УДК 531.01:629.78

© 1996 г. Д.М. Азимов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УЧАСТКОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТЯГИ ТРАЕКТОРИЙ РАКЕТЫ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Рассматривается вариационная задача Майера об определении оптимальных траекторий ракеты, движущейся с постоянной скоростью истечения и ограниченным секундным расходом массы в ньютоновском поле. Для плоских участков промежуточной тяги на основе канонической системы уравнений вариационной задачи и свойств функции переключения получаются новые аналитические решения, представляющие собой некоторые спиральные траектории. В случае движения с фиксированным временем при произвольной угловой дальности эти решения удовлетворяют необходимому условию оптимальности Роббинса. В качестве примера рассматривается задача о минимизации характеристической скорости перелета между эллиптическими орбитами.

1. Как известно, оптимальная траектория ракеты в ньютоновском поле может состоять из участков нулевой тяги (НТ), промежуточной тяги (ПТ) и максимальной тяги (МТ) [1]. В сферической системе координат с центром в центре притяжения движение ракеты на указанных участках определяется на основе решения канонической системы уравнений вариационной задачи Майера [2]:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{cm}{M}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} - \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{M} = -m$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}_r, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{\lambda} - 3\frac{\mu}{r^5}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r})\mathbf{r}, \quad \dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2}\lambda \tag{1.1}$$

с гамильтонианом

$$H = -(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{r})\frac{\mu}{r^3} + (\boldsymbol{\lambda}_r\mathbf{v}) + \varkappa m$$

где $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ – радиус-вектор, проведенный из центра притяжения, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость, M – масса, $c = \text{const}$ – скорость истечения газов, $m(0 \leqslant m \leqslant \bar{m})$ – секундный расход массы, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – базис-вектор, $\boldsymbol{\lambda}_r = (\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ – вектор, сопряженный радиус-вектору, λ_7 – множитель, сопряженный массе, $\varkappa$ – функция переключений. Единичный вектор $\mathbf{l} = \boldsymbol{\lambda}/\lambda$, направление которого совпадает с направлением вектора тяги и величина m считаются управляющими переменными. Составляющие всех векторов записаны в сферической системе координат.

Известно, что появление участков ПТ представляет собой вырожденный случай вариационной задачи [3]. Несмотря на то, что к настоящему времени для участков ПТ известны такие аналитические решения, как спиральные [1, 4], круговые [5] и сферические траектории [6][1], вопросы существования других решений для этих участков и

[1] *См. также*: *Азимов Д.М.* Исследование оптимальных траекторий в центральном ньютоновском поле: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1991. 13 с.

их оптимальности остаются нерешенными. Здесь покажем, что в плоском случае первые интегралы канонической системы уравнений вариационной задачи

$$H = \lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r} + \lambda_4 v_1 + \lambda_5\frac{v_2}{r} = C$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2\lambda_4 r + c\lambda \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - 3Ct = C_1 \tag{1.2}$$

$$\lambda_7 M = c\lambda = C_2, \quad \lambda_5 = C_3$$

где C, C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования, и инвариантные соотношения

$$\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_2^2\frac{v_1}{r} + \lambda_5\frac{\lambda_2}{r} = 0 \tag{1.3}$$

$$\lambda_4^2 + \left(\lambda_1\frac{v_2}{r} - \lambda_2\frac{v_1}{r} + \frac{\lambda_5}{r}\right)^2 = \lambda^2\frac{\mu}{r^3} - 3\lambda_1^2\frac{\mu}{r^3} \tag{1.4}$$

$$(\lambda^2 - 5\lambda_1^2)\, v_1 + 2\lambda_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - 4\lambda_1\lambda_4 r = 0 \tag{1.5}$$

получающиеся из условия тождественности нулю функции переключений [1], позволяют получить новые аналитические решения канонической системы уравнений для участков ПТ в ньютоновском поле и исследовать их на оптимальность.

