

УДК 532.5

© 1996 г. Б.Н. Гордейчик, А.М. Тер-Крикоров

О РАВНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Предлагаются новые представления фундаментального решения уравнения внутренних волн в виде сходящихся и асимптотических рядов по спецфункциям. Построена система из трех формул, каждая из которых задает равномерную аппроксимацию фундаментального решения в некоторой пространственно-временной области, причем объединение этих областей покрывает весь пространственно-временной континуум. Приведены результаты вычислительного эксперимента, показывающие, что относительная ошибка аппроксимации не превышает 0,5% при уменьшении более чем в 200 раз затрат машинного времени, необходимого для вычисления фундаментального решения по точным формулам.

1. Интегральные представления фундаментального решения. Линейное уравнение внутренних волн в приближении Буссинеска имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 M(x, y, z, t)}{\partial z \partial t} \quad (1.1)$$

где w – малое вертикальное отклонение жидкой частицы от положения равновесия, M – распределение источников массы, N – частота Брента–Вяйсяля. Если функция $\rho(z)$ задает распределение плотности в состоянии равновесия несжимаемой жидкости, то $N^2 = -g\rho'(z)/\rho(z) \geq 0$, а если функция $\varepsilon(z)$ задает распределение энтропии в состоянии равновесия идеального газа, то $N^2 = g\varepsilon'(z)/\varepsilon(z) \geq 0$. Будем полагать, что $N = \text{const}$. Уравнение (1.1) справедливо для медленных движений стратифицированного газа.

Фундаментальное решение $\Phi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) с правой частью $\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$ [1].

Исторические обзоры и библиография содержатся в [1, 2].

Решение физических задач о движении точечных источников, стоков и диполей выражается через производные от фундаментального решения по пространственным переменным и по времени. Решение задач о движении распределенных источников или диполей сводится к вычислению сверток известных функций с фундаментальным решением. Эффективность численного решения подобных задач сводится к быстрому вычислению значений фундаментального решения.

Функция Φ представляется в виде

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi NR} \varphi(\lambda, Nt), \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \lambda = \frac{z}{R} \quad (1.2)$$

где преобразование Лапласа функции φ имеет вид [1, 2]

$$L\varphi = (p^2 + N^2)^{-1/2} (p^2 + N^2\lambda^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

(p – переменная, двойственная t).

Применяя методы контурного интегрирования, можно от изображения (1.3)

перейти к оригиналу [2]

$$\varphi(\lambda, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_{|\lambda|}^1 \frac{\sin(\tau\xi)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\lambda^2)}} \quad (1.4)$$

Поскольку функция φ четная по переменной λ , то в дальнейшем без ограничения общности считаем, что $\lambda \geq 0$.

Выделяя другим способом ветвь аналитической функции (1.3) можно записать

$$\varphi(\lambda, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{\cos(\tau\xi)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\lambda^2-\xi^2)}} - \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(\tau\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(\xi^2-\lambda^2)}}, \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (1.5)$$

Замена переменной интегрирования $\operatorname{tg}^2 u = (\xi^2 - \lambda^2) / (1 - \xi^2)$ приводит интеграл (1.4) к виду

$$\varphi(\lambda, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\tau\sqrt{1-k^2\sin^2 u})}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} du, \quad k^2 + \lambda^2 = 1 \quad (1.6)$$

Еще одно интегральное представление функции $\varphi(\lambda, \tau)$ получаем, делая в интеграле (1.4) замену переменной, $2\xi = 1 + \lambda - (1 - \lambda)\cos \theta$. Тогда

$$\varphi_1(\lambda, \tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\left(\tau \frac{1-\lambda}{2} \cos \theta\right) f_1(\theta) d\theta, \quad \varphi_2(\lambda, \tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\left(\tau \frac{1-\lambda}{2} \cos \theta\right) f_2(\theta) d\theta \quad (1.7)$$

$$\varphi(\lambda, \tau) = \varphi_1(\lambda, \tau) \sin\left(\tau \frac{1+\lambda}{2}\right) + \varphi_2(\lambda, \tau) \cos\left(\tau \frac{1+\lambda}{2}\right)$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{Q(\cos \theta)}} + \frac{1}{\sqrt{Q(-\cos \theta)}}, \quad f_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{Q(\cos \theta)}} - \frac{1}{\sqrt{Q(-\cos \theta)}}$$

$$Q(u) = (1-\lambda)^2 u^2 - 4(1-\lambda)(1+\lambda)u + 3\lambda^2 + 10\lambda + 3$$

Вычисление значений функций φ , φ_1 , φ_2 по интегральным формулам (1.4)–(1.7) связано со значительными затратами машинного времени. Так как решение задач Коши и неоднородных задач для уравнения (1.1) выражаются через разнообразные свертки фундаментального решения с известными функциями, то затраты машинного времени на вычисление свертки делают затруднительной численную реализацию решений подобных задач. Поэтому представляется актуальным получение аппроксимаций фундаментального решения, позволяющих с достаточной точностью вычислять значения функции φ при сравнительно малых затратах машинного времени.

