УДК 532.5:534

© 1996 г. А.В. Кравцов, С.Я. Секерж-Зенькович

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ СОСУДЕ

Изучается параметрическое возбуждение внутренних двумерных волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости, полностью заполняющей сосуд прямоугольной формы, совершающий вертикальные колебания. Вязкость жидкости предполагается малой, что дает возможность применить идеи теории пограничного слоя и метода усреднения Крылова – Боголюбова. Получены приближенные формулы для пороговой амплитуды колебаний сосуда и границ резонансных зон – величин, определяющих условия параметрических колебаний.

Ранее изучалось параметрическое возбуждение внутренних волн в идеальной стратифицированной жидкости в сосуде [1–3], а также параметрический резонанс в вязкой стратифицированной жидкости, заполняющей все пространство [1]. Исследовались [4] параметрические колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде произвольной формы.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим задачу о параметрическом возбуждении внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной несжимаемой тяжелой жидкости, полностью заполняющей замкнутый сосуд, совершающий вертикальные колебания по закону: $-s\cos\Omega t$, где s – амплитуда, Ω – частота колебаний. Введем декартову систему координат (x, z), жестко связанную с сосудом и осями, параллельными стенкам сосуда. Считаем, что жидкость экспоненциально стратифицирована вдоль оси z, т.е. ее стационарная плотность $\rho_0 = A\exp(-\beta z)$. Система уравнений, описывающая бесконечно малые движения рассматриваемой жидкости в системе координат (x, z), имеет вид

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \mathbf{e}_z\rho g\left(1+\frac{s\Omega^2}{g}\cos\Omega t\right)+\rho_0\nu\Delta\mathbf{v}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\omega_0^2\rho_0}{g}v_z,\quad \omega_0^2=\beta g=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

$$(x,z)\in D=(0<x<a)\times(0<z<h)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость частиц жидкости, p и ρ – возмущения соответственно давления и плотности, вызванные движением жидкости относительно сосуда, ν = const – кинематическая вязкость жидкости, e_z – орт оси z, ω_0 – частота Вейсяля – Брента ([5], с. 94).

На стенках Г сосуда должна быть равна нулю скорость:

$$\mathbf{v}|_\Gamma = 0 \tag{1.2}$$

Вводим функцию тока U по формулам

$$v_x=\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial t},\quad v_z=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и (1.2), исключаем в (1.1) давление p и плотность ρ.

Введем безразмерные переменные, приняв за единицу длины характерный размер d области D, а за единицу времени $T = 1/\omega_1$, где ω_1 – наименьшая собственная частота колебаний идеальной стратифицированной жидкости. Сохраняя у всех безразмерных величин прежние обозначения, получаем задачу для функции тока U

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta U - \beta\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta^2 U - \beta\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] + \omega_0^2(1+\varepsilon\gamma\cos\Omega t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0;$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\nu}{d^2\omega_1}, \quad \varepsilon\gamma = \frac{s\Omega^2}{g}, \quad \gamma = O(1) \qquad (1.4)$$

$$U|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \qquad (1.5)$$

где n – нормаль к границе Г.

Далее считаем, что $\varepsilon \ll 1$.

2. Общая схема решения и нулевое приближение. Задача (1.4), (1.5) является сингулярно возмущенной, так как содержит малый параметр ε при старшей производной. Функции, являющиеся решениями уравнения (1.4) при $\varepsilon = 0$, удовлетворяющие первому граничному условию (1.5), описывают собственные колебания идеальной стратифицированной жидкости и имеют вид

$$u_0(x,z,C,\psi) = C\exp\left(\frac{\beta z}{2}\right)w_0(x,z)\cos\psi, \quad \frac{dC}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega$$

$$\omega = \omega_0\frac{\pi n}{a}\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}\right]^{-1/2}, \quad n,m = 1,2,\ldots$$

$$w_0(x,z) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right)$$

Здесь ω – собственное значение, а w_0 – собственная функция задачи

$$-\omega^2\left(\Delta w_0 - \frac{\beta^2}{4}w_0\right) + \omega_0^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.1)$$

$$w_0|_\Gamma = 0 \qquad (2.2)$$

Асимптотическое решение задачи (1.4), (1.5) будем искать в виде суммы регулярной части и погранслойной, существенной лишь вблизи сторон прямоугольника D

$$U = u + \sum_{l=1}^{4}\Pi^{(l)} \qquad (2.3)$$

$$u \equiv u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \quad u_k = u_k(x,z,C,\psi), \quad k = 0,1,2\ldots$$

$$\Pi^{(l)} \equiv \varepsilon\Pi_1^{(l)} + \varepsilon^2\Pi_2^{(l)}\ldots, \quad l = 1,2,3,4$$

$$\Pi_k^{(i)} = \Pi_k^{(i)}(\xi_i,z,C,\psi), \quad i = 1,2; \quad k = 1,2,\ldots$$

$$\Pi_k^{(j)} \equiv \Pi_k^{(j)}(x,\eta_j,C,\psi), \quad j = 3,4; \quad k = 1,2,\ldots$$

