

УДК 531.384

© 1996 г. В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ БИФУРКАЦИИ ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Предлагается геометрическая интерпретация условий устойчивости стационарного решения динамических систем с простейшей симметрией в критическом по Ляпунову случае одного нулевого собственного значения матрицы линеаризации и остальных собственных значений с отрицательными действительными частями. Смена характера устойчивости особой точки при изменении параметра связывается с бифуркациями, реализующимися в особенностях сборки и бабочки многообразий стационарных состояний. Аналитически и численно построены бифуркационные множества двухпараметрических семейств стационарных состояний двухзвенных систем с качением и найдено соотношение параметров системы, отвечающее за опасность – безопасность границы области устойчивости.

1. Введение. В рамках феноменологического подхода [1] двухзвенные системы с качением [2] при определенных предположениях относятся к динамическим системам с простейшей симметрией, определяемыми условием нечетности их правых частей по переменной состояния x :

$$\dot{x} = f(x, v), \quad f(-x, v) = -f(x, v) \quad (1.1)$$

$$x, f \in R^n, \quad v \in R_+^1$$

В таких системах точка $x = 0$ необходимо является особой (симметричное решение [3]). Согласно принципу сведения Ляпунова [4, 5] n -мерная система в случае одного нулевого собственного значения матрицы линеаризации и остальных собственных значений с отрицательными действительными частями может быть приведена при решении задачи устойчивости решения $x = 0$ к одномерной динамической системе для критической переменной. В данной работе решение задачи устойчивости сводится к анализу двух конечных уравнений, получение которых аналогично исключению некритических переменных из критического уравнения в теории Ляпунова.

Уравнения возмущенного движения достаточно гладких динамических систем (1.1) в окрестности состояния $x = 0$ содержат лишь нечетные степени переменных

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(v)x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{klm}^{(i)}(v)x_k x_l x_m + \quad (1.2)$$

$$+ o(|x|^3), \quad a_{ij} = \text{const}, \quad a_{klm}^{(i)} = a_{kml}^{(i)} = a_{mkl}^{(i)} = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Остановимся на случае $n = 2$. Особенности приведения случая $n > 2$ к двумерному иллюстрируются ниже на задаче о двухзвенных системах с качением. Для системы

$$x_i = f_i(x_1, x_2), \quad f_i(x_1, x_2) \equiv a_{i1}x_1 + \quad (1.3)$$

$$+ a_{i2}x_2 + a_{111}^{(i)}x_1^3 + 3a_{112}^{(i)}x_1^2x_2 + 3a_{122}^{(i)}x_1x_2^2 + a_{222}^{(i)}x_2^3 + \dots \quad (i = 1, 2)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad p = -[\operatorname{div}(f_1, f_2)]_{x_1=0, x_2=0} = - (a_{11} + a_{22}), \quad q = [D(f_1, f_2) / D(x_1, x_2)]_{(0,0)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.4)$$

Пусть $(0, 0)$ – простая особая точка при некритическом значении характерного параметра ν , причем $p > 0$; все коэффициенты в (1.3) – непрерывные функции параметра; при докритическом значении параметра индекс Пуанкаре начала координат равен 1, а при закритическом равен -1 . Именно такая ситуация часто встречается в задачах динамики одиночных и многозвенных систем с качением [2, 6]. Для критического значения параметра ($q = 0, \lambda_2 = -p$) вопрос устойчивости решается знаком ляпуновского коэффициента [7]

$$g = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})^{-3} \Delta, \quad \Delta = a_{11}^3 (a_{11}a_{222}^{(2)} - a_{21}a_{222}^{(1)}) + 3a_{11}^2 a_{12} (a_{21}a_{122}^{(1)} - a_{11}a_{122}^{(2)}) + 3a_{11} a_{12}^2 (a_{11}a_{112}^{(2)} - a_{21}a_{112}^{(1)}) + a_{12}^3 (a_{21}a_{111}^{(1)} - a_{11}a_{111}^{(2)}) \quad (1.5)$$

Если $g < 0$, то решение $x_1 = 0, x_2 = 0$ системы (1.3) асимптотически устойчиво, при $g > 0$ оно неустойчиво, для $g = 0$ необходимо привлечь члены пятого порядка.