Так, исключая λ_4 из первого уравнения (1.2) и соотношения (1.4), с помощью (1.3) получим уравнения

$$(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1)^2 + \lambda_5(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1) = C\lambda_1 r + \lambda_1^2\frac{\mu}{r}$$

$$(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5)^2 = \lambda_1^2\frac{\mu}{r} - 3\mu\frac{\lambda_1^4}{r\lambda^2}$$

из которых следует уравнение относительно r

$$C^2\lambda^4\lambda_1^2 r^4 + 6\mu C\lambda^2\lambda_1^5 r^2 + (3\mu\lambda^2\lambda_1^4\lambda_5^2 - \mu\lambda\lambda_1^2\lambda_5^2)r + 9\mu^2\lambda_1^8 = 0 \tag{1.6}$$

В зависимости от знака дискриминанта

$$Q = \mu^4\frac{\lambda_5^4}{C^8}\left(3\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} - 1\right)^2\left[\frac{\lambda_5^4}{256}\left(3\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} - 1\right)^2 - \mu C\frac{\lambda_1^9}{\lambda^6}\right]$$

и знака величины $\lambda_1 C$ уравнение (1.6) может иметь следующие решения.

При $Q \geqslant 0$ и $\lambda_1 C < 0$

$$r = F_1 + \left(\frac{F}{F_1}\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

где

$$F = \frac{\lambda_5^2\mu}{2C^2}(1 - 3s^2), \quad F_1 = \left[-\frac{2\mu\lambda s^3}{C}(1 + 2\operatorname{cosec}(2\alpha))\right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{1/3}, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 1 + 2\operatorname{cosec}(2\alpha) > 0$$

$$\sin\beta = \frac{16\lambda^3 s^9}{16\mu\lambda^3 s^9 - \lambda_5^4(3s^2-1)^2 / C}, \quad s = \sin\varphi$$

Если

$$1 + 2\operatorname{cosec}(2\alpha) \leq 0$$

то участки ПТ не имеют действительных решений.

При $Q < 0$ и $\lambda_1 C > 0$

$$r = F_2 + \left(\frac{F}{F_2}\right)^{1/2} \tag{1.8}$$

где

$$F_2 = \left[\frac{2\mu\lambda s^3}{C}\left(2\cos\frac{\alpha}{3} - 1\right)\right]^{1/2}, \quad 2\cos\frac{\alpha}{3} - 1 > 0$$

$$\cos\alpha = -\frac{16\mu\lambda^3 s^9 - \lambda s^4(1-3s^2)^2/(8C)}{16\mu\lambda^3 s^9}$$

Если

$$2\cos\frac{\alpha}{3} - 1 \leq 0$$

то

$$r = F_3 + \left(\frac{F}{F_3}\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

где

$$F_3 = \left[\frac{2\mu\lambda s^3}{C}\left(1 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{1/2}, \quad 1 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

В случае невыполнения последнего неравенства участки ПТ не имеют действительных решений. Пусть с помощью одной из формул (1.7)–(1.9) найдена величина радиус-вектора

$$r = R(\varphi) \tag{1.10}$$

где φ – угол между базис-вектором и перпендикуляром к радиус-вектору в координатной системе, выбранной Лоуденом [1]. Тогда остальные решения канонической системы при учете системы (1.1), последних двух уравнений (1.2) и соотношений (1.3)–(1.5) можно записать через элементарные функции и в квадратурах:

$$v_1 = \frac{2k}{\lambda}\gamma_2, \quad v_2 = \frac{1}{\lambda s}\gamma_1, \quad t = \frac{\lambda}{2}\int\frac{\rho}{k\gamma_2}d\varphi + C_4$$

$$\theta = \frac{1}{2}\int\frac{\rho}{Rsk}\frac{\gamma_3}{\gamma_2}d\varphi + C_5, \quad M = M_0\exp\left(\frac{P}{C_2}\right)$$

$$\lambda_1 = \lambda s, \quad \lambda_2 = \lambda k, \quad \lambda_4 = \frac{(C_3 - \gamma_1)k}{Rs}, \quad \lambda_7 = \frac{C_2}{M} \tag{1.11}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{C_3}\left(3\mu\frac{\lambda^2 s^4}{R} + C\lambda s R + C_3^2\right), \quad \gamma_2 = \frac{3\gamma_1 + 2C_3}{5s^2 - 3}$$

$$\gamma_3 = \frac{(3 - s^2)\gamma_1 + 6C_3 k^2}{5s^2 - 3}, \quad k = \cos\varphi, \quad \rho = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$P = C_1 - \frac{k}{s}\frac{\gamma_1(15s^2 - 3) + 8C_3 s^2}{5s^2 - 3} + 3C(t - C_4)$$

