

УДК (532.5 + 539.3):534.1

© 1996 г. А.Г. Куликовский, И.С. Шикина

**О ПЕРЕХОДЕ К НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ
ТЕЧЕНИЯХ БЕЗ ДИССИПАЦИИ**

Найден критерий, позволяющий определить, в каких случаях нарушение условий локальной устойчивости приводит к неустойчивости слабо-неоднородного течения без диссипации.

Рассмотрим устойчивость течений, медленно зависящих от одной пространственной переменной x , т.е. течений у которых все величины зависят от $X = x/L$, где характерный масштаб длины L достаточно велик (фактически нужно, чтобы масштаб L был много больше характерных длин возмущений, которые будут рассматриваться ниже). Если "заморозить" параметры течения, сделав их постоянными и равными параметрам течения при некотором значении X , то можно рассмотреть возмущения вида $e^{ikx - i\omega t}$ и получить дисперсионное уравнение, в которое X будет входить как параметр

$$\Phi(\omega, k, X) = 0 \quad (1)$$

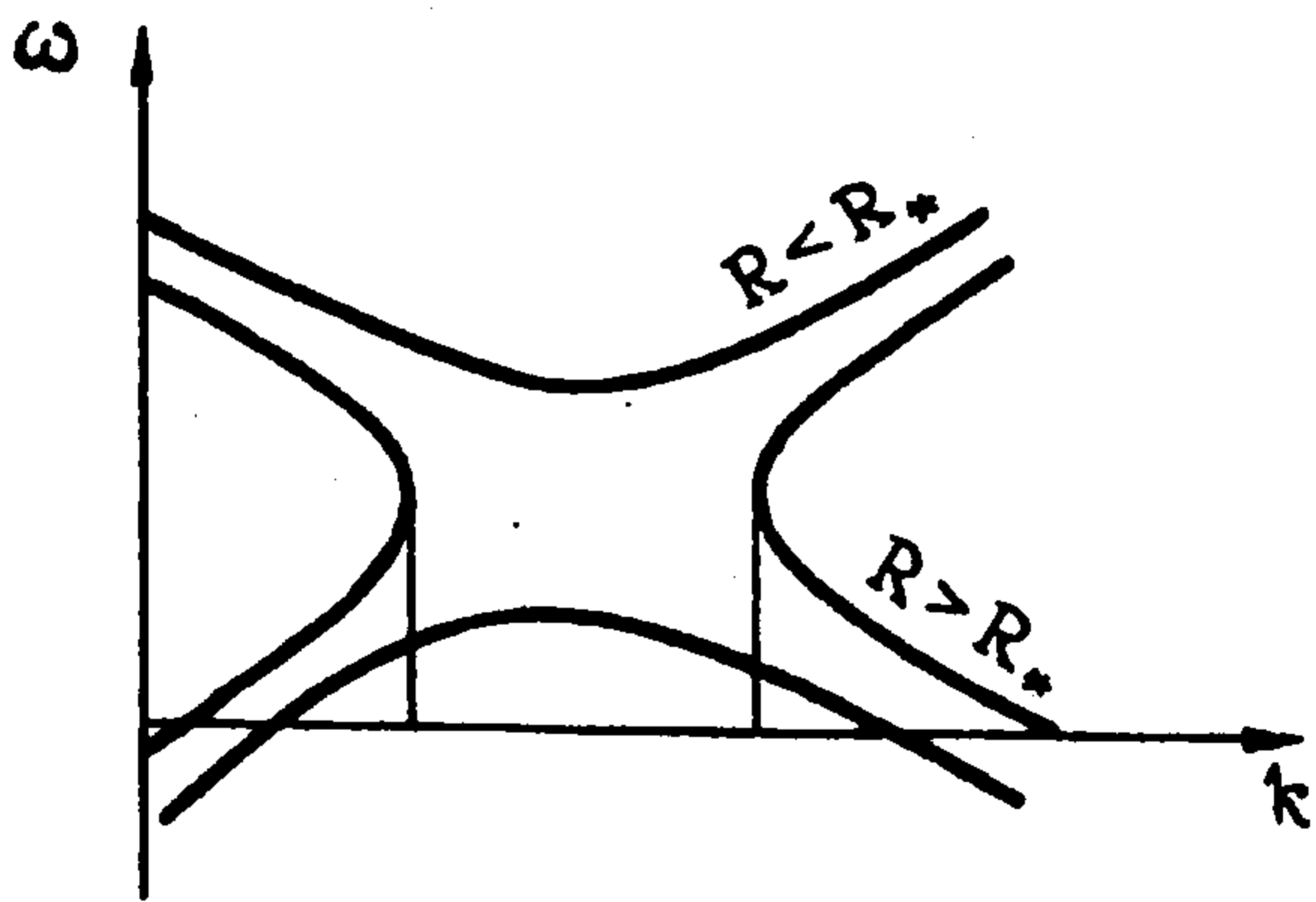
Из уравнения (1) можно найти частоту ω , представляющую собой многозначную аналитическую функцию k и X . Будем рассматривать случай, когда при действительных X и k уравнению (1) удовлетворяют действительные или комплексно-сопряженные значения ω . Если уравнение (1) представляет собой многочлен по k и ω , то рассматриваемый случай соответствует действительности коэффициентов этого многочлена. Это типичная ситуация для течений без диссипации (см., например, [1]). В рассматриваемом случае замороженное течение будет локально устойчивым, если при произвольно выбранном X все ω действительны.