2. Геометрическая интерпретация условий устойчивости для $g \neq 0$. При условиях теоремы существования неявных функций уравнения

$$f_i(x_1, x_2) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

определяют на плоскости $x_1 x_2$ в окрестности точки $(0, 0)$ кривые

$$x_2 = F_i(x_1) = F_{i0}' x_1 + \frac{1}{3!} F_{i0}''' x_1^3 + \dots \quad (F_{i0}' = F_i'(0), \quad F_{i0}''' = F_i'''(0)) \quad (2.2)$$

угловые коэффициенты которых согласно равенствам (1.3)

$$\gamma_i = F_{i0}', \quad \gamma_1 = -a_{11} / a_{12}, \quad \gamma_2 = -a_{21} / a_{22} \quad (2.3)$$

В критическом случае $\gamma_1 = \gamma_2$, т.е. кривые (2.2) касаются друг друга в начале координат. Если $F_{10}''' \neq F_{20}'''$, то в точке $(0, 0)$ они имеют трехкратное пересечение или трехточечное касание [8]. Обозначим через γ_i^* значение γ_i в докритическом положении и введем величину $g_1 = (\gamma_1 - \gamma_2)^* (F_{20}''' - F_{10}''')$. Анализ показывает, что в критическом по Ляпунову случае одного нулевого корня характеристического уравнения в начале координат плоскости $x_1 x_2$ рождается трехкратная особая точка, если разности

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^* \text{ и } F_{10}''' - F_{20}''' \quad (2.4)$$

имеют одинаковые знаки. Таким образом, условием бифуркации рождения служит $g_1 < 0$ (или условие сохранения порядка следования кривых (2.2) в докритическом и критическом положениях).

В критическом по Ляпунову случае в начале координат плоскости $x_1 x_2$ сливаются три особые точки, если разности (2.4) имеют разные знаки. Таким образом, условием бифуркации слияния служит $g_1 > 0$ (или условие смены порядка следования кривых (2.2) в докритическом и критическом положениях).

Согласно (2.1) – (2.3) и (1.3) находим: $F_{20}''' - F_{10}''' = 6a_{12}^{-4} a_{21}^{-1} \Delta$. Отсюда, из (1.4) и (1.5)

следует

$$gg_1 = -6\Delta^2 a_{12}^{-4} a_{11}^{-3} a_{21}^{-1} \lambda_2^{-3} (\gamma_1 \gamma_2 q a_{11}^{-1} a_{21}^{-1})^* \quad (2.5)$$

При сделанных предположениях $\lambda_2 < 0$, $q^* > 0$, $(\gamma_1 \gamma_2)^* > 0$, поэтому знак правой части (2.5) определяется знаком величины $a_{11} a_{11}^* a_{21} a_{21}^*$. Последняя положительна, так как существует малая окрестность критического положения, в которой a_{11}^* и a_{21}^* имеют (в силу непрерывности) те же знаки, что и в критическом положении. Таким образом, $gg_1 > 0$. Следовательно, случай асимптотической устойчивости ($g < 0$) точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ однозначно связывается с бифуркацией рождения ($g_1 < 0$) особых точек, а случай неустойчивости ($g > 0$) – с бифуркацией слияния ($g_1 > 0$). Таким образом, смена устойчивости симметричного решения связана с реализацией в многообразии стационарных состояний трехкратной особой точки – особенность сборки. Бифуркационное множество сборки в малой окрестности трехкратной точки описывается полукубической параболой [8, 9]. Значения параметров, при которых сборка переходит в двойственную ей, должны совпасть с теми, при которых имеет место пятиточечное касание кривых (2.2) в нуле, т.е. $F_{10}''' = F_{20}'''$ (смена устойчивости трехкратной особой точки через реализацию особенности бабочка).

