

УДК 531.36

© 1996 г. А.С. Сумбатов

**О МАЯТНИКЕ ПОШЕХОНОВА**

С использованием закона Амонтона–Кулона, без каких-либо дополнительных предположений о трении дается объяснение явления "застывания" рамы в течение нескольких первых колебаний физического маятника в приборе Пошехонова.

Маятник Пошехонова (фиг. 1) представляет собой раму, в теле которой, в подшипниках, закреплена горизонтальная ось физического маятника  $P$ . Рама может поворачиваться вокруг своей вертикальной оси в штативе, установленном на поверхности Земли. Для демонстрации работы прибора маятник отклоняют от вертикали на некоторый угол и фиксируют нитью. Затем нить пережигают.

В зависимости от значений параметров наблюдаются три типа движения.

1°. Маятник  $P$  совершает колебания в вертикальной плоскости, а рама остается неподвижной во все время движения. Из-за трения в подшипниках горизонтальной оси колебания маятника постепенно затухают.

2°. Маятник начинает опускаться, рама неподвижна и в некоторый момент времени, когда маятник еще не достиг низшего положения, начинает поворачиваться. В какой-то момент рама останавливается, а маятник проходит низшую точку и поднимается. Затем рама поворачивается в противоположном направлении, останавливается, и маятник начинает опускаться. Картина движения повторяется. Таким образом, в течение одного полного колебания маятника рама 3 раза меняет направление своего вращения с остановками. При этом наблюдается прогрессирующий поворот рамы в направлении самого первого вращения. После нескольких колебаний одна из смен направления вращения рамы наблюдается в моменты, когда маятник  $P$  проходит крайние положения. Постепенно колебания затухают.

По мнению изобретателя прибора, описанное движение рамы подтверждает факт наличия суточного вращения Земли.

Был указан [1] еще один возможный тип движения:

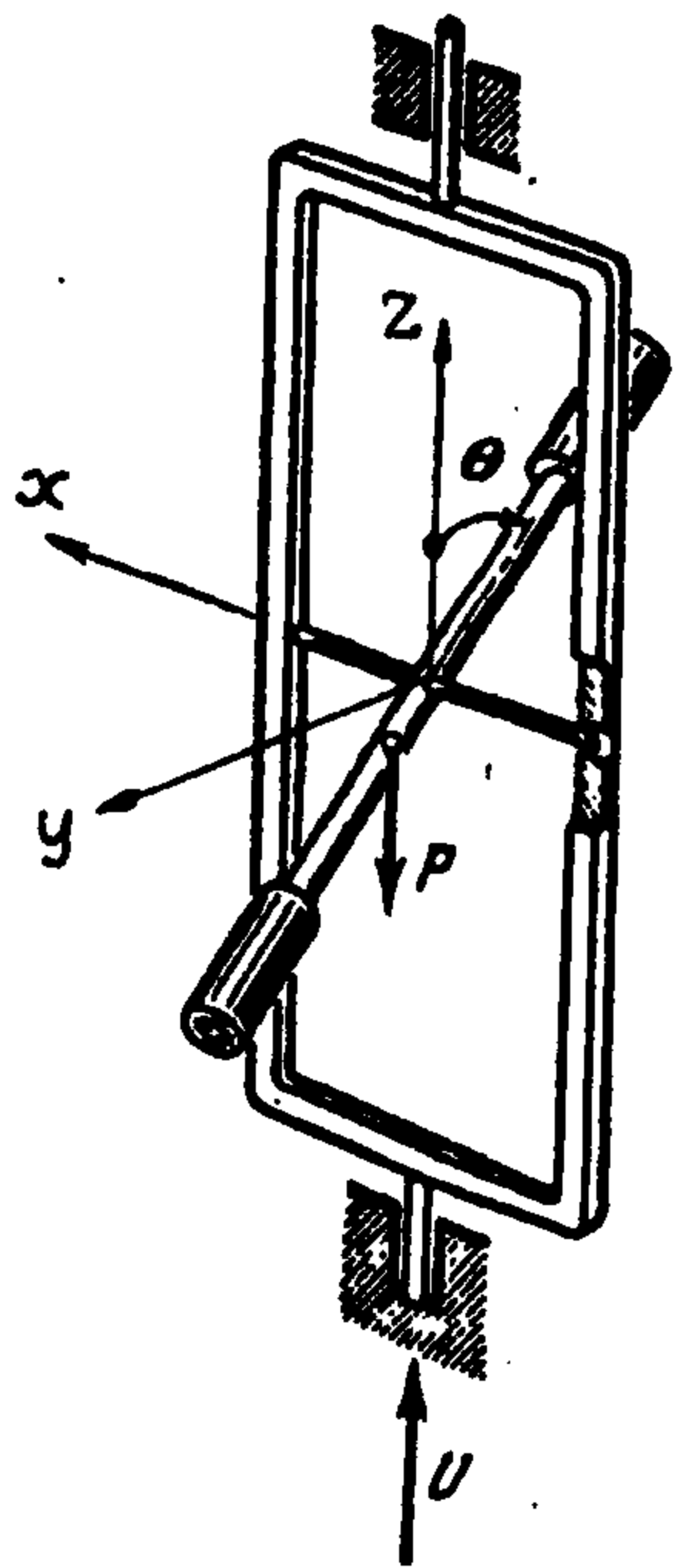
3°. "При пуске маятника Пошехонова, демонстрируемого в Московском планетарии, вначале рама практически стоит на месте (в течение первых 10–50 колебаний). Далее рама приходит в движение, причем характер этого движения в общем совпадает с изложенным выше для случая движения с остановками...".

