]_{\theta=0}$$

$$s(\theta, \eta)|_{\theta=0} = [s_1 R(M)]_{\theta=0}, \quad D|_{\theta=0} = (M \sigma_1 s_1 + u_1)|_{\theta=0}$$

$$R(M) = \{ [(1+h)M^2 - h][(1-h) + hM^2]^\gamma \}^{1/2} M^{-\gamma}$$

$$U_{00} = U_1|_{\zeta=\zeta_1, \chi=0}, \quad l = \frac{2}{(\gamma-1)} s_{00} \sigma + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00} s, \quad h = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Здесь  $U$  – решение в области  $\Omega_2$ ,  $U_1$  – решение в области  $\Omega_1$ , величина  $M$  как функция от  $\sigma_1, s_1, l$  определяется из соотношения

$$\frac{2s_{00}}{\gamma-1} \{ M[(1-h) + hM^2]^{-1/2} \}^{\gamma-1} \sigma_1 + \frac{2}{\gamma} \sigma_{00} s_1 R(M) = l$$

Функция  $M = M(\sigma_1, s_1, l)$  по теореме о неявной функции существует и является аналитической в некоторой окрестности точки  $(\sigma_1 = \sigma_{00}, s_1 = s_{00}, l = l^{00})$ . Здесь вектор  $U^{00} = U(\theta, \eta)|_{\theta=\eta=0}$  известен, поскольку известны  $D(0)$  и  $U_{00}$ .

Условия для  $u|_{\theta=0}$  перепишем в виде

$$u(\theta, \eta)|_{\theta=0} = [\beta l + q_1(U_1, l)]_{\theta=0}; \quad \beta = \text{const} > 0, \quad \partial q_1 / \partial l|_{\theta=0, \eta=0} = 0$$

а правые части соотношений для  $s|_{\theta=0}, D|_{\theta=0}$  обозначим соответственно  $s^*, D^*$ .

Вместо неизвестных функций  $U$  введем новые неизвестные функции

$$u' = u, \quad v = u - \beta l - q_1, \quad z = s - s^* \quad (3.2)$$

Тогда условия Гюгонио эквивалентны соотношениям

$$u(\theta, \eta)|_{\theta=0} = 0, \quad z(\theta, \eta)|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi_\eta = D^*$$

Последнее из них является дифференциальным уравнением для определения неизвестной траектории движения УВ.

Для неизвестных функций  $u', \varphi$  начальные данные ставятся на другой координатной оси

$$u'(\theta, \eta)|_{\eta=0} = 0, \quad \varphi(\eta)|_{\eta=0} = 0$$

Первое из этих условий обеспечивает нулевое значение скорости газа в области  $\Omega_2$

на координатной оси  $r = 0$ , второе задает начальную точку движения отраженной УВ ОС ( $t = 0, r = 0$ ).

Кроме замен (3.1), (3.2), неизвестные функции  $u', v$  подвергнем растяжению:  $u'' = \varepsilon_1 u', v' = \varepsilon_2 v$ . Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – любые две положительные постоянные, удовлетворяющие условию  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 2/(1+a) \neq 0, a = (\beta - 1)/(\beta + 1), |a| < 1$ .

Первые два уравнения системы, полученной таким образом из системы (1.1), разрешим относительно производных  $u_\eta, u_\theta$  (штрихи у  $u'', v'$  далее опущены). Кроме этого, в правых частях этих двух полученных уравнений коэффициенты перед  $u_\theta, u_\eta$  преобразуем по следующему правилу:

$$F = F_0 + F_1; \quad F_0 = F|_{O_2} = \text{const}, \quad F_1 = F - F_0; \quad F_1|_{O_2} = 0$$

$O_2$  – точка с координатами

$$\theta = 0, \quad \eta = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_{00}, \quad s_1 = s_{00}$$