3. Двухзвенные системы с качением: сведение трехмерной задачи к двумерной. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двухосного ведущего и шарнирно соединенного с ним одноосного ведомого звена (фиг. 1). Пусть v и u – проекции скорости центра масс C ведущего звена на его продольную и поперечную оси, $\omega = \dot{\vartheta}$ – угловая скорость рысканья этого звена, φ – угол складывания ведомого звена. Использование квазискоростей v и u , реальной скорости ω и переменной φ вместо голономных координат x , y , ϑ , φ позволяет расщепить исходную систему дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения двухзвенника восьмого порядка на две последовательно интегрируемые подсистемы пятого

$$\Phi_i(v, u, \omega, \varphi, \dot{\varphi}, v, u, \omega, \varphi) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (3.1)$$

и третьего порядков

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad x = v \cos \vartheta - u \sin \vartheta, \quad y = v \sin \vartheta + u \cos \vartheta \quad (3.2)$$

Вид функций Φ_i указан в [2].

Рассмотрим движения с постоянной скоростью v . Из (3.2) следует, что стационарным решениям $u = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ системы (3.1) отвечают на опорной плоскости xu круговые траектории конечного или бесконечного радиусов. Было показано [2], что при небольших значениях θ задачу нахождения особых точек системы (3.1) можно свести к уравнениям

$$-mv\omega + Y_1 + Y_2 + Y' = 0, \quad aY_1 - bY_2 - cY' = 0 \quad (3.3)$$

$$-m_1\omega[v \cos \varphi - (u - c\omega) \sin \varphi] + Y_3 = 0$$

в которых

$$Y' = m_1[-v \sin \varphi + \omega d_1 - (u - c\omega) \cos \varphi] \omega \sin \varphi \quad (3.4)$$

Искомыми величинами в (3.3) являются ω , u , φ . Величины Y_i – известные функции углов бокового увода $\delta_i(\omega, u, \varphi)$ (the angles of side slip), описанные в [2]. При $v = v_+$ матрица линеаризации системы (3.1) в окрестности прямолинейного движения двухзвенника имеет одно нулевое собственное значение и остальные три с отрицательными действительными частями.

Выражение (3.6) позволяет выделить в системе (3.3) первые два уравнения в качестве независимых, т.е. свести трехмерную задачу о стационарных состояниях к двумерной. Переходя от переменных ω, u к переменным δ_1, δ_2 по формулам (1.1) работы [2] и обозначая

$$\alpha = m_1 v^4 (m \kappa_3 g^2 l^3)^{-1} \left[v^2 (\kappa_3 - \kappa_2) (\kappa_2 \kappa_3 g)^{-1} + c + d_1 - b \right]$$

$$Y_i = k_i \delta_i - k_i' \delta_i^3 + \dots, \quad k_i' = k_i^3 (2G_i^2 \varphi_i^2)^{-1}$$

$$\kappa_i = k_i G_i^{-1}, \quad \kappa_i' = k_i' G_i^{-1}, \quad G_1 = m g b_0$$

$$G_2 = m g a_0, \quad G_3 = m_1 g, \quad a_0 = a l^{-1}$$

$$b_0 = b l^{-1}, \quad Y_*' = Y'(m g)^{-1}$$

запишем указанные уравнения так:

$$-v g^{-1} \omega + \kappa_1 b_0 \delta_1 + \kappa_2 a_0 \delta_2 - \kappa_1' b_0 \delta_1^3 - \kappa_2' a_0 \delta_2^3 + Y_*' + \dots = 0 \quad (3.7)$$

$$\kappa_1 \delta_1 - \kappa_2 \delta_2 - \kappa_1' \delta_1^3 + \kappa_2' \delta_2^3 - c a_0^{-1} b^{-1} Y_*' + \dots = 0$$

Здесь

$$Y_*' = \alpha l^3 v^{-3} \omega^3 + \dots, \quad \omega = v l^{-1} \left[\theta - \delta_1 + \frac{1}{3} (\theta - \delta_1)^3 + \delta_2 + \frac{1}{3} \delta_2^3 + \dots \right]$$

