УДК 532.5

© 1996 г. Ю.В. Шанько

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Найдены новые классы точных решений уравнений Эйлера, описывающие стационарные осесимметричные течения с закруткой. Приведены примеры решений, отвечающие течениям жидкости со свободной границей.

1. Рассмотрим уравнение для функции тока $\psi(z, r)$, описывающее установившиеся осесимметричные (с закруткой) течения идеальной несжимаемой жидкости [1], известное также в физике плазмы как уравнение Грэда–Шафранова

$$\psi_{zz} + \psi_{rr} - r^{-1}\psi_r = r^2 F - H \tag{1.1}$$

где F и H – произвольные функции от ψ. Будем искать решения ψ уравнения (1.1), такие, что для любой гладкой функции ϕ композиция $\chi = \phi \circ \psi$ также является решением некоторого уравнения

$$\chi_{zz} + \chi_{rr} - r^{-1}\chi_r = r^2 F_1(\chi) - H_1(\chi) \tag{1.2}$$

Решения, обладающие таким свойством, будем называть функционально-инвариантными. Функционально-инвариантные решения для волнового уравнения были построены в [2], а их групповая интерпретация дана в [3].

В дальнейшем полагаем, что $\psi_z \neq 0$, $\psi_r \neq 0$. Подставляя $\phi \circ \psi$ вместо χ в уравнение (1.2), получим

$$\phi'(\psi)(\psi_{zz} + \psi_{rr} - r^{-1}\psi_r) + \phi''(\psi)(\psi_z^2 + \psi_r^2) = r^2 F_1(\phi(\psi)) - H_1(\phi(\psi)) \tag{1.3}$$

Если $\phi'' \neq 0$, то из (1.1) и (1.3) следует уравнение

$$\psi_z^2 + \psi_r^2 = r^2 C_2 + C_1 \tag{1.4}$$

$$C_1(\psi) = -(H_1(\phi(\psi)) - \phi'(\psi)H(\psi)) / \phi''(\psi)$$

$$C_2(\psi) = (F_1(\phi(\psi)) - \phi'(\psi)F(\psi)) / \phi''(\psi)$$

Умножив уравнение (1.1) на ψ_z и вычтя из него продифференцированное по z и разделенное на 2 уравнение (1.4), приходим к уравнению

$$r\psi_z(\psi_r / r)_r - r\psi_r(\psi_r / r)_z = (A_2(\psi)r^2 + A_3(\psi))\psi_z \tag{1.5}$$

$$A_2(\psi) = F - C_2' / 2, \quad A_3(\psi) = -(H + C_1' / 2)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\psi_r = A_1(\psi)r + A_2(\psi)r^3 / 2 + A_3(\psi) r \ln r \tag{1.6}$$

Исследование на совместность уравнений (1.4) и (1.6) проводится стандартными методами. Выразив из (1.4) при помощи (1.6) ψ_z через ψ и r, после перекрестного дифференцирования получим

$$K_1 r\ln^2 r + K_2 r^3 \ln r + K_3 r\ln r + K_4 r^5 + K_5 r^3 + K_6 r = 0$$

$$K_1 = -2A_3^2, \quad K_2 = -8A_3A_2 + C_2'A_3 - 2C_2A_3'$$

$$K_3 = -4A_1A_3 + C_1'A_3 - 2C_1A_3', \quad K_4 = -6A_2^2 + C_2'A_2 - 2C_2A_2' \tag{1.7}$$

$$K_5 = -8A_1A_2 - 2A_2A_3 + C_1'A_2 + C_2'A_1 - 2C_1A_2' - 2C_2A_1'$$

$$K_6 = 2C_2 - 2A_1A_3 - 2A_1^2 + C_1'A_1 - 2C_1A_2'$$

В силу того, что $\psi_z \neq 0$, из уравнения (1.7) следует 6 уравнений $K_i = 0$. Согласно первому уравнению $H + C'_1/2 = 0$. Тогда второе и третье уравнения выполнятся тождественно, а уравнения с четвертого по шестое имеют вид