Таким образом, для описания течения в области  $\Omega_2$  с удовлетворением на линии  $r = \varphi(t)$  условиям Гюгонио, а на линии  $r = 0$  – условию  $u = 0$  приходим к следующей задаче Коши с начальными данными, одновременно поставленными на разных координатных осях:

$$\begin{aligned} u_\eta &= \frac{(1-a)(1-M_0^2)}{K_0} u_\theta + \frac{2M_0}{K_0} v_\eta - v \frac{(1-a)D^*}{K_0} \frac{u}{\varphi} + \Phi_1 \\ v_\theta &= \frac{2aM_0}{K_0} u_\theta + \frac{1-a}{K_0} v_\eta + v \frac{(1-a^2)D^*}{2K_0} \frac{u}{\varphi} + \Phi_2 \\ z_\theta &= E_1 u_\theta + E_2 v_\theta + E_3 u_\eta + E_4 v_\eta + \frac{u}{u-D^*} z_\eta + E_5 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\varphi_\eta = D^*$$

$$u(\theta, \eta)|_{\eta=0} = 0, \quad \varphi(\eta)|_{\eta=0} = 0, \quad v(\theta, \eta)|_{\theta=0} = 0, \quad z(\theta, \eta)|_{\theta=0} = 0$$

Здесь

$$M_0 = D(0) / c(\eta, \theta)|_{\theta=\eta=0}, \quad 0 < M_0 < 1$$

$$K_0 = (1-a) + M_0(1+a), \quad 0 < K_0 < 2$$

$\Phi_i, E_j$  ( $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 5$ ) – заданные аналитические в некоторой окрестности точки  $O_2$  функции от  $\theta, \eta, u, v, \varphi, \sigma_1|_{\theta=0}, s_1|_{\theta=0}$ ; в  $\Phi_i$  линейно входят производные  $u_\theta, u_\eta$  и коэффициенты перед этими производными равны нулю в точке  $O_2$ . Конкретный вид  $\Phi_i, E_j$  из-за громоздкости здесь не приводится.

В задаче (3.3) имеется особенность вида  $u/\varphi$ . Из-за наличия этой особенности задача (3.3) не попадает под действие теорем из [10–14]. Однако в развитие предложенного в [14] метода доказана соответствующая теорема.

**Теорема 2.** Если решение  $U_1$  задачи (2.3), (2.4) является аналитическим в некоторой окрестности точки ( $\zeta = \zeta_1, \chi = 0$ ), то в некоторой окрестности точки ( $t = 0, r = 0$ ) существует единственное аналитическое решение задачи (3.3). В том числе однозначно определяется локально аналитический закон движения УВ ОС – линия  $r = \varphi(t)$ , на которой решения задачи (2.3), (2.4) и задачи (3.3) связаны условиями Гюгонио.

Не вдаваясь в громоздкие детали, приведем лишь основные моменты доказательства теоремы 2. Решение задачи (2.3) строится в виде рядов

$$U(\theta, \eta) = \sum_{k,l=0}^{\infty} U_{k,l} \frac{\theta^k \eta^l}{k!l!}, \quad \varphi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{n!} \tag{3.4}$$