Здесь $\xi_1 = x/\varepsilon$, $\xi_2 = (a-x)/\varepsilon$, $\eta_3 = z/\varepsilon$, $\eta_4 = (h-z)/\varepsilon$ – "растянутые" переменные.

Требуем, чтобы погранслойные функции удовлетворяли соотношениям

$$\Pi^{(i)}\Big|_{\xi_i\to\infty} \to 0, \quad i=1,2$$

$$\Pi^{(j)}\Big|_{\eta_i\to\infty} \to 0, \quad j=3,4$$

Кроме того, следуя идее метода Крылова–Боголюбова, считаем, что амплитуда колебаний C и скорость изменения фазы $d\psi/dt$ медленно меняются во времени в зависимости от величины самой амплитуды C и разности фаз $\theta = \psi - \Omega t/2$. Положим

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \varepsilon A_1(C,\theta) + \varepsilon^2 A_2(C,\theta) + \ldots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{\Omega}{2} + \varepsilon B_1(C,\theta) + \varepsilon^2 B_2(C,\theta) + \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $A_1(C,\theta)$, $B_1(C,\theta)$ – периодические функции θ с периодом 2π, подлежащие как и коэффициенты разложений (2.3), определению из задачи (1.4), (1.5).

Учитывая явную зависимость функций u, $\Pi^{(l)}$ $(l=1,2,3,4)$ от ψ и C, для частных производных по t, например от функции u, будем иметь разложения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \omega\frac{\partial u_0}{\partial\psi} + \varepsilon\left(\omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \frac{\partial u_0}{\partial C}A_1 + \frac{\partial u_0}{\partial\psi}B_1\right) + \ldots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2} + \varepsilon\left[\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega\cdot\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial C\partial\psi}A_1 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2}B_1\right) + \right. \\ &\left. + \left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial\psi}\frac{\partial B_1}{\partial\theta} + \frac{\partial u_0}{\partial C}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\right] + \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для производных по времени от погранслойных функций имеют место аналогичные разложения.

Подставив разложения (2.3), (2.5) в уравнение (1.4), получим отдельно уравнения для регулярных и погранслойных членов. Подставив разложения (2.3) в граничные условия (1.5), получим соотношения, связывающие погранслойные и регулярные члены. Сравнив в этих уравнениях и соотношениях величины одного порядка по ε, получим последовательность краевых задач, из которых находятся последовательные приближения решения задачи (1.4), (1.5).

Задача для функции $\Pi_1^{(1)}$, устраняющей невязку, вносимую функцией u_0 во второе граничное условие (1.5) на стороне $x = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega^2\frac{\partial^2\Pi_1^{(1)}}{\partial\psi^2} - \omega\frac{\partial^3\Pi_1^{(1)}}{\partial\psi\partial\xi_1^2} + \omega_0^2\Pi_1^{(1)} = 0 \\ &\frac{\partial\Pi_1^{(1)}}{\partial\xi_1}\bigg|_{\xi_1=0} = -\frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0}; \quad \Pi_1^{(1)}\Big|_{\xi_1\to\infty} \to 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.6) таково:

$$\Pi_1^{(1)} = \frac{C}{2\alpha}\frac{\partial w_0}{\partial x}\bigg|_{x=0}\exp\left(\frac{\beta z}{2} - \alpha\xi_1\right)[\cos(\psi + \alpha\xi_1) - \sin(\psi + \alpha\xi_1)]$$

$$\alpha = [(\omega_0^2 - \omega^2)/(2\omega)]^{1/2}$$

Аналогичным образом получаем выражение для $\Pi_1^{(2)}$, отличающееся от $\Pi_1^{(1)}$ заменой $\partial w_0 / \partial x|_{x=0}$ на $-\partial w_0 / \partial x|_{x=a}$ и ξ_1 на ξ_2.