где C_4, C_5 – постоянные интегрирования. Если величины v_1, v_2, R, M, λ_4 определены, то при помощи равенства $\varkappa^{(IV)} = 0$ можно найти секундный расход массы

$$m = \frac{10\mu\lambda^2 s^2 - v_2^2\lambda^2 r(3 - 13s^2) - 2\lambda\lambda_4 r^2(sv_1 - 3kv_2) - 4\lambda_4^2 r^3 + 6\lambda s C_3 v_2 r^{-1}}{cs\lambda^2 r^2(3 - 5s^2)} \tag{1.12}$$

Формулы (1.10)–(1.12) представляют собой решения канонической системы уравнений (1.1) для участков ПТ безотносительно критерия оптимальности. Нужно отметить, что в случае, когда $\lambda_1 < 0$ и $C > 0$ решения (1.7) и (1.11) удовлетворяют необходимому условию оптимальности Роббинса [3].

2. Рассмотрим частные случаи.

1°. Если по условиям вариационной задачи время движения ракеты не фиксировано и функционал задачи явно не зависит от времени, то $C = 0$ [1]. Тогда из уравнения (1.6) следует выражение для величины радиус-вектора

$$r = \frac{9\mu\lambda^2}{\lambda_5^2}\frac{s^6}{1 - 3s^2} \tag{2.1}$$

совпадающее с формулой, определяющей спирали Лоудена [1] (см. ниже замечание 1). Были получены [1, 7] соответствующие этим спиралям решения системы (1.1) для случая $\lambda = 1$.

Ниже приводятся другие решения системы (1.1) для участков ПТ, соответствующие (2.1). Эти решения могут быть найдены с помощью второго и третьего уравнений (1.2), уравнений (1.3), (1.4) и уравнений

$$\dot r = v_1, \quad \dot\theta = v_2 / r \tag{2.2}$$

в виде

$$v_1 = \frac{6C_3}{\lambda}\frac{1 - 3s^2}{s_1}, \quad v_2 = \frac{C_3}{3\lambda}\frac{1 - 3s^2}{s}$$

$$t = \frac{9\mu\lambda^2}{C_3^2}\int\frac{s^5 s_1}{(1 - 3s^2)^2}d\varphi + t_0, \quad \theta = \frac{1}{3}\int\frac{s_1 - 3s^4}{s^4}d\varphi + \theta_0$$

$$M = \frac{M_0 C}{\lambda C_2}\left[\frac{kC_3(-18s^6 - 39s^4 + 35s^2 - 6)}{3s^3 s_1} - C_1\right] \tag{2.3}$$

$$\lambda_1 = \lambda s, \quad \lambda_2 = \lambda k, \quad \lambda_4 = \frac{C_3^3(1 - 3s^2)^2}{27\mu\lambda^3 s^9}$$

$$\lambda_7 = \frac{C_2}{M}, \quad s_1 = 9s^4 - 17s^2 + 6$$

где t_0, θ_0 – постоянные интегрирования. Величина m определяется из (1.12), где r, v_1, v_2, M, λ_4 выражаются по формуле (2.1) и соответствующим формулам системы (2.3).

Решения (2.1) и (2.3) описывают движение по спиральным траекториям, отличающимся от ранее известных спиралей.

Можно показать, что второе и третье уравнения системы (1.2), уравнения (1.3)–(1.6) и уравнения системы (2.2) также позволяют найти еще два класса аналитических решений системы (1.1), но и здесь формулы определения величины радиус-вектора будут совпадать с (2.1). Так как неоптимальность спиралей Лоудена была установлена с помощью формулы для определения величины r [3], то, следовательно, можно убедиться, что и приведенные выше решения (2.1) и (2.3), а также два класса аналитических решений, способ получения которых указан выше, также не будут удовлетворять необходимому условию оптимальности Роббинса.

Таким образом, приходим к заключению, что исследование канонической системы уравнений с учетом свойств функции переключения позволяет значительно расширить класс аналитических решений для плоских участков ПТ. Отметим, что приведенные в этом пункте решения получены безотносительно минимизируемого функционала.

Замечание 1. Непосредственной проверкой (с помощью уравнений движения, полученных Лоуденом для исследования участков ПТ и канонической системы (1.1)) можно убедиться, что постоянная интегрирования A, фигурирующая в формулах спиралей Лоудена, циклическая постоянная λ_5 и величина базис-вектора связаны соотношением

$$\lambda_5 = -\lambda A \tag{2.4}$$

2°. Если время маневра фиксировано ($C \neq 0$), конечное значение полярного угла не задано и функционал задачи явно не зависит от полярного угла (что имеет место, в частности, для ряда задач, связанных с минимизацией характеристической скорости), то на основе циклического интеграла (последнее равенство системы (1.2)) и условия трансверсальности будем иметь равенство

$$\lambda_5 = 0 \tag{2.5}$$

справедливое на всей оптимальной траектории. Ниже для таких задач получим аналитические решения для участков ПТ.