4. Устойчивость прямолинейного движения ($\theta = 0$) двухзвенника при критических скоростях. Критическая скорость определяется выражением (1.15) работы [2], которое можно преобразовать к виду

$$v_+^2 = \kappa_1 \kappa_2 g l (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1}, \quad \kappa_1 = k_1 / G_1$$

$$\kappa_2 = k_2 / G_2, \quad G_1 = m g b l^{-1} - m_1 g b_1 (c - b) l^{-1} L_1^{-1}$$

$$G_2 = m g a l^{-1} + m_1 g b_1 (a + c) l^{-1} L_1^{-1}$$

Здесь k_i – коэффициенты сопротивления боковому уводу (the cornering stiffnesses). В рассматриваемом случае $b_1 = 0$. Так как

$$\gamma_1 = -\frac{\kappa_1 b g + v^2}{\kappa_2 a g - v^2}, \quad \frac{d\gamma_1}{dv} < 0$$

$$\gamma_1|_{v=v_+} = \gamma_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

то при $v = v_+ - 0$ имеем $(\gamma_1 - \gamma_2)^* > 0$. Условие $F_{20}''' - F_{10}''' < 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$d_1 > d_1^*, \quad d_1^* = b - c + m \kappa_3 v_+^4 (2 m_1 \kappa_1 \kappa_2 g^2 l)^{-1} (\kappa_1 \varphi_2^{-2} - \quad (4.1)$$

$$- \kappa_2 \varphi_1^{-2}) \left[1 + c (\kappa_1 b + \kappa_2 a) (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1} (a b)^{-1} \right]^{-1} - v_+^2 (\kappa_3 - \kappa_2) (\kappa_2 \kappa_3 g)^{-1} +$$

$$+ m \kappa_3 v_+^2 (\kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2) \left\{ 3 m_1 g \kappa_1^2 \kappa_2^2 \left[1 + c (\kappa_1 b + \kappa_2 a) (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1} a^{-1} b^{-1} \right] \right\}^{-1}$$

Последнее слагаемое в (4.1) порождено кубическими членами в ω и значительно меньше предыдущих слагаемых, поэтому количественные поправки в условия устойчивости, вносимые им, можно не учитывать. Согласно сказанному выше (разд. 2) в начале координат фазового пространства происходит бифуркация рождения, а граница $v = v_+$ области устойчивости в пространстве параметров двухзвенника

безопасна (в смысле [10]). При $d_1 < d_1^*$ происходит бифуркация слияния, гиперповерхность $v = v_+$ в этом случае опасная.

5. Бифуркационные множества стационарных состояний двухзвенника ($\theta \neq 0$). Обозначив $Y_i^* = Y_i G_i^{-1}$ и привлекая (3.6), запишем первые два уравнения (3.3) в виде

$$-v^2 (gl)^{-1} (\theta - \delta_1 + \delta_2) + b_0 Y_1^* + a_0 Y_2^* + \alpha (\theta - \delta_1 + \delta_2)^3 + \dots = 0 \quad (5.1)$$

$$Y_1^* - Y_2^* - ca_0^{-1} b^{-1} \alpha (\theta - \delta_1 + \delta_2)^3 + \dots = 0$$

Введем новую переменную

$$Y = v^2 c_1 (bg)^{-1} \delta_1 + c_2 Y_1^* (\delta_1) = v^2 c_1 (bg)^{-1} (\theta + \delta_2) + c_3 Y_2^* (\delta_2)$$

$$(c_1 = ca^{-1}, \quad c_2 = 1 + c_1, \quad c_3 = 1 - cb^{-1})$$

Выражая δ_1 и δ_2 через Y и удерживая члены до третьего порядка, получим кубическое уравнение относительно Y . Приравняв нулю дискриминант этого уравнения, найдем бифуркационное множество двухпараметрического (θ, v) -семейства стационарных состояний