Коэффициенты  $U_{k,l}$  ( $k+l=n$ ),  $\varphi_n$  определяются следующим образом. Для  $n=0$  эти коэффициенты известны из начальных условий задачи (3.3). При  $n=1$  часть коэффициентов известна из начальных условий, а остальные определяются значениями в точке  $O_2$  правых частей уравнений задачи (3.3). Если коэффициенты найдены для  $k+l=0, 1, \dots, n$ , то для  $k+l=n+1$  они определяются по такой процедуре. Во-первых, из начальных условий следует, что  $u_{0,n+1}, v_{n+1,0}, z_{0,n+1}$  — нули. Во-вторых, систему уравнений из (3.3) дифференцируем  $k$  раз по  $\eta$  и  $l$  раз по  $\theta$  ( $k=0, 1, \dots, n; k+l=n$ ) и полагаем  $\eta = \theta = 0$ . Результат дифференцирования первых двух уравнений дает систему линейных алгебраических уравнений для определения  $u_{k,l}$  и  $v_{k,l}$ . Если они будут найдены, то результатом дифференцирования двух последних уравнений системы (3.3) будут служить соотношения, из которых  $z_{k,l}, \varphi_{n+1}$  определяются явно. Система линейных алгебраических уравнений для  $u_{k,l}$  и  $v_{k,l}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 v_{0,n+1} &= D_1 v_{1,n} + Q_{0,n} \\
 v_{1,n} &= D_2 v_{2,n-1} + C_2 u_{1,n} + Q_{1,n-1} \\
 v_{k,n+1-k} &= D_{k+1} v_{k+1,n-k} + C_{k+1} u_{k,n+1-k} + Q_{k,n-k}, \\
 &\dots \\
 v_{n-1,2} &= D_n v_{n,1} + C_n u_{n-1,2} + Q_{n-1,1}, \quad v_{n,1} = C_{n+1} u_{n,1} + Q_{n,0} \\
 u_{n+1,0} &= A_{n+1} u_{n,1} + P_{n,0}, \\
 u_{n,1} &= A_n u_{n-1,2} + B_n v_{n,1} + P_{n-1,1}, \\
 &\dots \\
 u_{k+1,n-k} &= A_{k+1} u_{k,n+1-k} + B_{k+1} v_{k+1,n-k} + P_{k,n-k}, \\
 u_{2,n-1} &= A_2 u_{1,n} + B_2 v_{2,n-1} + P_{1,n-1}, \quad u_{1,n} = B_1 v_{1,n} + P_{0,n}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{(1-a)(1-M^2)}{K_0}, \quad B_0 = \frac{2M_0}{K_0}, \quad C_0 = \frac{2aM_0}{K_0}, \quad D_0 = \frac{1-a}{K_0} \\
 f_0 &= -\frac{v(1-a)}{K_0}, \quad g_0 = \frac{v(1-a^2)}{2K_0} \\
 A_n &= \frac{nA_0}{n-f_0} = \frac{n(1-a)(1-M_0^2)}{E_n}, \quad B_n = \frac{nB_0}{n-f_0} = \frac{2nM_0}{E_n} \\
 C_n &= C_0 + \frac{A_0 g_0}{n-f_0} = \frac{2naM_0 + v(1-a)(1+a-M_0+aM_0)/2}{E_n} \\
 D_n &= D_0 + \frac{B_0 g_0}{n-f_0} = \frac{(1-a)(n-v)}{E_n}, \quad E_n = nK_0 + v(1-a)
 \end{aligned}$$

$P_{k,l}, Q_{k,l}$  зависят от  $U_{k,l}, \varphi_{k+l}$  при  $k+l \leq n$ .

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 D(0) > 0, \quad f_0 < 0, \quad C_0 < 1, \quad \gamma_0^2 > 4\alpha_0 \quad (B_0 + \alpha_0 - \beta_0)^2 > \alpha_0 > 0 \\
 0 < B_n < 1, \quad (1-B_n)(1-C_n) > A_n D_n > 0 > -B_n(1-C_n) \quad n \in N \\
 (\alpha_0 = A_0 D_0, \quad \beta_0 = C_0 B_0, \quad \gamma_0 = 1 + \alpha_0 - \beta_0)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Выполнение неравенств (3.6) обеспечивает при  $n = 0, 1, 2, \dots$  отличие от нуля определителя  $\Delta_n$  системы (3.5), который находится из рекуррентных соотношений

$$\Delta_0 = 1, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_n = 1 + A_n D_n B_{n-1} \delta_{n-1} / (B_n \Delta_{n-1})$$

$$\Delta_n = 1 - C_{n+1} B_n \delta_n$$

Решение системы (3.5) имеет вид

$$v_{n,1} = \Psi_{n+1,0}$$

$$v_{k,n-k+1} = \sum_{i=k+1}^n \left[ \left( \prod_{j=k+1}^i \frac{D_j}{\Delta_{j-1}} \right) \Psi_{j+1,n-j} \right] + \Psi_{k+1,n-k}, \quad k = n-1, \dots, 0$$

$$u_{n+1,0} = \chi_{n+1,0}$$

$$u_{k,n+1-k} = B_k \Delta_k v_{k,n+1-k} + \chi_{k,n+1-k}, \quad k = n, \dots, 1$$

Здесь

$$\chi_{1,n} = P_{0,n}$$

$$\chi_{k+1,n-k} = \sum_{i=1}^k \left[ \left( \prod_{j=i}^k \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) P_{i-1,n+1-i} \right] + P_{k,n-k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^k \left[ \left( \prod_{j=i}^k \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) B_i \delta_i Q_{i,n-i} \right], \quad k = 1, \dots, n$$

$$\Psi_{1,n} = Q_{0,n} / \Delta_0$$

$$\Psi_{k+1,n-k} = (C_{k+1} \chi_{k,n+1-k} + Q_{k,n-k}) / \Delta_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Сходимость рядов (3.4) доказывается методом мажорант.