$$-6A_2^2 + C_2'A_2 - 2C_2A_2' = 0$$

$$-8A_1A_2 + C_1'A_2 + C_2'A_1 - 2C_1A_2' - 2C_2A_1' = 0 \tag{1.8}$$

$$2C_2 - 2A_1^2 + C_1'A_1 - 2C_1A_2' = 0$$

С учетом вышесказанного (1.6) можно переписать так:

$$\psi_r = A_1(\psi)r + A_2(\psi)r^3 \tag{1.9}$$

а функции F и H выражаются следующим образом:

$$F = C_2'/2 + 2A_2, \quad H = -C_1'/2 \tag{1.10}$$

Очевидно, всякое решение уравнений (1.4) и (1.9) является функционально-инвариантным. Можно показать, что уравнение (1.1) при учете соотношений (1.10) тождественно выполняется в силу уравнений (1.4) и (1.9). Таким образом, доказана

Теорема. Функция $\psi(z, r)$ является функционально-инвариантным решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям (1.4), (1.9), где A_i, C_i $(i = 1, 2)$ – решения системы (1.8).

2. Среди функционально-инвариантных решений можно выделить решения, отвечающие течениям жидкости со свободной границей. Если предположить, что давление зависит только от функции тока $p = p(\psi)$, то можно убедиться, что для любой постоянной ψ_0 условия существования свободной границы [4] для поверхности $\psi = \psi_0$ будут выполнены. Используя соотношение Бернулли для несжимаемой жидкости в осесимметричном случае

$$p + |\mathbf{u}|^2/2 = R(\psi)$$

приходим к заключению, что квадрат скорости зависит только от функции тока $|\mathbf{u}|^2 = T(\psi)$, что в свою очередь эквивалентно уравнению (1.4) при $C_1 \leqslant 0$. Таким образом, для всякого функционально-инвариантного решения ψ уравнения (1.1) поверхность $\psi(z, r) = \psi_0 = \text{const}$ может служить свободной границей при условии, что $C_1(\psi_0) \leqslant 0$.

3. Возникает задача нахождения решений системы (1.8). Рассмотрим сначала случай $A_2 = 0$. Тогда первое уравнение (1.8) удовлетворяется тождественно. Не нарушая общности можно положить $A_1 = 1$. Решения (1.1), отвечающие другим значениям A_1, могут быть получены как результат суперпозиции некоторой функции ϕ с решением, полученным для $A_1 = 1$. Второе и третье уравнения (1.8) значительно упрощаются:

$$C_2' = 0, \quad 2C_2 - 2 + C_1' = 0$$

Их решение $C_2 = k$, $C_1 = l + (2 - 2k)\psi$, где $k, l \in R$. Подставляя найденные значения в правые части уравнений (1.4), (1.9) и решая полученную переопределенную систему, находим

$$\psi = \begin{cases} r^2/2+\sqrt{l}z+\gamma, & k=1, l \geqslant 0 \\ r^2/2+(1-k)(z+\gamma)/2+l/(2-2k), & k \neq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

где γ – произвольная постоянная. В случае $k > 1$, $\psi_0 \geqslant l/(2k-2)$ поверхность $\psi = \psi_0$ (которая является однополостным гиперболоидом, если второе неравенство строгое и круговым конусом в противном случае) может рассматриваться как свободная граница. Как уже было упомянуто выше, композиция $\phi \circ \psi$, где ψ задается (3.1), является решением уравнения (1.1). При этом

$$F = -k\tau''/\tau'^3, \quad H = l\tau''/\tau'^3 + (1-k)\tau''\tau/\tau'^3 + (k-1)/\tau'$$

Здесь ϕ – произвольная функция, τ – функция обратная к ней.