$$\theta^2 = \gamma w^3 + o(w^3), \quad w = v_+^2 v_0^{-2} - 1 \quad (5.2)$$

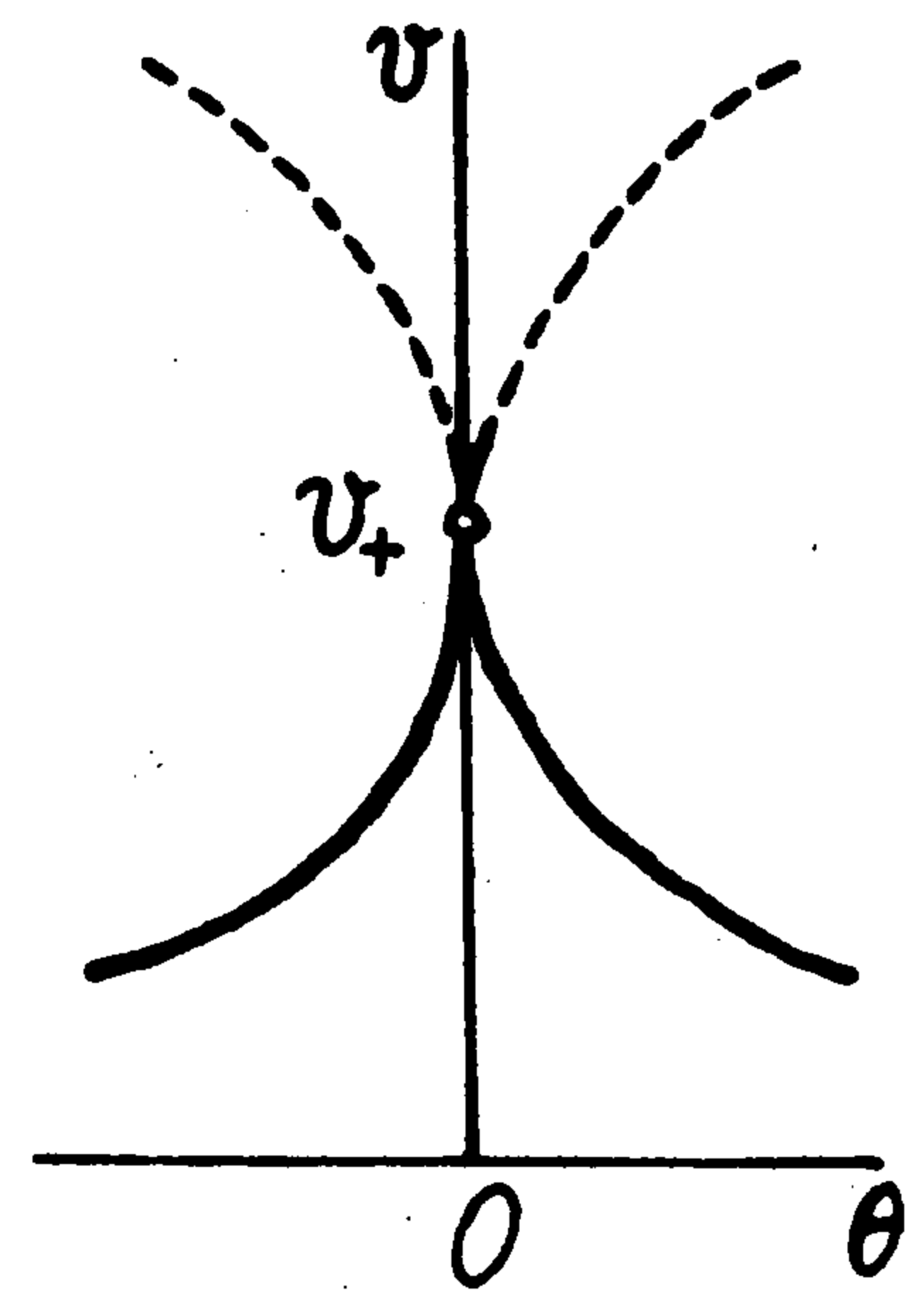
$$\gamma = \frac{4}{27} c_3^2 (1 - c_1 v_+^2 \beta_3 g^{-1} b^{-1})^{-2} \alpha_1^{-3} \beta^{-1}$$

$$\beta_3 = (v_+^2 c_1 b^{-1} g^{-1} + \kappa_2 c_3)^{-1}, \quad \alpha_1 = v_+^4 c_1^2 b^{-2} g^{-2} + v_+^2 c_1 b^{-1} g^{-1} (\kappa_1 c_2 + \kappa_2 c_3) +$$