Теории прибора посвящены несколько работ [1–3]. В первой из них [2] прибор рассматривался как механическая система с двумя степенями свободы и идеальными связями, изучались малые колебания. Разумеется, без учета трения объяснить реальное движение рамы не удастся. При помощи закона об изменении кинетического момента системы и учета момента кулоновских сил трения, приложенных в точках вертикальной оси рамы, было дано [1] объяснение движения прибора, соответствующего второму типу. Наконец, были уточнены [3] некоторые формулы работы [1] при наличии перекоса горизонтальной оси физического маятника  $P$ .

Ниже на основе только закона Амонтона–Кулона объясняется появление третьего типа в движении прибора.

**1. Построение зон "застоя".** Для того, чтобы не анализировать влияние на прибор горизонтальной составляющей угловой скорости Земли, будем считать его расположенным, например, на северном полюсе Земли [1].

Введем обозначения:  $P = mg$  – вес физического маятника,  $l'$  – расстояние от



Фиг. 1

горизонтальной оси вращения до центра тяжести маятника,  $k$  – центральный радиус инерции маятника,  $l = k^2/l'$  – приведенная длина,  $f$  – коэффициент сухого трения, возникающего в точках соприкосновения цилиндрических цапф рамы с поверхностью отверстий,  $U \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – угловая скорость суточного вращения Земли,  $\theta$  – угол отклонения маятника от вертикали.

Пусть рама неподвижна. Для простоты будем рассматривать колебания математического маятника массы  $m$ , подвешенного на безмассовом стержне длины  $l$ . На точку  $m$  действует сила Кориолиса  $2mU\dot{\theta}l \cos \theta$  параллельно оси  $x$  (фиг. 1). Момент  $M_z$  этой силы относительно оси  $z$  равен  $-mU\dot{\theta}l^2 \sin 2\theta$ . Он стремится повернуть раму по ходу Солнца. Момент кориолисовой силы относительно оси  $y$  не оказывает заметного влияния на движение системы из-за малости  $U$ .

В относительном движении на точку  $m$  действует также центробежная сила инерции, пропорциональная  $U^2 \ll 1$ , ее величиной можно пренебречь.

Приложенный к раме момент сил трения  $|M_{\text{тр}}| \leq rfN$ , где  $N$  – величина равнодействующей сил давления поверхности цилиндрических отверстий, имеющих радиус  $r$ , на цапфы рамы. Давление  $N$  уравновешено горизонтальной составляющей силы натяжения  $T$  стержня маятника. Спроектировав уравнения движения маятника на ось  $y$ , получим

$$N = |T \sin \theta| = ml(\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta$$

Согласно закону Амонтона – Кулона момент сил трения уравновешивает момент силы Кориолиса относительно вертикальной оси  $z$  до тех пор, пока последний не превосходит по абсолютной величине предельного значения  $rfN$ . Рама при этом остается неподвижной. Уравнение равновесия  $M_{\text{тр}} + M_z = 0$  определяет на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  зону "застоя", граница которой задается уравнением

$$rf l(\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta - Ul^2 |\dot{\theta} \sin 2\theta| = 0$$

После перехода к новому безразмерному времени  $\tau = t(g/l)^{1/2}$  и введения безразмерного параметра

$$\lambda = \frac{r}{l} \frac{\sqrt{g/l}}{U} f \quad (1.1)$$

граница зоны "застоя" запишется в виде

$$\lambda y^2 + v - 2|y|v = 0 \quad (1.2)$$

где  $y = d\theta/d\tau$ ,  $v = \cos \theta$ .

Кривая (1.2) симметрична относительно координатных осей на фазовой плоскости  $(\theta, d\theta/d\tau)$ . Поэтому достаточно исследовать ее только в первом квадранте  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $y \geq 0$ , в котором координаты внутренних точек зоны "застоя" удовлетворяют неравенству

$$\lambda y^2 + v - 2|y|v > 0 \quad (1.3)$$

Дальнейший анализ распадается на два случая.

Случай  $\lambda \geq 1$ . Если  $v \geq 0$ , то дискриминант  $D = v(v - \lambda^2) \leq 0$ , неравенство (1.3) выполняется во всех точках полуполосы  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $y \geq 0$ . Если  $v < 0$ , то неравенство

(1.3) распадается на две системы

$$\lambda(y^2 + \nu) + 2y\nu > 0, \quad y^2 + \nu > 0 \quad (1.4)$$

или

$$\lambda(y^2 + \nu) - 2y\nu < 0, \quad y^2 + \nu < 0 \quad (1.5)$$

Дискриминант  $D > 0$ .