Рассмотрим теперь случай $A_2 \neq 0$. Сделаем замену

$$A_1 = BA_2, \quad C_1 = (K+B)EA_2^2, \quad C_2 = EA_2^2$$

где $K(\psi)$, $E(\psi)$, $B(\psi)$ – новые неизвестные функции. Тогда система (1.8) будет эквивалентна следующей:

$$A_2E' = 6, \quad A_2EK' = E/K - 4B - 6K, \quad A_2KB' = 1 \tag{3.2}$$

Не нарушая общности, можно положить в уравнениях (3.2) $A_2 = \psi^3$. Тогда полученная система допускает оператор растяжения $X = 2E\partial_E + K\partial_K + B\partial_B - \psi\partial_\psi$, инвариантное решение относительно которого задается соотношениями

$$E = -3\psi^{-2}, \quad B = \pm 3\psi^{-1}, \quad K = \mp\psi^{-1}/3$$

Можно убедиться, что при $B = 3\psi^{-1}$, $K = -\psi^{-1}/3$ вещественных решений не существует, так как в этом случае из (1.4) следует, что $\psi_z^2 + \psi_r^2 < 0$. В случае $B = -3\psi^{-1}$, $K = \psi^{-1}/3$ из (1.4), (1.9) получаем систему для нахождения ψ

$$\psi_z^2 + \psi_r^2 = -3\psi^4r^2 + 8\psi^3, \quad \psi_r = \psi^3r^3 - 3\psi^2r$$

которая допускает оператор $Y = z\partial_z + r\partial_r - 2\psi\partial_\psi$. Решения инвариантные относительно оператора Y задаются формулой

$$\psi = \frac{1}{r^2}\left(1 \pm \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) \tag{3.3}$$

Очевидно, выбор знака не существен. Другие решения системы либо тривиальны (т.е. не зависят от z), либо получаются из (3.3) сдвигом вдоль оси z.

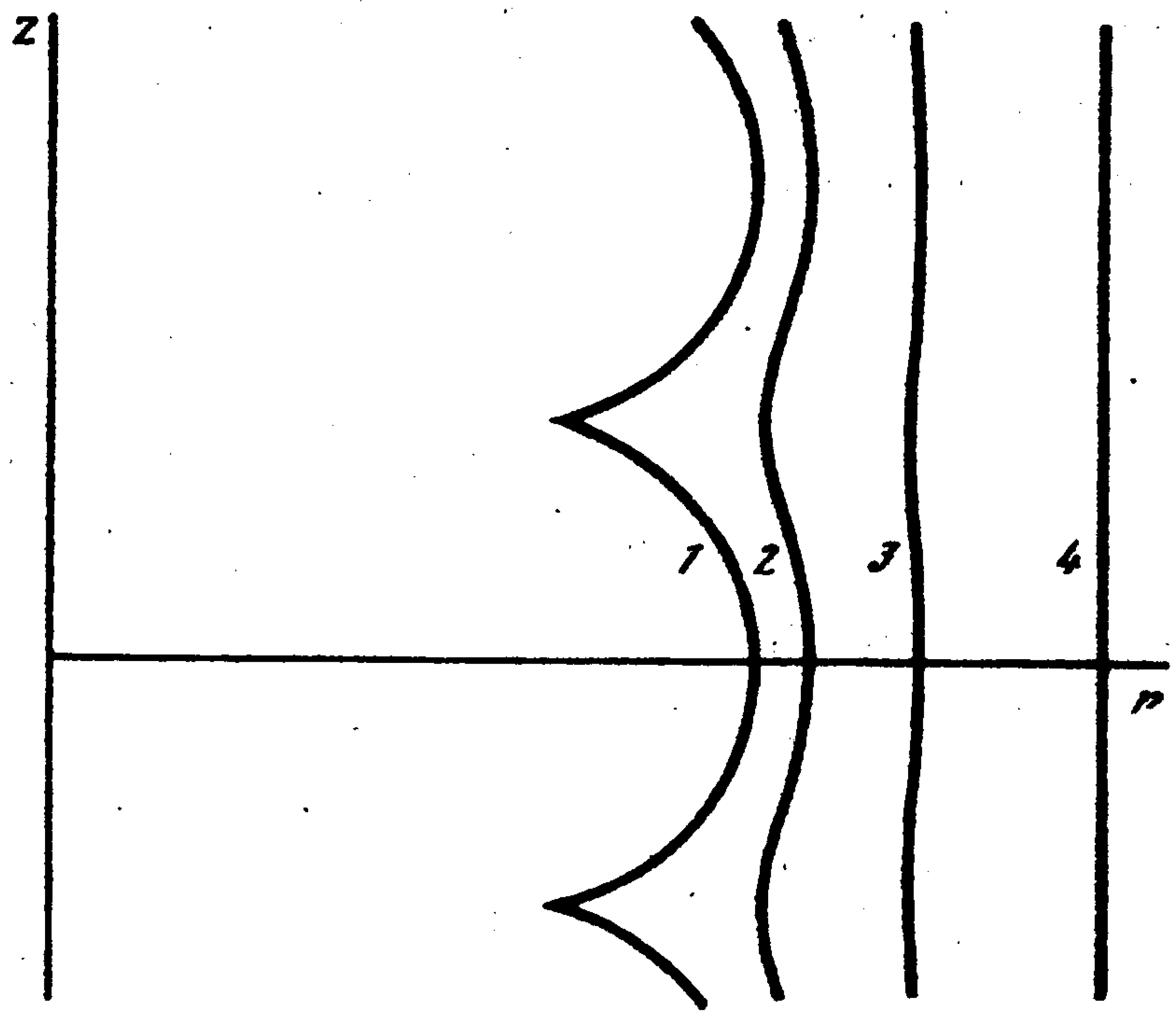
Функция $\phi \circ \psi$ является решением уравнения (1.1) при