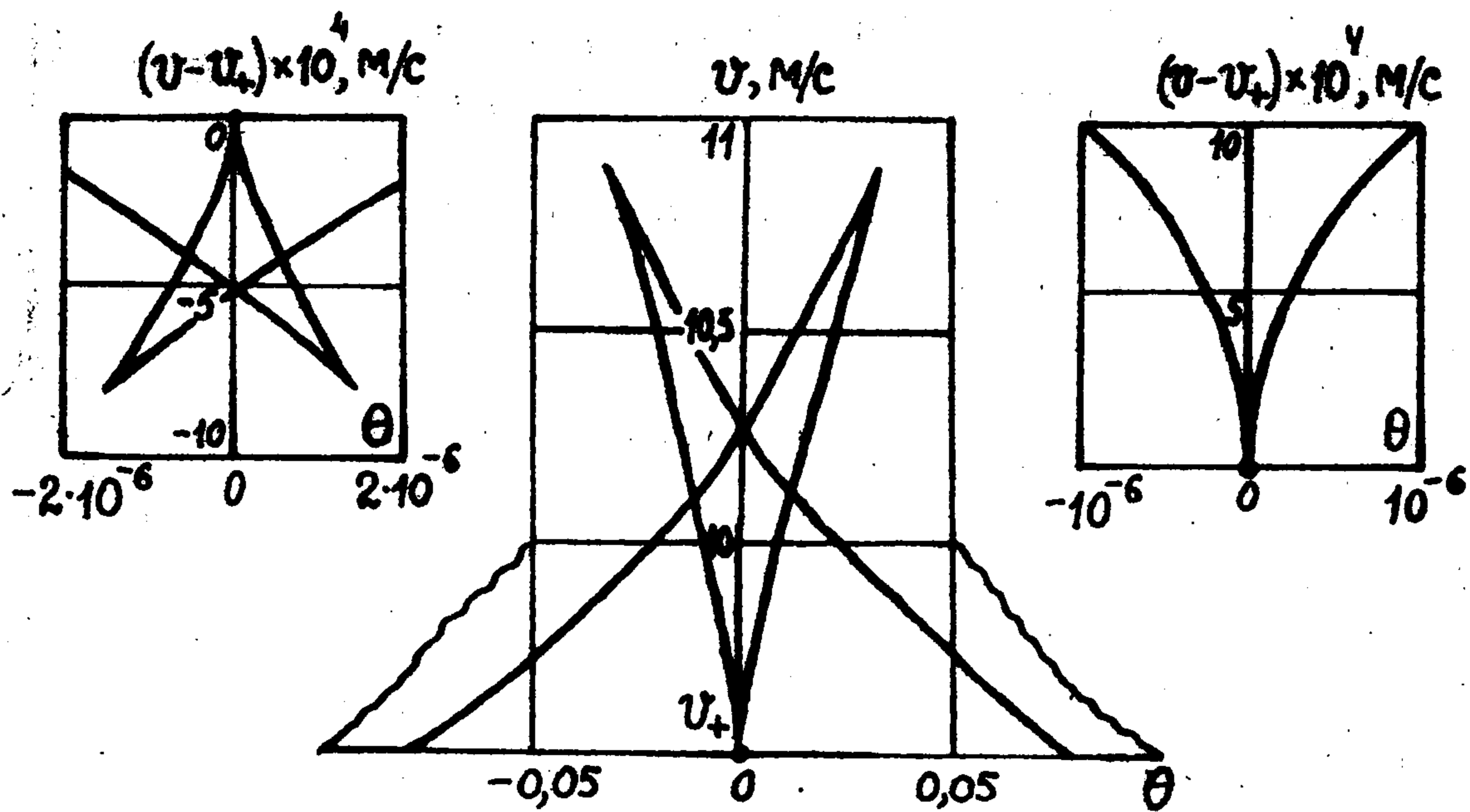
$$+ \kappa_1 \kappa_2 c_2 c_3, \quad \beta = (\kappa_1 - \kappa_2) a^4 b^4 \kappa_1^{-1} \kappa_2^{-1} [\kappa_1 b(a+c) - \kappa_2 a(b-c)]^{-4} \left\{ \frac{1}{2} (\kappa_1 \Phi_2^{-2} - \kappa_2 \Phi_1^{-2}) - \right. \\ \left. - \alpha (\kappa_1 - \kappa_2)^4 \kappa_1^{-3} \kappa_2^{-3} \left[1 + c_1 b^{-1} (\kappa_1 b + \kappa_2 a) (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1} \right] \right\}$$