Пусть течение зависит от некоторого параметра R , при переходе которого через R_* происходит переход к неустойчивости. Будем полагать, что переход к локальной неустойчивости происходит следующим образом. При увеличении R на оси X появляется маленький интервал (X_1, X_2) , для точек которого имеется маленький интервал действительных значений k с комплексными значениями ω . При $X \in (X_1, X_2)$ на графике зависимости действительных ω от действительных k происходит перезамыкание ветвей многозначной функции $\omega(k)$ (в дальнейшем будем считать, что происходит перезамыкание двух ветвей) и образование отрезка на оси k , где число действительных значений функции $\omega(k)$ меньше, чем было раньше (фиг. 1,2). Ниже будет рассмотрен такой переход и будет выяснено, в каких случаях он приводит к неустойчивости всего течения, а в каких – не приводит.

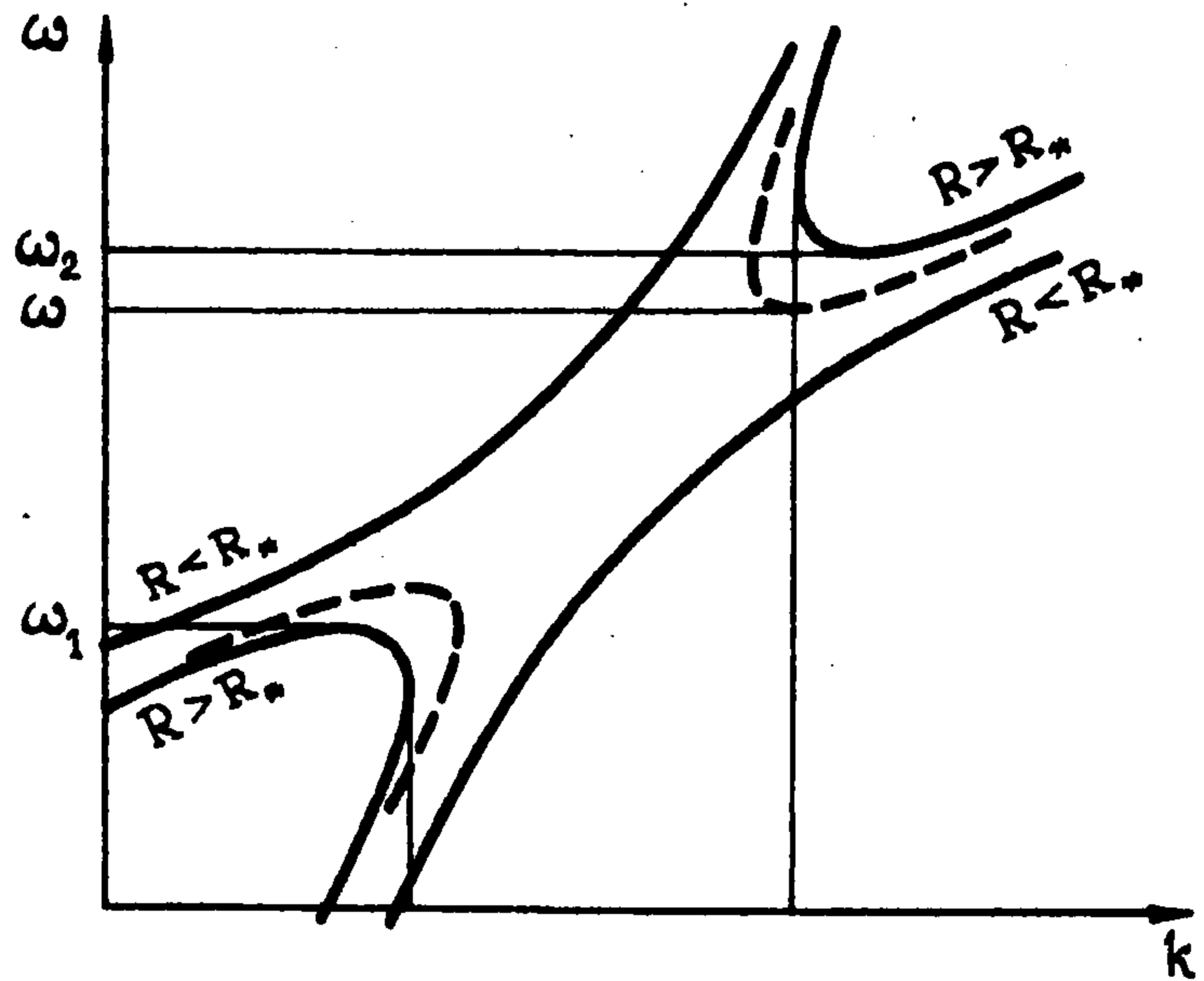
При появлении описанной выше локальной неустойчивости возможны два варианта: эта локальная неустойчивость абсолютна или конвективна [2,3]. Критерий, различающий абсолютную неустойчивость и конвективную в недиссипативной среде, можно сформулировать следующим образом. Если одновременно с появлением интервала на оси k с комплексными значениями ω на оси ω не появляется интервал с комплексными k (фиг. 1), то неустойчивость абсолютна. Если