$$F = -4\tau^3/\tau' + 3\tau^4\tau''/\tau'^3, \quad H = 12\tau^2/\tau' - 8\tau^3\tau''/\tau'^3$$

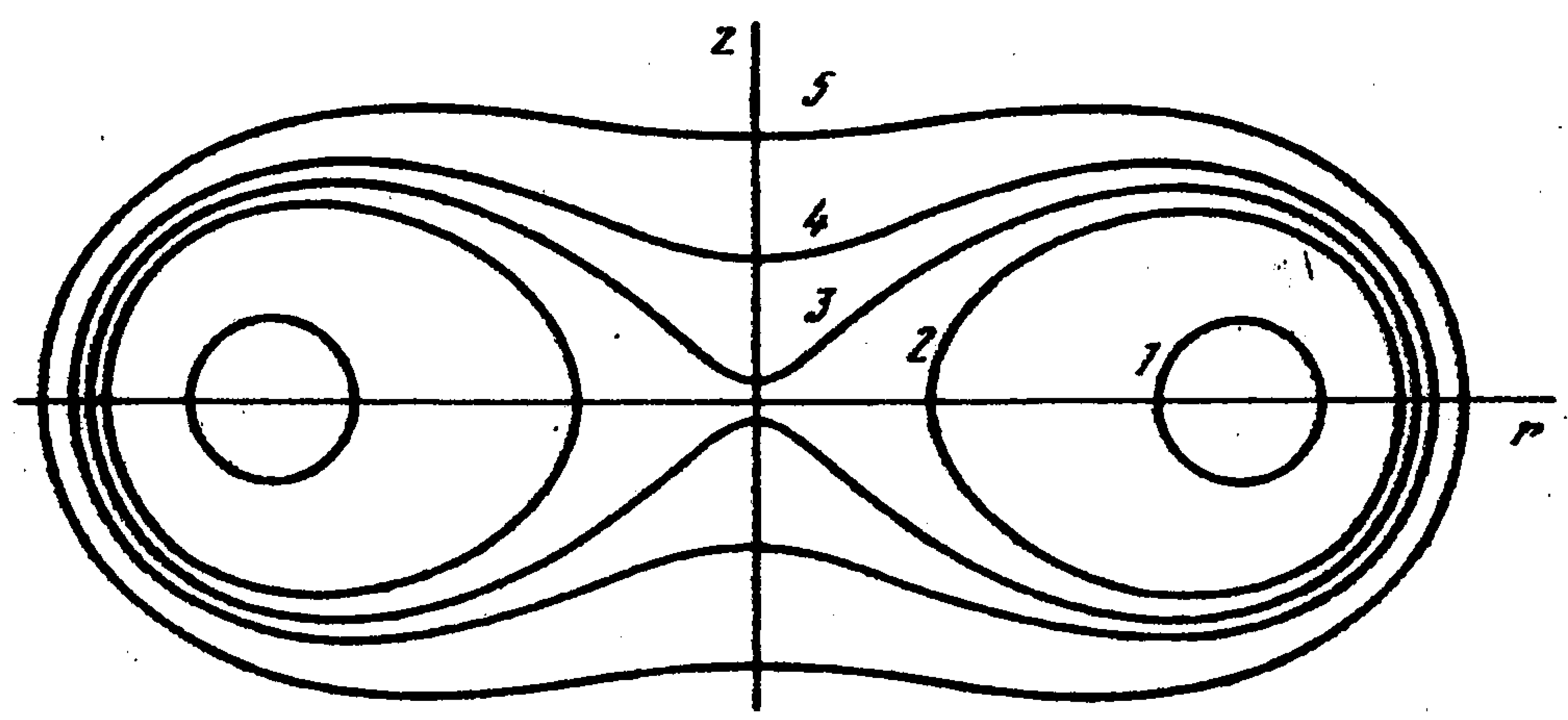
Здесь, как и ранее, $\tau(\psi)$ – функция обратная к ϕ.

Следует отметить, что решения вида $\phi \circ \psi$ при $\phi = 2\ln\psi + \delta$ и $\phi = \varepsilon\psi^{2/(n-1)}$, где $\varepsilon, \delta \in R$, являются инвариантными решениями относительно допускаемых операторов $z\partial_z + r\partial_r - 4\partial_\psi$ и $z\partial_z + r\partial_r - 4(n-1)^{-1}\psi\partial_\psi$ соответственно, которые были впервые найдены в [5].

4. Кроме описанных выше не удалось найти и других явных представлений для функционально-инвариантных решений уравнения (1.1). Однако численно можно построить линии уровня функции ψ, отвечающие различным функционально-инвариантным решениям. Таким образом можно получить представление о поведении траекторий соответствующих решений. Для построения отдельной линии уровня нет



Фиг. 1



Фиг. 2

необходимости решать систему (1.8) – достаточно использовать уравнение

$$dz / dr = -\psi_r / \psi_z$$

Изменение начальных точек при построении линий уровня осуществлялось вдоль прямой $z = z_0$ = const. При этом наряду с решением уравнения (1.9) возникала необходимость параллельно решать систему (1.8).