Здесь v_0 – критическое значение скорости кругового движения двухзвенника для заданного θ . Знак γ зависит от величины d_1 : если $d_1 \lesssim d_1^*$, то $\gamma \gtrsim 0$. Кривая (5.2) в окрестности точки $(0, v_+)$ показана на фиг. 2 сплошной линией при $d_1 < d_1^*$ и штриховой при $d_1 > d_1^*$. При увеличении d_1 и прохождении через значение d_1^* происходит перестройка сборки в двойственную ей (переход к безопасному участку границы области устойчивости). Заметим, что бифуркационное множество, изображенное сплошной кривой, приводилось ранее [6, 11].

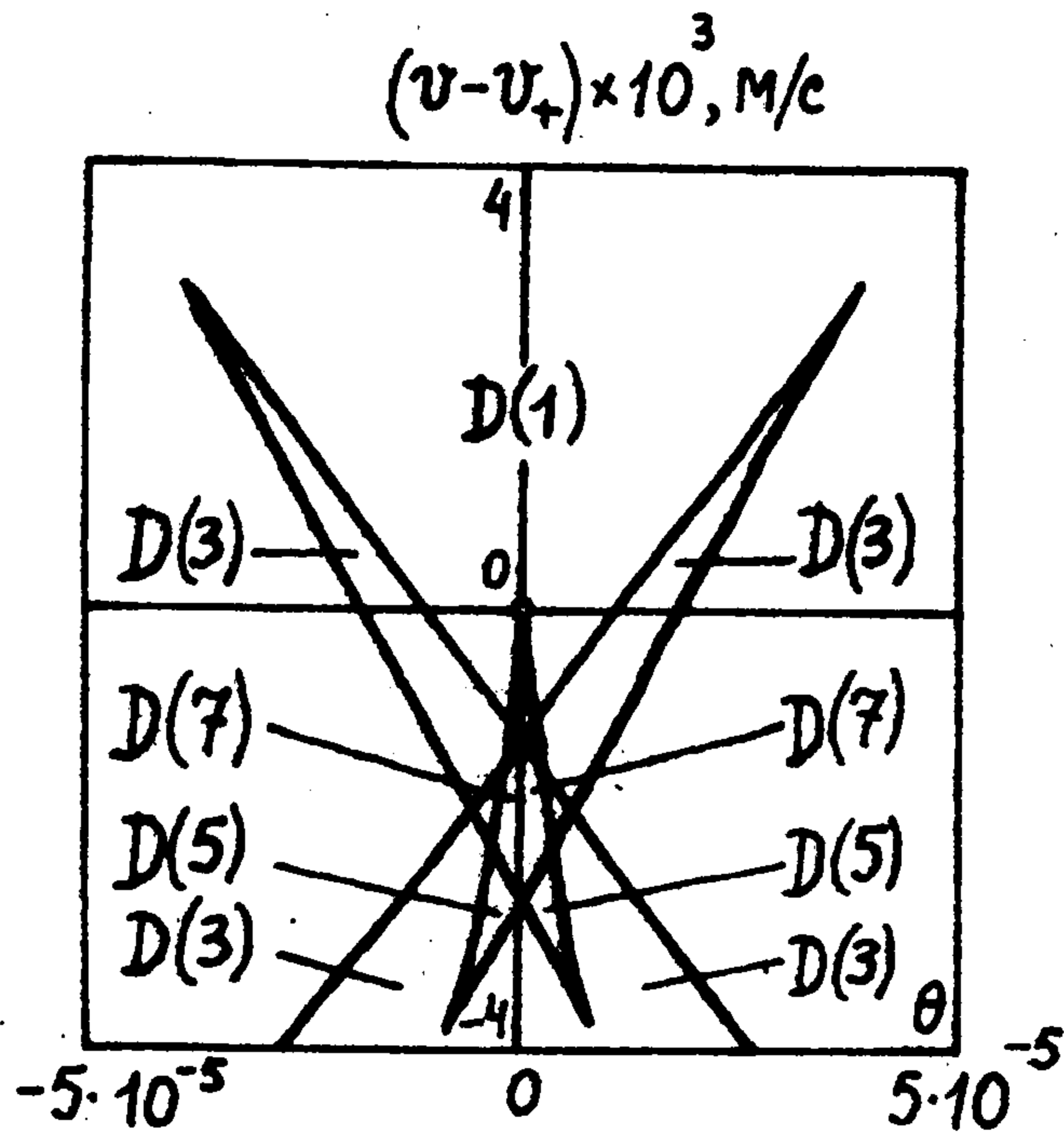
6. Компьютерное моделирование. Для численного нахождения множества параметров двухзвенника, при переходе через которое меняется количество особых точек, дополним три уравнения стационарных состояний четвертым, приравняв нулю якобиан системы. Искомыми являются значения $\omega, u, \varphi, \theta, v$. Многообразия стационарных состояний найдем методом продолжения [12] по двум параметрам θ и v , взяв в качестве стартовой точки $\omega = 0, u = 0, \varphi = 0, \theta = 0, v = v_+$. Примем $m = 5310$ кг, $m_1 = 6481$ кг, $a = 1,92$ м, $b = 0,82$ м, $c = b, d_1 = 14$ м, $k_1 = 305091$ Н, $k_2 = 103496$ Н, $k_3 = 154079$ Н, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,8$. Тогда $v_+ = 9,436$ м/с, $d_1^* = 9,509$ м. Кривая в верхней части фиг. 3 представляет собой сечение бифуркационной поверхности плоскостью $d_1 = \text{const}$, причем $d_1 = 9,3$ м. Слева показан фрагмент бифуркационного множества в малой окрестности точки $\theta = 0, v = v_+$, который подтверждает опасность границы области устойчивости $v = v_+$ при $d_1 < d_1^*$. Справа – то же для $d_1 = 9,7$ м; в этом случае граница безопасная (сечения бифуркационной поверхности при