же появление интервала на оси k с комплексными значениями ω сопровождается появлением интервала на оси ω с комплексными значениями k (интервал (ω_1, ω_2) на фиг. 2), то неустойчивость конвективна [3]. Подчеркнем, что понятия абсолютной и конвективной неустойчивости относятся к течению с замороженными параметрами.

Для рассматриваемого локального перехода к неустойчивости при $R = R_*$ и единственном значении $X = X_*$ на плоскости k, ω имеется точка $\omega = \omega_*, k = k_*$, в которой



Фиг. 1



Фиг. 2

пересекаются ветви графика $\omega(k)$. При малой закритичности, т.е. при малых $R - R_* > 0$ в окрестности этой точки дисперсионное уравнение (1) можно разложить в ряд и с точностью до главных членов записать в виде

$$(\omega' - Uk')^2 = Ak'^2 - \alpha + \beta X'^2$$

$$\omega' = \omega - \omega_*, \quad k' = k - k_*, \quad X' = X - X_* \quad (2)$$

Здесь $U, A > 0, \beta > 0$ – постоянные, величина α зависит от R , причем $\alpha(R_*) = 0, \alpha(R) > 0$ при $R > R_*$. Очевидно, что при $\alpha - \beta X'^2 > 0$ имеет место локальная неустойчивость.

Рассмотрим сначала случай, когда возникающая при переходе R через R_* локальная неустойчивость абсолютна. Тогда при R , близких к R_* , найдется точка X , в которой одновременно выполняются соотношения

$$\frac{\partial \omega'}{\partial k'} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial X'} = 0 \quad (3)$$

Как будет показано ниже, в рассматриваемом случае возникает неустойчивость, связанная с выполнением равенств (3) и образованием собственной функции на двух близких точках поворота. Подобная неустойчивость рассматривалась ранее в [4–6].

При абсолютной неустойчивости коэффициенты равенства (2) удовлетворяют условию $U^2 < A$. При выполнении последнего неравенства, а также при $\alpha - \beta X'^2 > 0$ из первого уравнения (3) и уравнения (2) можно найти

$$k' = k'_s(X') \equiv -\frac{iU\sqrt{\alpha - \beta X'^2}}{\sqrt{A(A - U^2)}}, \quad \omega' = \omega'_s(X') \equiv i\sqrt{\frac{(\alpha - \beta X'^2)(A - U^2)}{A}} \quad (4)$$

В (4) выбрана ветвь ω' , для которой $\text{Im } \omega' > 0$ в седловой точке $k'_s(X')$.