Далее приводятся некоторые результаты расчетов. Везде для определенности полагали $E = \psi$, тогда из первого уравнения системы (3.2) следовало, что $A_2 = 6$. Кроме того, начальная точка для построения линий уровня выбиралась на оси Oz. При построении линий уровня, изображенных на фиг. 1, выбирались начальные данные $r = 2$, $B = -1{,}98$, $E = 8{,}17$, $K = -1{,}99 \cdot 10^{-2}$. Кривым *1–4* соответствуют значения функции тока ψ = 8,17; 11,1; 17,0; 29,1. Для каждой из изображенных линий уровня $\psi = \psi_0 C_1(\psi_0) \leqslant 0$. Следовательно, каждой из них можно поставить в соответствие поверхность, являющуюся свободной границей. Линии тока, очевидно, не замкнуты. Для линий уровня на фиг. 2 начальные данные были следующие: $r = 2{,}829$, $B = -5{,}84$, $E = 5{,}98$, $K = 4{,}10$. Для кривых *1–5*: ψ = 5,98; 34,6; 44,2; 53,7; 82,5 соответственно. Для каждой линии уровня $\psi = \psi_0$, которая не пересекает ось вращения, также выполняется условие $C_1(\psi_0) \leqslant 0$. Полученное решение можно интерпретировать как движение жидкости с тороидальной свободной границей.