При выполнении равенства (2.5) первое уравнение (1.2), соотношения (1.3) и (1.4) непосредственно дают

$$r^2 = -3\mu\lambda C^{-1} s^3 \tag{2.6}$$

Здесь должны выполняться условия $s > 0$, $C < 0$ или $s < 0$, $C > 0$. Остальные решения системы (1.1), соответствующие (2.5) и (2.6), могут быть найдены с помощью второго уравнения системы (1.2), (1.4), (1.12), (2.2) в виде

$$\begin{gathered}
v_1 = \frac{6k\sqrt{z}}{\lambda(3-s^2)}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{z}(9-7s^2)}{\lambda(3-s^2)}, \quad z = \lambda\left(Csr + \frac{\mu\lambda s^2}{r}\right) \\
t = \chi^3\left[4\mu^{1/2}\int \frac{s^{1/4}(3-s^2)}{(1+3s^2)}d\varphi\right]^{-1} + t_0 \\
\theta = \frac{9}{4}\chi\operatorname{ctg}\varphi - \frac{7}{4}\chi\varphi + \theta_0, \quad \chi = \left(\frac{3\mu\lambda}{C}\right)^{1/4} \\
M = M_0 \exp\left[\frac{1}{C_2}\left(C_1 + 3Ct - \frac{k\sqrt{z}(3+s^2)}{\lambda s(3-s^2)}\right)\right]
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где t_θ, θ_0 – постоянные интегрирования. Можно показать, что решения (2.6) и (2.7) описывают движения по некоторым спиральным траекториям, также отличающимся от ранее известных спиралей.

Отметим, что если выполняются условия $s < 0$, $C > 0$, можно убедиться, что решение (2.6) удовлетворяет необходимому условию оптимальности Роббинса $\lambda sr < 0$ [3]. Следовательно, решения для участков ПТ (2.6) и (2.7) могут быть использованы для задач об оптимальных перелетах с фиксированным временем и с произвольной угловой дальностью, а также с минимизируемым функционалом, явно не зависящим от угловой дальности в ньютоновском поле [8]. Ниже приводится соответствующий пример.

Замечание 2. Поскольку решения (2.1) и (2.3) содержат циклическую постоянную λ_5, а решения для спиралей Лоудена содержат постоянную A, то представляет интерес рассмотрение этих решений с учетом конечных условий и условий трансверсальности. Если отсутствует ограничение на угловую дальность и функционал задачи явно не зависит от нее, то для циклической постоянной выполняется условие (2.5). Следовательно, постоянная A также обращается в нуль. В этом случае участки ПТ, описываемые (2.1) и (2.3), а также спирали Лоудена (см. соотношение (2.4)) вырождаются в участки нулевой тяги. Поэтому решения (2.1) и (2.3), а также спирали Лоудена могут быть решениями для участков ПТ лишь в том случае, если задано конечное значение полярного угла или функционал задачи явно зависит от значения полярного угла. В частности, если рассматривается задача о минимизации характеристической скорости [1, 7] и отсутствует ограничение на угловую дальность, то спирали Лоудена не являются решением для участков ПТ.

Пример. Рассмотрим задачу о минимизации характеристической скорости перелета между компланарными пересекающимися эллиптическими орбитами в центральном ньютоновском поле. В начальный момент заданы условия: $e_1 = 0{,}8$; $p_1 = 8200$ км; $\omega_1 = -1{,}5$; $c = 3$ км/с. Фазу движения по начальной орбите считаем произвольной. В конечный момент времени заданы условия: $e_2 = 0{,}7$; $p_2 = 9500$ км; $\omega_1 = 0{,}5$. Время перелета заранее фиксировано: $T = 500$ с. Фазу движения по конечной орбите также считаем произвольной. Импульсное решение этой задачи было получено ранее [9].