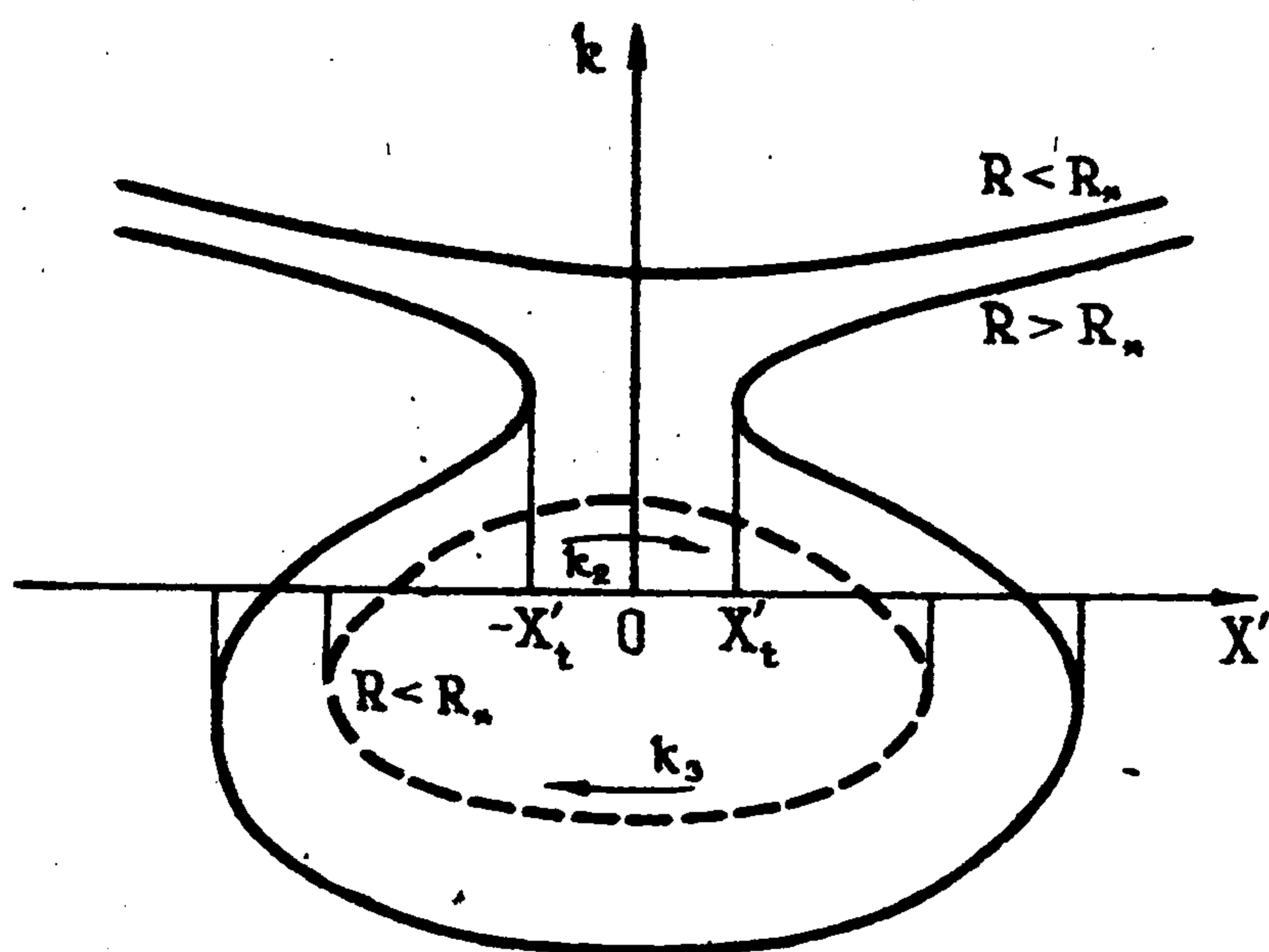
Второму уравнению (3) удовлетворяет $X' = 0$. Таким образом, обоим уравнениям (3) удовлетворяют $X' = 0$, $\omega' = \omega'_s(0)$, $k' = k'_s(0)$. В точке $X' = 0$ аналитическая функция $\omega'_s(X')$ имеет производную, равную нулю, а гармоническая функция $\text{Im } \omega'_s(X')$ имеет седловую точку. Как следует из (4), $\text{Im } \omega'_s(X') < \text{Im } \omega'_s(0)$ для точек действительной оси X' и $\text{Im } \omega'_s(X') > \text{Im } \omega'_s(0)$ для точек мнимой оси X' . При этих условиях для возмущений рассматриваемого неоднородного течения (зависящего от x/L) существуют собственные частоты ω' , близкие к $\omega'_s(0)$ (так что $\omega' - \omega'_s(0) = O(1/L)$). Собственная функция связана только с двумя ветвями $k(\omega, X)$ и двумя точками поворота на плоскости X , лежащими на действительной оси X вблизи точки $X = X_*$. Эти ветви $k'_1(\omega, X)$ и $k'_2(\omega, X)$ соответствуют волнам, распространяющимся в разные стороны и описываются уравнением (2). В точках поворота указанные значения k' совпадают, а сами точки поворота при $R = R_*$ сливаются в седловую точку $X = X_*$. Построение собственной функции дано в [6] для несколько другого дисперсионного уравнения, но оно легко переносится на рассматриваемый случай.