5. Рассмотрим более общий вид уравнений (1.4), (1.9)

$$\psi_r = A(\psi, r), \quad \psi_z^2 + \psi_r^2 = C(\psi, r) \tag{5.1}$$

Условие совместности этих уравнений задается соотношением

$$C_r - 2AA_r + C_\psi A - 2CA_\psi = 0 \tag{5.2}$$

Уравнение (1.1) будет выполняться в силу уравнений (5.1) тогда и только тогда, когда

$$C_\psi / 2 + A_r - A / r = Fr^2 - H \tag{5.3}$$

Уравнения (5.1)–(5.3) можно рассматривать как групповое расслоение [6] уравнения (1.1) относительно однопараметрической группы, порожденной оператором ∂_z. При этом уравнения (5.1) образуют автоморфную систему, а уравнения (5.2), (5.3) – разрешающую.

Предлагается искать решения системы (5.2), (5.3) в виде

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i(\psi)S_i(r), \quad C = \sum_{j=1}^{n} C_j(\psi)T_j(r)$$

где m и n – некоторые натуральные числа. Функционально-инвариантным решениям отвечает случай $m = n = 2$. Можно показать, что решениям вида $\psi = f(z)g(r)$ при $F = A\psi$, $H = B\psi\ln\psi$ [5], соответствует случай $m = 1$, $n = 3$. Оказывается, что при $m = 1$, $n = 3$ существуют и другие решения уравнений (5.2), (5.3) указанного вида.

Например, пусть $S_1 = r^{-1}$, $T_1 = r^{-2}$, $T_2 = 1$, $T_3 = r^2$. Подставив указанные представления для A и C в (5.2) и (5.3) получим уравнения

$$(-2C_1 + 2A_1^2 + C_1'A_1 - 2C_1A_1')r^{-3} + (C_2'A_1 - 2C_2A_1')r^{-1} + (2C_3 + C_3'A_1 - 2C_3A_1')r = 0$$

$$(C_1'/2 - 2A_1)r^{-2} + C_2'/2 + C_3'/2r^2 = Fr^2 - H$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r и решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, находим

$$C_1 = (k\psi^2 - 1)^2 / k, \quad C_2 = \beta\psi^2(k\psi^2 - 1)^2$$

$$C_3 = \alpha\psi^4(k\psi^2 - 1), \quad A_1 = \psi(k\psi^2 - 1)$$

$$F = \alpha\psi^3(3k\psi^2 - 2), \quad H = \beta(k\psi^2 - 1)(\psi - 3k\psi^3); \quad \alpha, \beta, k \in R$$

Функция ψ задана с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Кроме того, не указано решение соответствующее линейному уравнению вида (1.1). Решение уравнения (1.1) при указанных A и C дается формулой

$$\psi = (k(1 + Mr^2))^{-1/2}$$

где M – функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$M_z^2 = 4M^3 + 4\beta M^2 - 4\alpha M / k$$

Автор благодарит О.В. Капцова за советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. // Тр. сейсмол. ин-та, 1932. Вып. 20. С. 1–37.
3. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 238 с.
4. *Налимов В.И., Пухначев В.И.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975. 173 с.
5. *Капцов О.В.* Стационарные вихревые структуры в идеальной жидкости. // ЖЭТФ, 1990. Т. 98. Вып. 2. С. 532–541.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

Красноярск

Поступила в редакцию
10.II.1995