2. Представление функции φ в виде рядов по специальным функциям. Предлагается несколько новых представлений функции φ . Через $J_n(z)$, $P_n(z)$ и $T_n(z)$ обозначены функции Бесселя, полином Лежандра и полином Чебышева [3]. Справедливо представление

$$\varphi(\lambda, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\tau) P_n(1-2\lambda^2) \quad (2.1)$$

При фиксированном значении τ функция $J_{2n+1}(\tau)$ быстро убывает с ростом значка n , и ряд (2.1) быстро сходится.

Для доказательства формулы (2.1) подставим в (1.4) тождества

$$\cos\left(\tau\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\right) = J_0(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\tau) T_{2n}(k \sin \theta)$$

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T_{2n}(k \sin \theta) d\theta = P_n(1-2\lambda^2) - P_{n-1}(1-2\lambda^2)$$

и получим, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J'_{2n+1}(\tau) P_n(1-2\lambda^2)$$

Функции φ_1 и φ_2 в формуле (1.7) также могут быть представлены в виде рядов

$$\varphi_1 = \frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-\lambda}{c}\right)^{2n} P_{2n} \left(2 \frac{1+\lambda}{2}\right) J_0^{(2n)} \left(\tau \frac{1-\lambda}{2}\right) \quad (2.2)$$

$$\varphi_2 = \frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-\lambda}{c}\right)^{2n+1} P_{2n+1} \left(2 \frac{1+\lambda}{c}\right) J_0^{(2n+1)} \left(\tau \frac{1-\lambda}{2}\right)$$

$$c^2 = 3\lambda^2 + 10\lambda + 3$$

Для доказательства формул (2.2) нужно воспользоваться тождествами

$$f_1(\theta) = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{c} \cos \theta\right)^{2n} P_{2n} \left(2 \frac{1+\lambda}{c}\right), \quad f_2(\theta) = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{c} \cos \theta\right)^{2n+1} P_{2n+1} \left(2 \frac{1+\lambda}{c}\right)$$

легко выводимыми из выражения для производящей функции многочленов Лежандра.

Ряды (2.2) сходятся с геометрической скоростью равномерно по τ . Действительно

$$|P_n(x)| \leq \left(|x| + \sqrt{|x^2 - 1|}\right)^n, \quad |J_0^n(x)| \leq 1$$

$$\left| \left(\frac{1-\lambda}{c}\right)^{2n} P_{2n} \left(2 \frac{1+\lambda}{c}\right) J_0^{(2n)}(x) \right| \leq \left(\frac{1-\lambda}{c}\right)^{2n} \left(2 \frac{1+\lambda}{c} + \frac{1-\lambda}{c}\right)^{2n} = \left(\frac{1-\lambda}{1+3\lambda}\right)^{2n}$$

Кроме того, ряды (2.2) равномерно по τ асимптотические при $\lambda \rightarrow 1$.

Заметим, что ряд (2.1) сходится тем медленнее, чем больше значение τ . Вычислительный эксперимент показывает, что вычисление значений функции по формулам (2.1) и (2.2) не дает большого выигрыша машинного времени по сравнению с вычислениями по интегральным формулам.

3. Асимптотический ряд при $\tau \rightarrow \infty$ и $0 < \delta < \lambda < 1 - \delta$. Предлагается новая форма асимптотического ряда для функции φ при $\tau \rightarrow \infty$. Введем в рассмотрение многочлены

$$C_n(k^2) = k^{2n} \sum_{m=0}^n P_m \left(\frac{1}{k^2}\right) \frac{(2n-2m-1)!!}{2^{3n-2m}}$$

$$D_n(k^2) = \lambda^{2n} C_n \left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = k^{2n} (-1)^n \sum_{m=0}^n P_m \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \frac{(2n-2m-1)!!}{2^{3n-2m}}$$

Функция φ допускает при $0 < \delta < \lambda < 1 - \delta$ и $\tau \rightarrow \infty$ представление в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned} \varphi \sim & \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{\tau^n k^{2n}} C_n(k^2) \sin \left(\tau - \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(\tau \lambda)^n k^{2n}} D_n(k^2) \sin \left(\lambda \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Все члены асимптотического ряда (3.1) определяются с точностью до функций, стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени τ .

Разложение (3.1) получается применением метода стационарной фазы [4] к интегралу (1.6). Этот интеграл имеет две стационарные точки $u = 0$ и $u = \pi/2$. Если вклад точки $u = 0$ в асимптотический ряд есть $I_1(k^2, \tau)$, то при помощи замены переменной интегрирования нетрудно показать, что вклад $I_2(k^2, \tau)$ точки $u = \pi/2$ выражается через $I_1(k^2, \tau)$:

$$I_2(k^2, \tau) = \frac{1}{\lambda} I_1\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}, \tau\lambda\right)$$

Делая в интеграле (1.6) замену переменной интегрирования $1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} = k^2 v^2 / 2$, получаем, что $I_1(k^2, \tau)$ равняется вкладу стационарной точки $v = 0$ в асимптотику интеграла

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\tau(1 - \frac{1}{2}k^2 v^2)) dv}{\sqrt{(1 - k^2 v^2 / 4)(1 - v^2 + k^4 v^4 / 4)}}$$

Используя производящую функцию многочленов Лежандра для представления функции, являющейся множителем перед синусом, в виде ряда по четным степеням v , а затем оценивая все стандартные интегралы, как это принято в теории метода стационарной фазы [4], получаем формулы (3.1).