Можно проверить, что при чисто мнимых ω' , несколько меньших по модулю, чем $|\omega'_s(0)|$, имеются две точки поворота $\pm X'_r$, лежащие на действительной оси X' . Это видно из второго равенства (4), если рассматривать его как уравнение относительно X' . Из (2) следует, что между точками поворота разность значений $k'_2 - k'_1$ действительна, а за пределами отрезка $[-X'_r, X'_r]$ она становится комплексной. При больших L это позволяет стандартным методом ВКБ [7] построить собственную функцию, представляющую собой на отрезке $[-X'_r, X'_r]$ сумму двух слагаемых пропорциональных соответственно $\exp(i \int k_1(\omega, x) dx)$ и $\exp(i \int k_2(\omega, x) dx)$. Эта собственная функция затухает вне отрезка $[-X'_r, X'_r]$. Собственные частоты ω' должны удовлетворять уравнению [8]

$$\int_{-x_r}^{x_r} [k_1(\omega', x) - k_2(\omega', x)] dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

где n – целое число, $x_r = LX'_r$. Значение ω' , удовлетворяющее этому уравнению, может быть выбрано тем ближе к $\omega'_s(0)$, чем больше L .

Рассмотрим теперь случай, когда при $R > R_*$ возникает локальная неустойчивость, которая является конвективной (фиг. 2). При этом в соотношении (2) $U^2 > A$ и, что самое главное, ветвление функции $k(\omega, X)$ имеет место для волн, движущихся в одном и том же направлении. Будем считать, в соответствии с фиг. 2, что они распространяются направо. В этом случае для действительных ω , таких, что $\omega_1 < \omega < \omega_2$ (где (ω_1, ω_2) – интервал значений ω , которым соответствуют комплексные k при $X' = 0$), имеются две точки поворота, соответствующие действительным значениям $X' = \pm X'_r$, при которых на фиг. 2 прямая $\omega = \text{const}$ касается графика дисперсионной кривой $\omega(k)$. При действительных ω и X между этими точками поворота величины k_1 и k_2 принимают комплексно-сопряженные значения. При этом одна из ВКБ-волн $\exp(i \int k dx - i \omega t)$ при своем движении (с ростом x) усиливается ($\text{Im } k'_1 < 0$), а другая за счет множителя $\exp(i \int k dx)$ ослабляется ($\text{Im } k'_2 > 0$).



Фиг. 3

В точках поворота происходит обычное, такое же как для уравнений второго порядка, превращение волн с действительными k в волны с комплексными k (явление Стокса). Если к точке $X' = -X'_t$ слева приходят волны, соответствующие действительным $k'_1(\omega, X)$ и $k'_2(\omega, X)$, то в общем случае справа от этой точки также имеются обе волны, соответствующие комплексным $k'_1(\omega, X)$ и $k'_2(\omega, X)$. Для того чтобы правее точки поворота усиливаю-

щаяся волна, соответствующая $k'_1(\omega, X)$, отсутствовала, необходима жесткая связь между амплитудами и фазами приходящих к этой точке волн. Этот случай будем считать исключительным и рассматривать не будем. Тогда из возникающей в точке $X' = -X'_t$ пары волн одна придет к точке X' , усилившись, а вторая ослабев. Если длина отрезка оси x между точками поворота достаточно велика, так что $\text{Im}(\int k dx) \gg 1$, где интегрирование ведется между точками поворота, то ослабевшей волной в точке X' можно пренебречь. Усилившаяся волна превратится в точке X' в две волны с одинаковыми амплитудами, которые соответствуют действительным $k'_1(\omega, X)$ и $k'_2(\omega, X)$, причем обе эти волны распространяются направо. Таким образом, отрезок $[-X'_t, X']$ между точками поворота действует как усилитель волн. Это соответствует представлению о механизме конвективной неустойчивости как об усилителе [3]. Очевидно, этот же усилительный механизм будет действовать не только при действительных ω , но и при ω с не слишком большими $\text{Im} \omega > 0$.