Задача для функции $\Pi_1^{(3)}$, устраняющей невязку, вносимую функцией u_0 во второе граничное условие (1.5) на стороне $z = 0$, имеет вид

$$\omega \frac{\partial \Pi_1^{(3)}}{\partial \psi} = \frac{\partial^2 \Pi_1^{(3)}}{\partial \eta_3^2}$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_1^{(3)}}{\partial \eta_3} \right|_{\eta_3=0} = -\left. \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|_{z=0}; \quad \Pi_1^{(3)}\Big|_{\eta_3 \to \infty} \to 0 \tag{2.7}$$

Решение задачи (2.7) таково:

$$\Pi_1^{(3)} = \frac{C}{2\sigma} \left. \frac{\partial w_0}{\partial z} \right|_{z=0} \exp(-\sigma\eta_3)[\cos(\psi - \sigma\eta_3) + \sin(\psi - \sigma\eta_3)]$$

$$\sigma = [\omega / 2]^{1/2}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\Pi_1^{(4)} = -\frac{C}{2\sigma} \left. \frac{\partial w_0}{\partial z} \right|_{z=h} \exp\left(\frac{\beta h}{2} - \sigma\eta_4 \right) [\cos(\psi - \sigma\eta_4) + \sin(\psi - \sigma\eta_4)]$$

Заметим, что функции $\Pi_1^{(l)}$ $(l = 1,2,3,4)$, устраняющие невязки во втором граничном условии (1.5) на одной из сторон прямоугольника D, не вносят невязки на другие стороны в первом граничном условии (1.5).

Для компонент скоростей частиц жидкости из (1.3) с точностью до $O(\varepsilon)$ будем иметь

$$v_{0x} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 \Pi_1^{(3)}}{\partial \eta_3 \partial t} - \frac{\partial^2 \Pi_1^{(4)}}{\partial \eta_4 \partial t}, \qquad v_{0z} = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \Pi_1^{(1)}}{\partial \xi_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \Pi_1^{(2)}}{\partial \xi_2 \partial t}$$

3. Формулы для пороговой амплитуды и границ резонансных зон. Задача для функции

$$W_1 = \exp\left(-\frac{\beta z}{2} \right) u_1$$

имеет вид

$$\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\Delta W_1 - \frac{\beta^2}{4} W_1 \right) + \omega_0^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = \left[-2\omega Q + \left(\omega - \frac{\Omega}{2} \right) G \right] \left(k^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) w_0 + \frac{\gamma \omega^2}{2} V w_0 \tag{3.1}$$

$$W_1\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2\alpha} \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=0} q_-, \quad W_1\Big|_{x=a} = \frac{1}{2\alpha} \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=a} q_-$$

$$W_1\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2\sigma} \left. \frac{\partial w_0}{\partial z} \right|_{z=0} q_+, \quad W_1\Big|_{z=h} = \frac{1}{2\sigma} \left. \frac{\partial w_0}{\partial z} \right|_{z=h} q_+ \tag{3.2}$$

где

$$q_\pm \equiv C(\cos\psi \pm \sin\psi), \qquad Q \equiv A_1 \sin\psi + CB_1 \cos\psi$$

$$V \equiv C[\sin 2\theta(\sin\psi + \sin 3\psi) + \cos 2\theta(\cos\psi + \cos 3\psi)]$$

$$G \equiv \cos\psi \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - C \sin\psi \frac{\partial B_1}{\partial \theta}, \quad k^2 \equiv \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h} \right)^2$$

Правая часть (3.1) зависит от ψ по законам $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin 3\psi$, $\cos 3\psi$, а правая часть (3.2) по законам $\sin\psi$, $\cos\psi$. Поэтому можно положить

$$\partial^2 W_1 / \partial\psi^2 = -W_1^{(1)} - 9W_1^{(3)} \tag{3.3}$$

где $W_1^{(1)}$ зависит от ψ по законам $\sin\psi$, $\cos\psi$, а $W_1^{(3)}$ – по законам $\sin 3\psi$, $\cos 3\psi$. Для нахождения функций $A_1(C, \theta)$, $B_1(C, \theta)$, воспользуемся приемом, аналогичным примененному в [4].