Выпишем выражения для первых трех многочленов C_n и D_n :

$$C_0 = D_0 = 1, \quad C_1 = \frac{1}{2} + \frac{k^2}{8}, \quad C_2 = \frac{1}{128}(48 - 8k^2 + 3k^4)$$

$$D_1 = \frac{4 - 5k^2}{8}, \quad D_2 = \frac{1}{128}(48 - 88k^2 + 43k^4)$$

Подставляя ряд (3.1) в выражение (1.2) для фундаментального решения, получаем его представление в виде асимптотического ряда. Выпишем первые члены этого ряда и подставим результат в выражение (1.2) для фундаментального решения

$$\Phi = \frac{1}{N\sqrt{32\pi}} \left(\frac{\sin(Nt - \pi/4)}{\rho\sqrt{Nt}} + \frac{\sin(Nt|z|/R + \pi/4)}{\rho\sqrt{Nt|z|/R}} - \frac{R(5\rho^2 + 4z^2)}{8\rho^3(Nt)^{3/2}} \sin(Nt + \pi/4) + \frac{R(4z^2 - \rho^2)}{8\rho^3(Nt|z|/R)^{3/2}} \sin\left(\frac{Nt|z|}{R} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad R^2 = \rho^2 + z^2, \quad 0 < \delta < \frac{\rho}{R} < 1 - \delta \quad (3.2)$$

Асимптотика (3.2) неравномерна и становится непригодной для получения приближений при $z \rightarrow 0$ или при $\rho \rightarrow 0$. Для эффективной численной реализации будут использованы равномерные асимптотики из разд. 4-6.

4. Равномерная аппроксимация в области $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 < 1$. Подставляя тождества

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} = (k^2 + \lambda^2 - \xi^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(\lambda^2 - \xi^2)^n}{k^{2n+1}}, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda$$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^{2n}}{k^{2n+1}} \frac{(\xi^2 - 1)^n}{\xi^{2n+1}}, \quad \xi > 1$$

в формулу (1.5) и воспользовавшись тем, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\lambda (\lambda^2 - \xi^2)^{n-1/2} \cos(\tau\xi) d\xi = \frac{\lambda^n}{\tau^n} J_n(\lambda\tau) (2n-1)!! \cdot \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{(\xi^2 - 1)^{n-1/2}}{\xi^{2n+1}} \cos(\tau\xi) d\xi = \frac{a_n(\tau)}{\tau^n} \quad (4.1)$$

$$a_n(\tau) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\frac{(\xi^2 - 1)^{n-1/2}}{\xi^{2n+1}} \right) \cos\left(\tau\xi + \frac{n\pi}{2}\right) d\xi$$

получаем представление функции $\varphi(\lambda, \tau)$ в виде ряда

$$\varphi(\lambda, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^n}{k^{2n+1} \tau^n} \left((2n-1)!! J_n(\lambda\tau) - \lambda^n a_n(\tau) \right) \quad (4.2)$$

$$0 \leq \lambda < 1 - \delta < 1$$

Коэффициент a_0 выражается через интеграл от функции Бесселя

$$a_0(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(\tau\xi) d\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} = \int_\tau^\infty J_0(u) du$$

При $n \geq 1$ функции $a_n(\tau)$ уже не имеют простых представлений через известные спецфункции. Найдем асимптотику a_1 и a_2 , беря два члена асимптотического ряда для a_1 и один член для a_2 :

$$a_2 = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{(\xi^2 - 1)^{3/2}}{\xi^5} \right) \cos(\tau\xi) d\xi = -3a_0(\tau) + O(\tau^{-3/2})$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \left(\frac{3}{\xi^4} \sqrt{1 - \xi^2} - \frac{1}{\xi^2 \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \sin(\tau\xi) d\xi = -J_0(\tau) + \frac{4a_0(\tau)}{\tau} + O(\tau^{-5/2})$$

Подставляя эти значения в (4.2) и беря три первых члена ряда, получаем аппроксимационную формулу

$$\varphi = \left(\frac{1}{k} - \frac{9}{8} \frac{\lambda^2}{k^5 \tau^2} \right) J_0(\tau\lambda) - \left(\frac{\lambda}{2k^3 \tau} - \frac{9}{4} \frac{\lambda}{k^5 \tau^3} \right) J_1(\tau\lambda) - \left(\frac{1}{k} - \frac{2\lambda^2}{k^3 \tau^2} - \frac{9}{8} \frac{\lambda^4}{k^5 \tau^2} \right) \int_\tau^\infty J_0(u) du - \frac{\lambda^2}{2k^3 \tau} J_0(\tau) + O(\tau^{-5/2}) \quad (4.3)$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda_0 < 1$$

Эффективность формулы (4.3) будет обоснована при помощи вычислительного эксперимента. Формула (4.3) тем точнее, чем меньше отношение λ/τ .