Выполнение неравенств (3.6) обеспечивает существование постоянных  $M_1, M_2, q_*$ , удовлетворяющих неравенствам

$$M_1 \geq 1, \quad M_2 \geq 1, \quad 0 < q_* < 1$$

$$\left( \prod_{i=n}^{k+n} \frac{|A_{i+1}|}{|\Delta_i|} \right) \leq M_1 q_*^k, \quad \left( \prod_{i=n}^{k+n} \frac{|D_{i+1}|}{|\Delta_i|} \right) \leq M_1 q_*^k$$

$$\frac{1}{|\Delta_k|} \leq M_2, \quad |B_n \delta_n| \leq M_2, \quad \frac{|C_{n+1}|}{|\Delta_n|} \leq M_2, \quad |A_k| \leq M_2$$

Вследствие этого задача Коши

$$W_t^* = M_3 [1 - (t + 2U^* + W^* + Z^*) / \rho]^{-1}$$

$$U_t^* = [(t + 2U^* + W^* + Z^*) 4U_t^* + 1] W_t^*$$

$$Z_t^* = [U^* W_t^* + 4U_t^* + 1] W_t^* \tag{3.7}$$

$$U^*(0) = W^*(0) = Z^*(0) = 0, \quad \rho, M_3 > 0$$

мажорирует решение задачи (3.3). Здесь  $U^*$  мажорирует  $u, v$  ( $U^* \geq u, v$ );  $W^* \geq \varphi$ ;  $Z^* \geq z$ ;  $t = \theta + \eta$ .

Записав дифференциальную систему из задачи (3.7) в нормальном виде, получим, что правые части этой системы будут аналитическими, мажорирующими нуль функциями, и, следовательно, для задачи (3.7) справедлива теорема Коши – Ковалевской. Поэтому задача (3.7) имеет аналитическое решение, мажорирующее ряды (3.4). Этим завершается доказательство теоремы 2.

Таким образом, последовательное решение задачи (2.3), (2.4) и задачи (3.3) описывает кусочно-аналитическое решение двух рассмотренных задач о фокусировки газа и о последующем отражении с конечной скоростью от оси или центра симметрии УВ.

*Замечания.* 1°. Теоремы 1, 2 справедливы и для случая нормального газа [15, 16] с аналитическим уравнением состояния.

2°. Если в задаче (2.3), (2.4) начальные данные таковы, что  $\sigma_0(0) = 0$ , то это приводит к появлению в задаче (3.3) дополнительной особенности. Этот случай в данной работе не исследовался.

3°. Рассмотренные задачи (2.3), (2.4) и (3.3), а также изложенные способы их решения можно использовать для создания численных методов построения соответствующих течений газа.

Работа выполнена при поддержке Государственного комитета РФ по высшему образованию через грантовый центр по исследованиям в области математики при НГУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
2. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
3. *Забабахин И.Е., Симоненко В.А.* Сферическая центрированная волна сжатия // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 573–576.
4. *Баутин С.П.* Схлопывание одномерной полости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 50–59.
5. *Баутин С.П.* Одномерное истечение газа в вакуум // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. Т. 14. № 4. С. 3–20.
6. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2052–2063.
7. *Баутин С.П.* Приближенный метод расчета одномерных течений газа, вызванных немонотонным движением поршня // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1058–1064.
8. *Годунов С.К., Киреева И.Л.* О некоторых автомодельных движениях идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1968. Т. 8. № 2. С. 374–392.
9. *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 172 с.
10. *Тешуков В.М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 225–234.
11. *Тешуков В.М.* Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 605–615.
12. *Леднев Н.А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб., 1948. Т. 22. Вып. 2. С. 205–266.
13. *Тешуков В.М.* Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1978. Вып. 33. С. 114–133.
14. *Баутин С.П.* Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях, возникающая в газовой динамике // Актуальные проблемы современной математики. Т. 1. Новосибирск: Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1995. С. 31–42.
15. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
16. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
17. *Тешуков В.М.* Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 39. С. 102–118.
18. *Тешуков В.М.* Пространственный аналог центрированных волн Римана и Прандтля–Мейера // ПМТФ. 1982. № 4. С. 98–106.

Екатеринбург

Поступила в редакцию  
28.VI.1995