Покажем, что рассматриваемый перелет может быть осуществлен с помощью одного участка ПТ. В этом случае соответствующая этому перелету траектория будет состоять из двух участков НТ и одного участка ПТ, начальная и конечная точки которого являются точками переключения. В этих точках переключения должны выполняться условия непрерывности базис-вектора, радиус-вектора, вектора скорости, а функция переключений должна быть равна нулю. Поэтому для первой точки переключения имеем следующие условия:

$$
\begin{gathered}
-3\mu\lambda\sin^3\varphi_1 = p_1^2 C/(1+e_1\cos f_1)^2 \\
36\lambda_1\lambda_2^2\left(Cr^2+\frac{\lambda_1\mu}{r}\right) = e_1^2\frac{\mu}{p_1}\sin^2 f_1(3\lambda^2-\lambda_1^2)^2 \\
(7\lambda_1^2-9\lambda^2)^2\left(\frac{Cr^2+\lambda_1\mu}{r}\right)\lambda_1 = \frac{\mu\lambda_1^2}{p_1}(1+e_1\cos f_1)(3\lambda^2-\lambda_1^2)^2 \qquad (2.8) \\
\lambda\sin\varphi_1 = B_1 e_1\sin f_1 + CI_2(f_1) \\
\lambda\cos\varphi_1 = B_1(1+e_1\cos f_1)+\frac{D_1}{1+e_1\cos f_1}+CI_2(f_1) \\
\frac{c}{M}\lambda-\lambda_7 = 0
\end{gathered}
$$

Во второй точке переключения выполняются условия, отличающиеся от (2.8) лишь тем, что индексом величин φ, f, e, p, B, D является цифра 2. Здесь

$$I_2(f) = \frac{\operatorname{ctg} f}{l(1+e\cos f)} + \frac{1+e\cos f}{e\sin f}\sin f \int \frac{df}{\sin^2 f(1+e\cos f)^2}$$

Кроме того, в конечный момент времени выполняется условие трансверсальности

$$\lambda_7 = -\partial J / \partial M_1 = c / M_1$$

Так как на конечной орбите λ_7 = const, то для конечной точки участка ПТ имеем $\lambda = 1$. На основе совместного решения системы (2.8) с учетом равенства $f = \theta - \omega$ находим

$$f_1 = 0{,}8736, \quad B_1 = 0{,}4022, \quad \varphi_1 = 0{,}4022, \quad D_1 = 0{,}5300$$

$$f_2 = 0{,}6625, \quad B_2 = 0{,}4099, \quad \varphi_2 = 0{,}2211, \quad D_2 = 0{,}5538$$

Время движения на участке ПТ составляет 436,57 с. Отношение требуемой характеристической скорости к соответствующей круговой скорости равно 1,4749, в то время как для импульсного случая имеем 1,2964. Результаты решения этой задачи показывают, что затраты топлива для случаев перелета с импульсной тягой и ПТ сравнимы.

Однако анализ системы решений (2.7) наводит на мысль, что перелет с ПТ при достаточно большом значении C будет выгоднее, чем рассмотренный здесь перелет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лоуден Д.Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966. 152 с.
2. *Азизов А.Г., Коршунова Н.А.* К вопросу определения оптимальных траекторий в ньютоновском поле // Проблемы механики управляемого движения / Пермь: Пермск. гос. ун-т. 1984. С. 5–10.
3. *Robbins H.M.* Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories // AIAA Journal. 1965. V. 3. № 6. P. 1094–1098. = Оптимальность активных участков промежуточной тяги траекторий ракеты // Ракетн. техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 6. С. 139–145.
4. *Завалищин С.Т.* Дополнение к теории Лоудена / ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 731–738.
5. *Азизов А.Г., Коршунова Н.А.* Применение метода Леви–Чивита при анализе оптимальных траекторий // Космич. исследования. 1979. Т. 17. № 3. С. 378–386.
6. *Азимов Д.М.* Сферические траектории для участков промежуточной тяги и их применение // Тез. докл. Респ. науч. конф. "Моделирование сложных механических систем". Ташкент, 1991. С. 81–82.
7. *Коршунова Н.А.* Об оптимальных траекториях ракеты в центральном поле // Механика и прикладная математика: Тр. Ташк. гос. ун-та. 1975. Вып. 476 а. С. 85–94.
8. *McCue G.A.* Quasilinearizaton determination of optimum finite-thrust orbital transfers // AIAA Journal. 1967. V. 5. № 4. P. 755–763. = Определение оптимальных межорбитальных переходов с конечной тягой по методу квазилинеаризации // Ракетн. техника и космонавтика. 1967. Т. 5. № 4. С. 182–192.
9. *Эрике К.* Космический полет. Т. 2. М.: Наука, 1969. 571 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
21.XII.1993