5. Равномерная аппроксимация φ при $0 < \delta \leq \lambda \leq 1$. Воспользуемся представлением (1.7) и положим

$$f_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) \frac{(1-\lambda)^{2n}}{(8\lambda(1+\lambda))^{n+1/2}} \sin^{2n} \theta \quad (5.1)$$

$$f_2(\theta) = (1-\lambda) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda) \frac{(1-\lambda)^{2n}}{(8\lambda(1+\lambda))^{n+1/2}} \sin^{2n} \theta$$

Способ вычисления коэффициентов $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ будет указан ниже. Подставляя (5.1) в (1.7) и воспользовавшись известными интегральными представлениями

функций Бесселя [4], получаем, что

$$\varphi_1(\lambda, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) 2^{n+1} (2n-1)!! \frac{(1-\lambda)^n J_n\left(\tau \frac{1-\lambda}{2}\right)}{\tau^n (8\lambda(1+\lambda))^{n+\frac{1}{2}}} \quad (5.2)$$

$$\varphi_2(\lambda, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda) 2^{n+1} (2n-1)!! \frac{(1-\lambda)^{n+1} J_{n+1}\left(\tau \frac{1-\lambda}{2}\right)}{\tau^n (8\lambda(1+\lambda))^{n+\frac{1}{2}}}$$

Коэффициенты $A_n(\lambda)$ и $B_n(\lambda)$ определяются из уравнений

$$y = \frac{1}{\sqrt{Q(u)}} + \frac{1}{\sqrt{Q(-u)}} = \frac{1}{\sqrt{8\lambda(1+\lambda)}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) w^n$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{Q(u)}} - \frac{1}{\sqrt{Q(-u)}} = \frac{(1-\lambda)u}{\sqrt{8\lambda(1+\lambda)}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\lambda) w^n$$

$$w = (1-\lambda)^2 (1-u^2) (8\lambda(1-\lambda))^{-1}$$

Поскольку

$$8\lambda(1+\lambda)y^2 = \frac{Q(u)+Q(-u)}{Q(u)Q(-u)} = c_0(\lambda) - c_1(\lambda)w + c_2(\lambda)w^2 + \dots =$$

$$= A_0^2(\lambda) + 2A_0(\lambda)A_1(\lambda)w + (A_1^2 + 2A_0A_2)w^2 + \dots$$

$$c_0(\lambda) = (1+\sqrt{\lambda})^2, \quad c_1(\lambda) = 1 + \sqrt{\lambda} + 4\lambda + \lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda^2$$

$$c_2(\lambda) = \frac{1}{4} \left(4 + 3\sqrt{\lambda} + 16\lambda + 2\lambda^{\frac{3}{2}} + 16\lambda^2 + 3\lambda^{\frac{5}{2}} + 4\lambda^3 \right)$$

то, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях w , получаем

$$A_0 = \sqrt{c_0} = 1 + \sqrt{\lambda}, \quad A_1 = -\frac{c_1}{2A_0} = -\frac{1 + \sqrt{\lambda} + 4\lambda + \lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda^2}{2(1 + \sqrt{\lambda})}, \quad A_2 = \frac{c_2 - A_1^2}{2(1 + \sqrt{\lambda})}$$

Для определения коэффициентов B_n воспользуемся тождеством

$$8\lambda(1+\lambda)yz = 1 - (1+\lambda)w + (1+\lambda+\lambda^2)w^2 + \dots =$$