Умножим уравнение (3.1) на w_0, а уравнение (2.1) на W_1. Интегрируя получившееся соотношения по области D, и вычитая одно из другого, с учетом первой формулы Грина для оператора Лапласа, условия (2.2) и формулы (3.3), будем иметь

$$\frac{(\omega^2-\omega_0^2)}{\alpha} q_- I_1 + \frac{\omega^2}{\sigma} q_+ I_2 + 8\omega^2 \iint_D \nabla W_1^{(3)} \nabla w_0 ds =$$

$$= -2\omega\left(1+\frac{\beta^2}{4k^2}\right) QI + \frac{\gamma\omega^2}{2k^2} VI + \left(1+\frac{\beta^2}{4k^2}\right)\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) GI \tag{3.4}$$

$$I_1 \equiv \int_0^h \left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)^2 \Bigg|_{x=0} dz = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \frac{h}{2}$$

$$I_2 \equiv \int_0^a \left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)^2 \Bigg|_{z=0} dx = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 \frac{a}{2}$$

$$I \equiv \int_0^a \int_0^h (\nabla w_0)^2 dx dz = k^2 \frac{ah}{4}$$

Приравнивая в (3.4) отдельно коэффициенты при $\sin\psi$ и $\cos\psi$, получаем систему дифференциальных уравнений для функций $A_1(C, \theta)$ и $B_1(C, \theta)$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\alpha_+ C + bC \sin 2\theta - \delta C \frac{\partial B_1}{\partial\theta} \\ B_1 &= -\alpha_- + b\cos 2\theta + \frac{\delta}{C}\frac{\partial A_1}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\alpha_\pm = \left[\pm(\omega_0^2 - \omega^2)\frac{I_1}{\alpha} + \omega^2 \frac{I_2}{\sigma}\right]\left[2\omega\left(1+\frac{\beta^2}{4k^2}\right) I\right]^{-1}$$

$$b = \frac{\gamma\omega}{4k^2+\beta^2}, \qquad \delta = \frac{1}{4} - \frac{\Omega}{2\omega}$$

Решив систему (3.5), подставим функции $A_1(C, \theta)$, $B_1(C, \theta)$ в систему (2.4), рассмотренную с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\varepsilon\alpha_+ C + \varepsilon\frac{b}{2\delta-1} C\sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{\Omega}{2} - \varepsilon\alpha_- + \varepsilon\frac{b}{2\delta-1}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для исследования на устойчивость тривиального решения $C = 0$, $\theta = \text{const}$ сведем (3.6) к линейной системе при помощи замены $u = C\cos\theta$, $v = C\sin\theta$. Соответствующее этой системе характеристическое уравнение имеет решения

$$\lambda_{\pm} = -\varepsilon\alpha_{+} \pm \varepsilon\left[r^2 - \left(\alpha_{-} - \left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)\varepsilon^{-1}\right)^2\right]^{1/2}, \quad r = b/(2\delta - 1)$$

Для нарастания амплитуды колебаний необходимо, чтобы подкоренное выражение было положительным. Отсюда, возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$\Omega_{-} < \Omega < \Omega_{+}, \quad \Omega_{\pm} = 2\omega + 2\Delta\omega \pm 2(\zeta^2 - \mu^2)^{1/2} \tag{3.7}$$

$$\zeta = s\Omega\omega^2/(2g), \quad \mu = -\varepsilon\alpha_{+}\omega_1, \quad \Delta\omega = -\varepsilon\alpha_{-}\omega_1$$

где μ и $\Delta\omega$ – соответственно коэффициент затухания и сдвиг частоты колебаний идеальной стратифицированной жидкости.

Параметрическое усиление внутренних волн возможно, если частота Ω колебаний сосуда удовлетворяет соотношению (3.7), а амплитуда s превышает некоторое пороговое значение s_*, которое находится из условия: $\zeta^2 = \mu^2$. Отсюда для $\Omega \approx 2\omega$ находим

$$s_* = \frac{g\nu^{1/2}[(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2} I_1 + \omega I_2]}{\omega^3 (2\omega)^{1/2}[1 + \beta^2/(4k^2)]I}$$

При $\nu = 0$ и $\Omega \approx 2\omega$ формула (3.7) принимает вид:

$$2\omega - 2s\omega^3/g < \Omega < 2\omega + 2s\omega^3/g$$

Этот результат совпадает с полученным ранее [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–01–17929).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.А.* Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1981. № 6. С. 168–174.
2. *Нестеров А.В.* О параметрическом возбуждении внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 167–169.
3. *Секерж-Зенькович С.Я.* Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1089–1091.
4. *Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 611–619.
5. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.III.1995