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$d_1 = 9,3$ м и $d_1 = 9,7$ м в выбранном масштабе практически совпадают). При $d_1 = d_1^*$ в точке $(0, v_+)$ реализуется особенность "бабочка".

Фиг. 4 ($k_3 = 254079$ Н, $d_1 = 13,56$ м $\ll d_1^*$) показывает, что в малой окрестности точки $(0, v_+)$ существуют четыре других точки возврата. Символом $D(s)$ обозначены области с s стационарными состояниями. Качественная структура бифуркационных кривых совпадает с таковой при $k_3 = 154079$ Н, $d_1 = 9,3$ м. Отличие в том, что на фиг. 3 верхние точки возврата значительно удалены. Область на фиг. 4 образуется пересечением сборки и двух симметрично расположенных ласточкиных хвостов. Эволюция этих хвостов (рождение и исчезновение) при изменении параметра d_1 приводит к тому, что при значении d_1^* граница $v = v_+$ области устойчивости меняет характер опасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г.* Бифуркации стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 30–37.
3. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
4. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. В 6-ти т.т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
5. *Плисс В.А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. № 6. С. 1297–1324.
6. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 229 с.
7. *Лобас Л.Г., Завьялова В.В.* О дивергентных бифуркациях в динамических системах с качением // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 12. С. 86–93.
8. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
9. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. 262 с.
10. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
11. *Troger H., Steindl A.* Nonlinear stability and bifurcation theory. Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. 407 p.
12. *Shinohara Y.* A geometric method for the numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 1972. V. 8, № 1. P. 13–42.

Киев

Поступила в редакцию
26.IV.1995