$$= A_0B_0 + (A_1B_0 + A_0B_1)w + (A_2B_0 + B_1A_1 + A_0B_2)w^2 + \dots$$

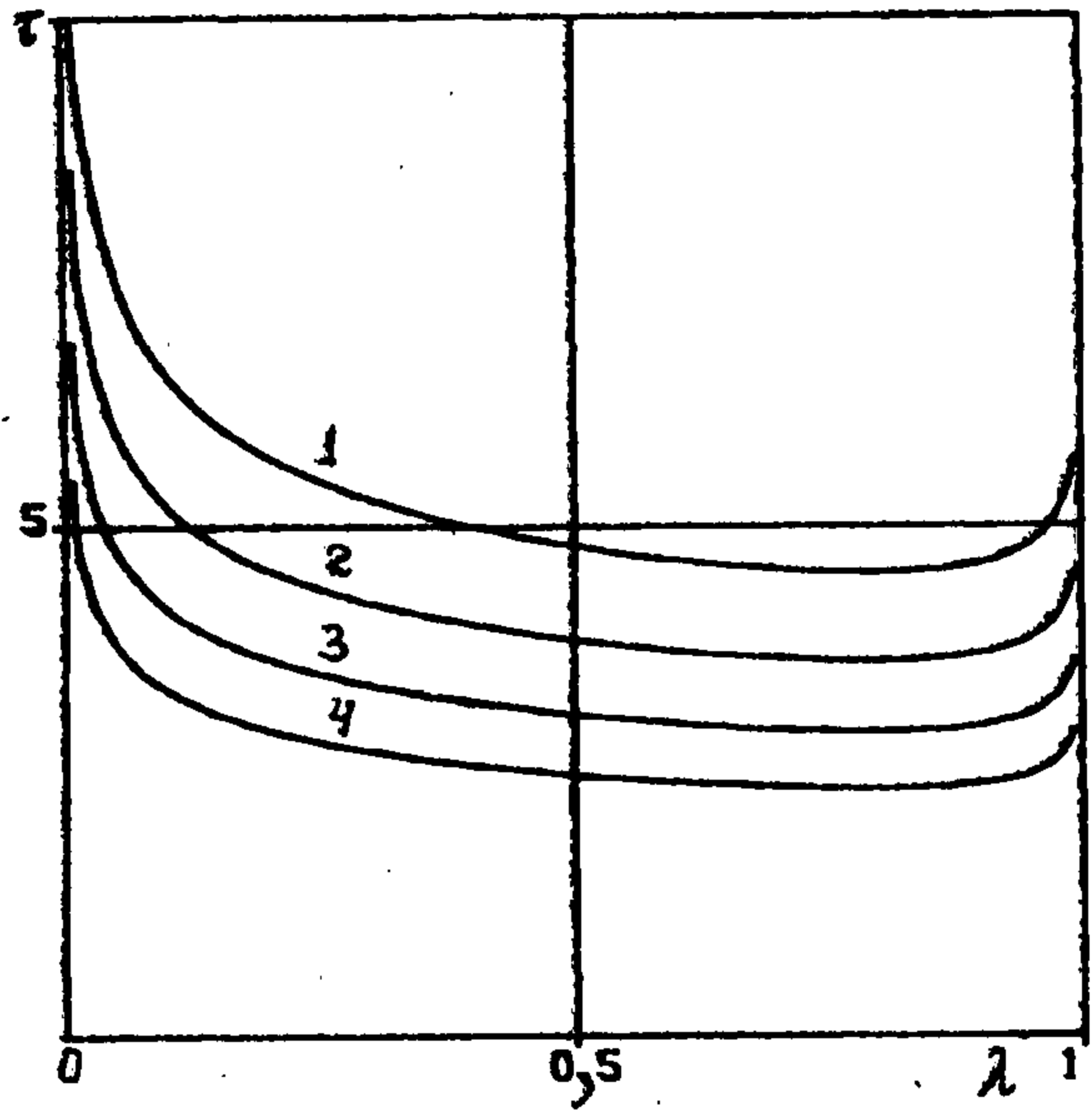
Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$B_0 = \frac{1}{A_0} = \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}},$$