Однако наличие усилителя недостаточно для возникновения неустойчивости. Необходима еще обратная связь. Нужно, чтобы усилившиеся волны снова попали на вход усилителя. Поскольку локальная неустойчивость согласно предположению имеется только на одном отрезке оси X , то возвращение сигнала на вход усилителя может осуществляться только за счет отражений волн, соответствующих ветвям $k(\omega)$, действительным при действительных ω . Если изобразить график действительных $k(\omega, X)$ при заданном действительном ω , то для образования растущего со временем возмущения необходимо, чтобы хотя бы одна из ветвей $k_1(X)$ или $k_2(X)$ представляла при $R < R_*$ часть замкнутой кривой (штриховая линия на фиг. 3). В этом случае еще при $R < R_*$ существуют собственные функции, соответствующие действительным значениям ω [9]. Эта собственная функция для изображенного на фиг. 3 случая состоит из идущих в разные стороны волн, соответствующих $k_2(\omega, X)$ и $k_3(\omega, X)$, взаимно превращающихся друг в друга в точках поворота (в точках поворота касательные на графике $k(X)$ вертикальны). При $R > R_*$ в эту цепочку волн вставляется описанный выше усилитель, приводящий к росту возмущений со временем. Подобное поведение возмущений имело место в конкретной задаче [10].

Если при $R < R_*$ нет цепочки волн с действительными k (т.е. нет собственных функций, соответствующих действительным ω), то при малых $R - R_* > 0$ не возникает неустойчивость, поскольку нет эффективной обратной связи.

Заметим, что, вообще говоря, могут также существовать точки поворота, лежащие в комплексной плоскости X . Однако коэффициенты отражения от таких точек поворота экспоненциально малы [7]. При малых $R - R_*$ и соответственно малых X' , усиление волн на отрезке $[-X', X']$ будет также мало и недостаточно, чтобы появилось растущее возмущение. Оно может появиться при больших $R - R_*$, когда усиление волн оказывается большим и растущая цепочка волн образуется несмотря на малость коэффициентов отражения от комплексных точек поворота. Этот случай здесь не рассматривается.

Таким образом, показано, что в случае, когда дисперсионное уравнение таково, что действительным k и X соответствуют действительные или комплексно-сопряженные значения ω , появление области локальной неустойчивости на оси X приводит к возникновению растущих возмущений неоднородного течения в двух случаях: а) когда появившаяся локальная неустойчивость абсолютна, б) когда появившаяся при $R > R_*$ локальная неустойчивость конвективна, но при $R < R_*$ существовала цепочка взаимно превращающихся волн, соответствующих действительным ω . В остальных случаях при достаточно малой закритичности течение останется устойчивым по линейному приближению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17355).

ЛИТЕРАТУРА

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
3. Ахиезер А.И., Половин Р.В. Критерии нарастания волн // Успехи физ. наук. 1971. Т. 104. Вып. 2. С. 185-200.
4. Иорданский С.В. Устойчивость неоднородных состояний и континуальные интегралы // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 7. С. 180-189.
5. Huerre P., Monkewitz P.A. Local and global instabilities in spatially developing flows // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc., 1990. V. 22. P. 473-537.
6. Chomaz J.-M., Huerre P., Redekopp L.G. // A frequency selection criterion in spatially developing flows // Stud. in Appl. Math. 1991. V. 84. № 2. P. 119-144.
7. Заславский Г.М., Мейтлиц В.П., Филоненко Н.Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 117 с.
8. Рухадзе А.А., Силин В.П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы // Успехи физ. наук. 1964. Т. 82. Вып. 3. С. 499-535.
9. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 553 с.
10. Куликовский А.Г. О потере устойчивости слабо неоднородными течениями в протяженных областях. Возникновение поперечных колебаний трубы с текущей в ней жидкостью // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 93-99.