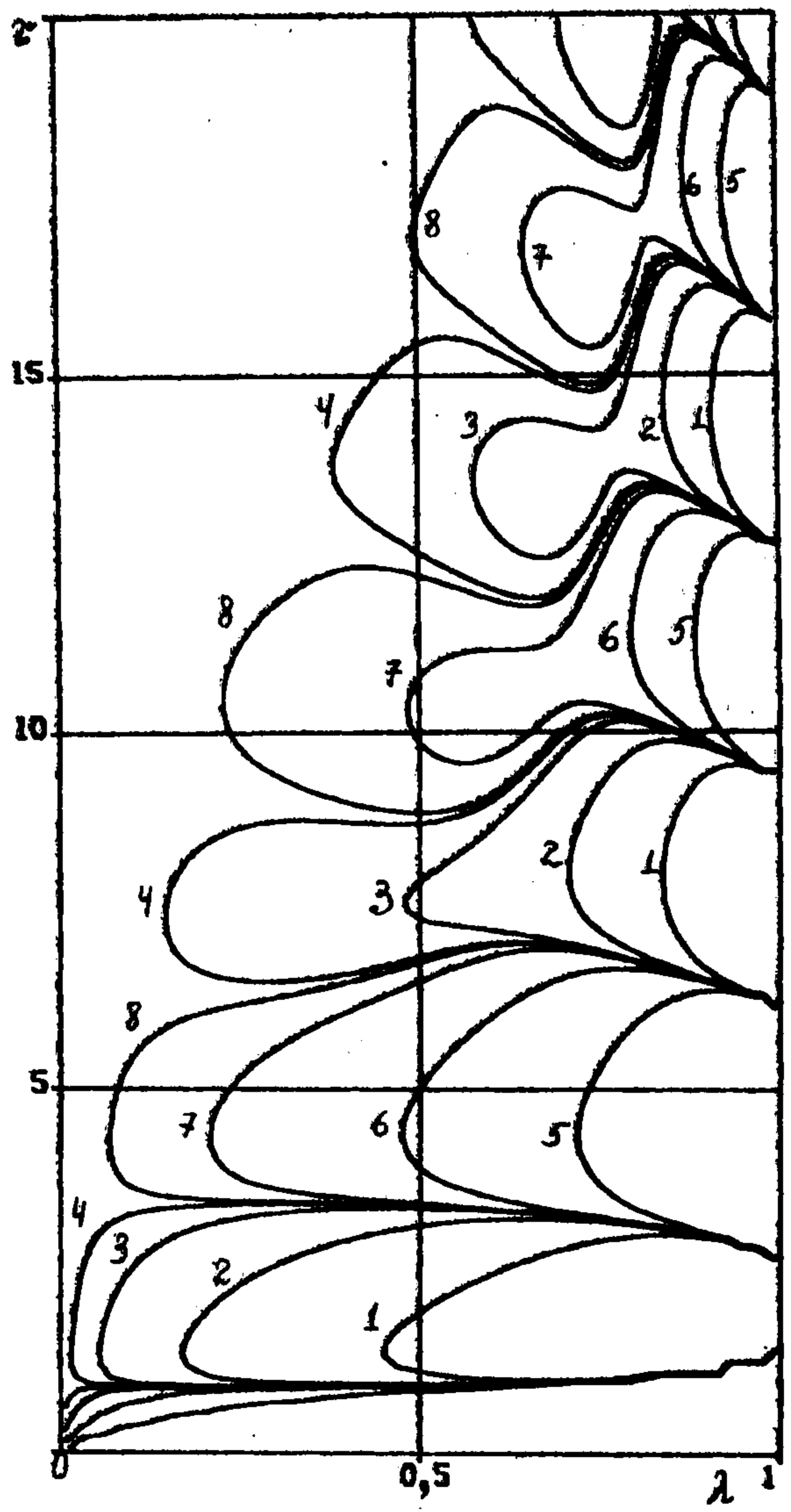
$$B_1 = -\frac{1 + \lambda + B_0A_1}{A_0} = -\frac{1 + 3\sqrt{\lambda} + 3\lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda^2}{2(1 + \sqrt{\lambda})}$$

$$B_2 = \frac{1 + \lambda + \lambda^2 - A_1B_1 - A_2B_0}{1 + \sqrt{\lambda}}$$

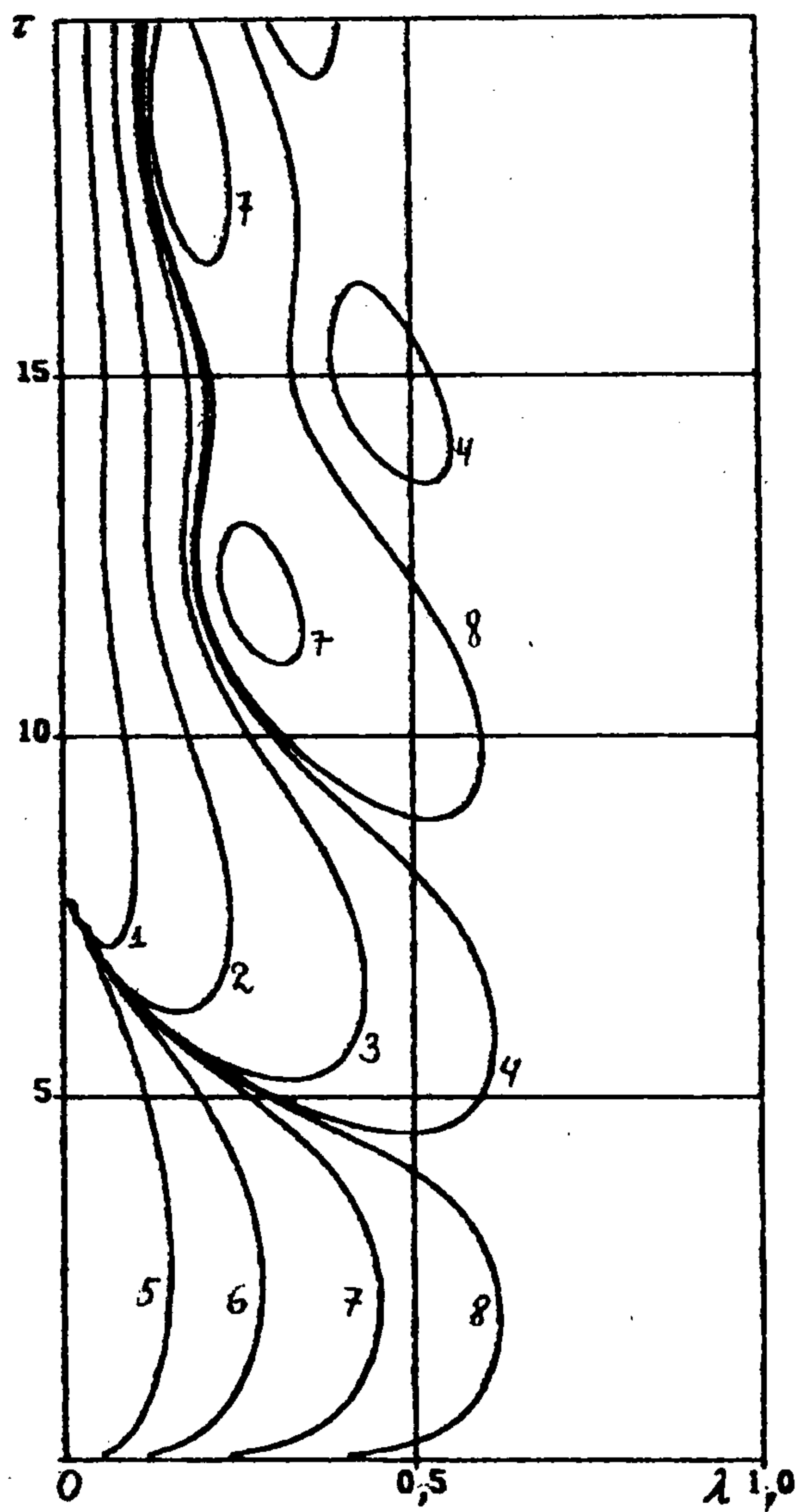
При $0 < \delta \leq \lambda \leq 1$ будем пользоваться для приближенного вычисления φ_1 и φ_2 аппроксимациями, которые получаются при учете трех первых членов рядов (5.2). Аппроксимация тем точнее, чем меньше $(1-\lambda)/\tau$.



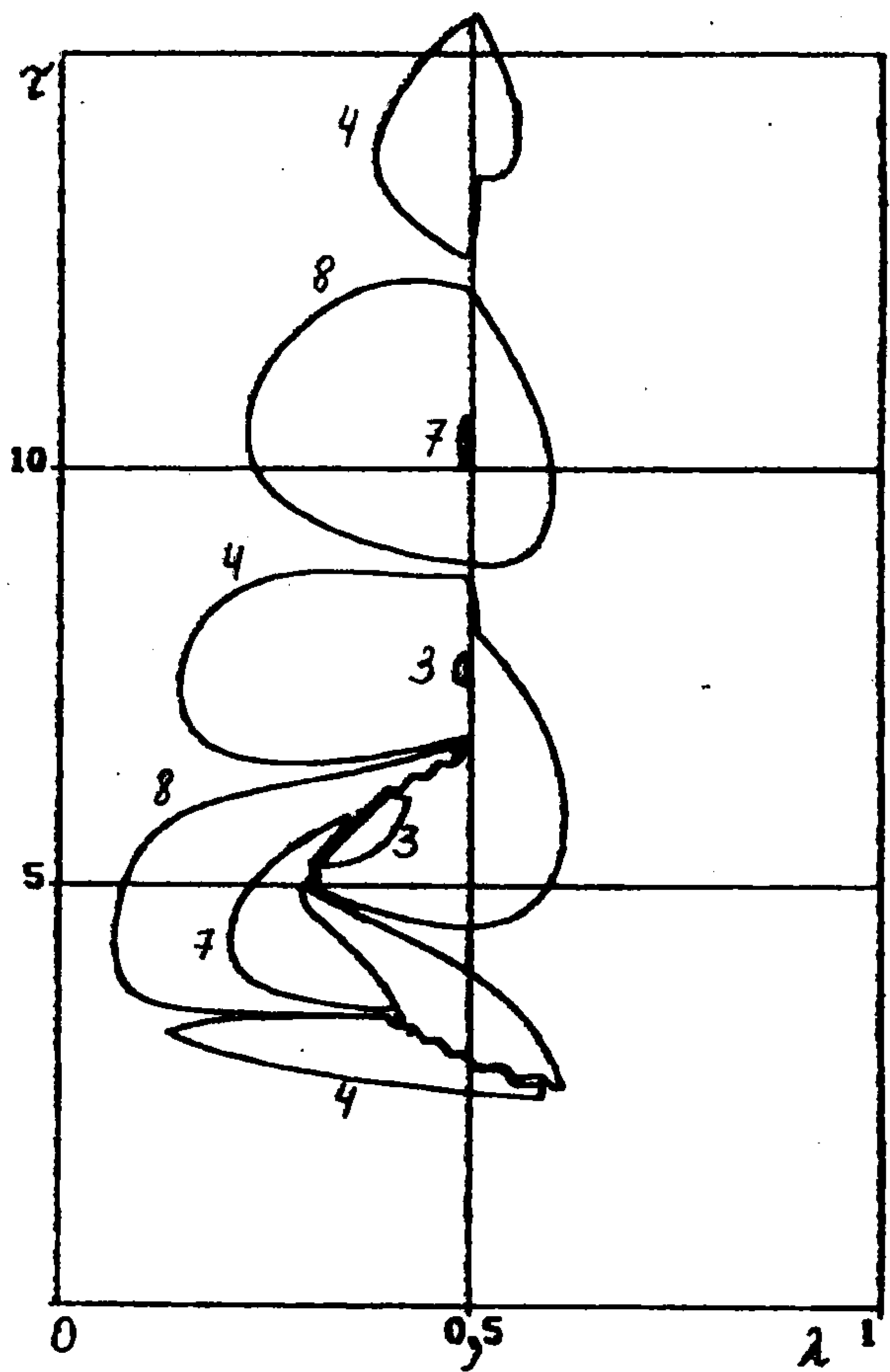
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

6. Аппроксимация функции φ при малых τ . Для малых значений τ будем использовать приближение

$$\varphi(\lambda, \tau) = \frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda\tau} - \tau + \frac{1}{k} \int_0^{k\tau} J_0(u) du + \lambda^2 k^2 \left(\frac{\tau^5}{5!} - \frac{9+3\lambda^2}{8} \frac{\tau^7}{7!} + \left(1 + \lambda^4 + \frac{k^2}{4} \right) \frac{\tau^9}{9!} + \dots \right) \quad (6.1)$$

которое получается, если в (1.6) заменить выражение $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$ на $\sqrt{\lambda^2 + k^2 \cos^2 u}$, разложить подынтегральную функцию по степеням τ , вычислить интегралы от четных степеней $\cos u$ и просуммировать по отдельности члены, не содержащие λ и не содержащие k . Заметим, что предельные переходы в формуле (6.1) при $\lambda \rightarrow 0$ или $k \rightarrow 0$ дают точные результаты.

7. Вычислительный эксперимент по проверке эффективности аппроксимационных формул. Результат вычисления функции $\varphi(\lambda, \tau)$ в формуле (1.6) обозначим через φ . Результат вычисления по аппроксимационной формуле (6.1) обозначим через $\varphi_{\tau \rightarrow 0}$, по аппроксимационной формуле (4.3) – через $\varphi_{\lambda \rightarrow 0}$, а по аппроксимационной формуле (5.2) – через $\varphi_{\lambda \rightarrow 1}$. На фиг. 1–4 по горизонтальной оси отложена величина λ , по вертикальной оси – переменная τ , расчеты проведены для $0 \leq \tau \leq 20$, $0 \leq \lambda \leq 1$. На фиг. 1–3 изображены линии уровней погрешностей аппроксимаций

$$\varepsilon = \varphi - \varphi_{\tau \rightarrow 0}, \quad \varepsilon = \varphi - \varphi_{\lambda \rightarrow 0}, \quad \varepsilon = \varphi - \varphi_{\lambda \rightarrow 1}$$

Цифры 1–4 около линий уровня соответствуют погрешностям 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} . Цифрам 5–8 соответствуют отрицательные погрешности -10^{-1} , -10^{-2} , -10^{-3} , -10^{-4} .

Если принять за единицу относительные затраты машинного времени для вычисления φ , то для вычисления аппроксимаций $\varphi_{\tau \rightarrow 0}$, $\varphi_{\lambda \rightarrow 0}$, $\varphi_{\lambda \rightarrow 1}$, затрачиваемое время будет соответственно равно 0,0023, 0,0046 и 0,0034. Эти времена получены для вычислений на равномерной сетке при $0 \leq \tau \leq 500$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Пусть

$$a(\tau) = 0,3 + 0,05846(\tau - 4,776)^2, \quad b(\lambda) = 4,796 - 3,739\lambda$$

На базе аппроксимаций $\varphi_{\tau \rightarrow 0}$, $\varphi_{\lambda \rightarrow 0}$, $\varphi_{\lambda \rightarrow 1}$, глобальная аппроксимация φ_* вычисляется для $0 \leq \tau < +\infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ по следующей программе:

если $a(\tau) < \lambda < 0,5$, то $\varphi_* = \varphi_{\lambda \rightarrow 1}$, если $\lambda < a(\tau)$, $\tau < 3,2975$, то $\varphi_* = \varphi_{\tau \rightarrow 0}$, если $\lambda < a(\tau)$, $\tau > 3,2975$, то $\varphi_* = \varphi_{\lambda \rightarrow 0}$, если $\lambda > 0,5$, $\tau < b(\lambda)$, то $\varphi_* = \varphi_{\tau \rightarrow 0}$, если $\lambda > 0,5$, $\tau > b(\lambda)$, то $\varphi_* = \varphi_{\lambda \rightarrow 1}$.

Абсолютная ошибка аппроксимации $\varepsilon = \varphi - \varphi_*$, изображенная на фиг. 4, варьируется во всей области изменения параметров τ , λ от $-0,0028$ до $0,0017$, в то время как сама функция φ изменяется в пределах от $-1,04$ до $1,46$. Зона с наихудшей аппроксимацией расположена в окрестности точки $\lambda = 0,5$, $\tau = 5$ и быстро убывает с увеличением τ . Среднее время вычисления φ_* составляет 0,0045 от времени вычисления φ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (962/96)

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А., Свешиников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 341 с.
2. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt1. Green's function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1977. 830 с.
4. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Москва–Долгопрудный

Поступила в редакцию
23.II.1995