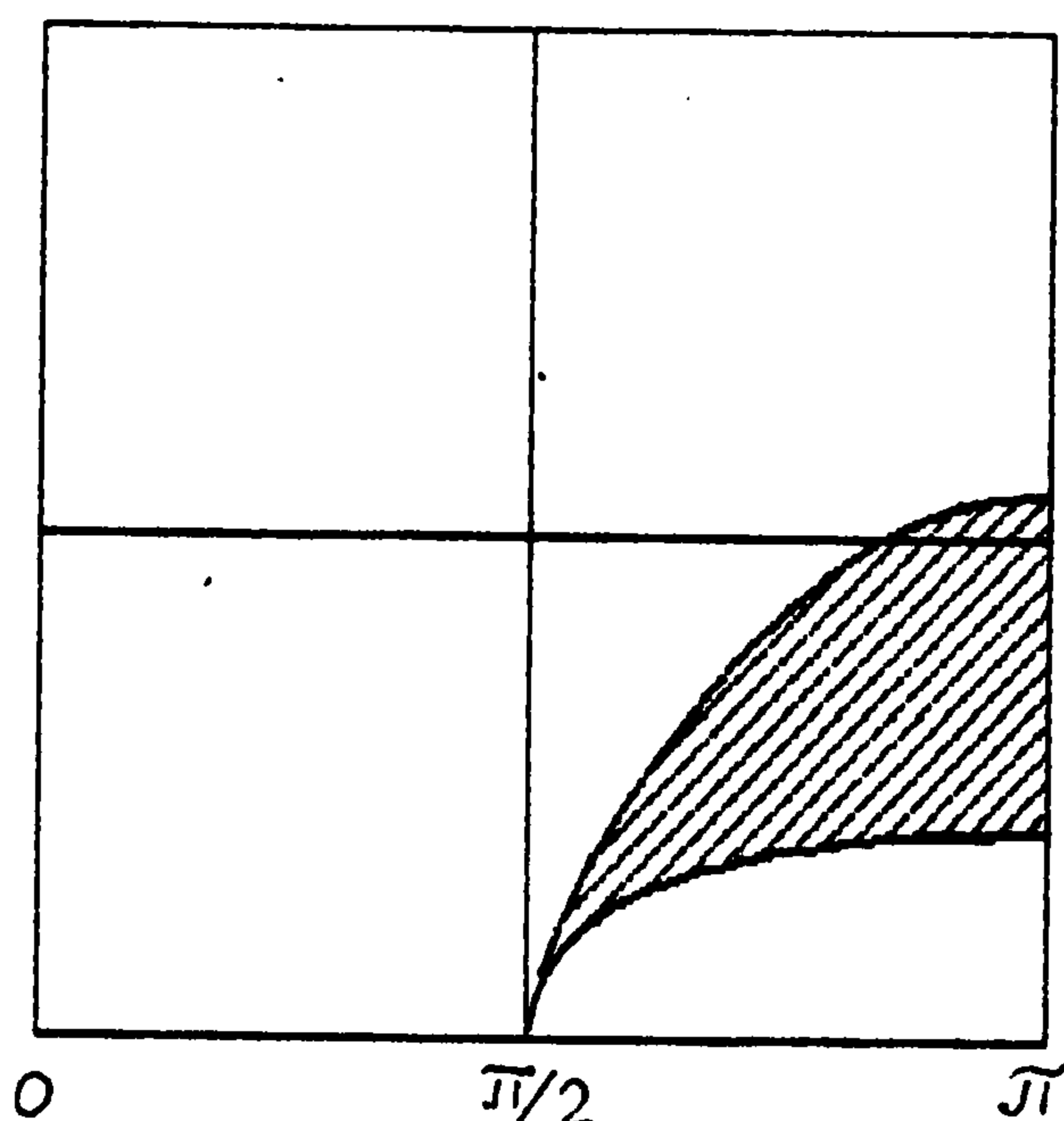
Решение системы (1.4) задается неравенством

$$y > \max(y_1, y_2), \quad \text{где} \quad y_1 = (-\nu)^{1/2}, \quad y_2 = (-\nu + D^{1/2})/\lambda$$

Решение системы (1.5) имеет вид

$$0 \leq y < \min(y_1, y_3), \quad y_3 = (\nu + D^{1/2})/\lambda$$

На фиг. 2 приведена граница (1.2) в первом квадранте для  $\lambda = 2$ . Зона "застоя" не заштрихована.



Фиг. 2

Случай  $\lambda < 1$ . Если  $\nu \geq 0$ , то дискриминант  $D \geq 0$  при  $0 \leq \theta \leq \arccos(\lambda^2)$  и  $D < 0$  при  $\arccos(\lambda^2) < \theta < \pi/2$ . В полуполосе  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $y \geq 0$  только точки, расположенные внутри кривой

$$\theta \geq 0, \quad y_4 \leq y \leq y_3 \quad (y_4 = (\nu - D^{1/2})/\lambda),$$

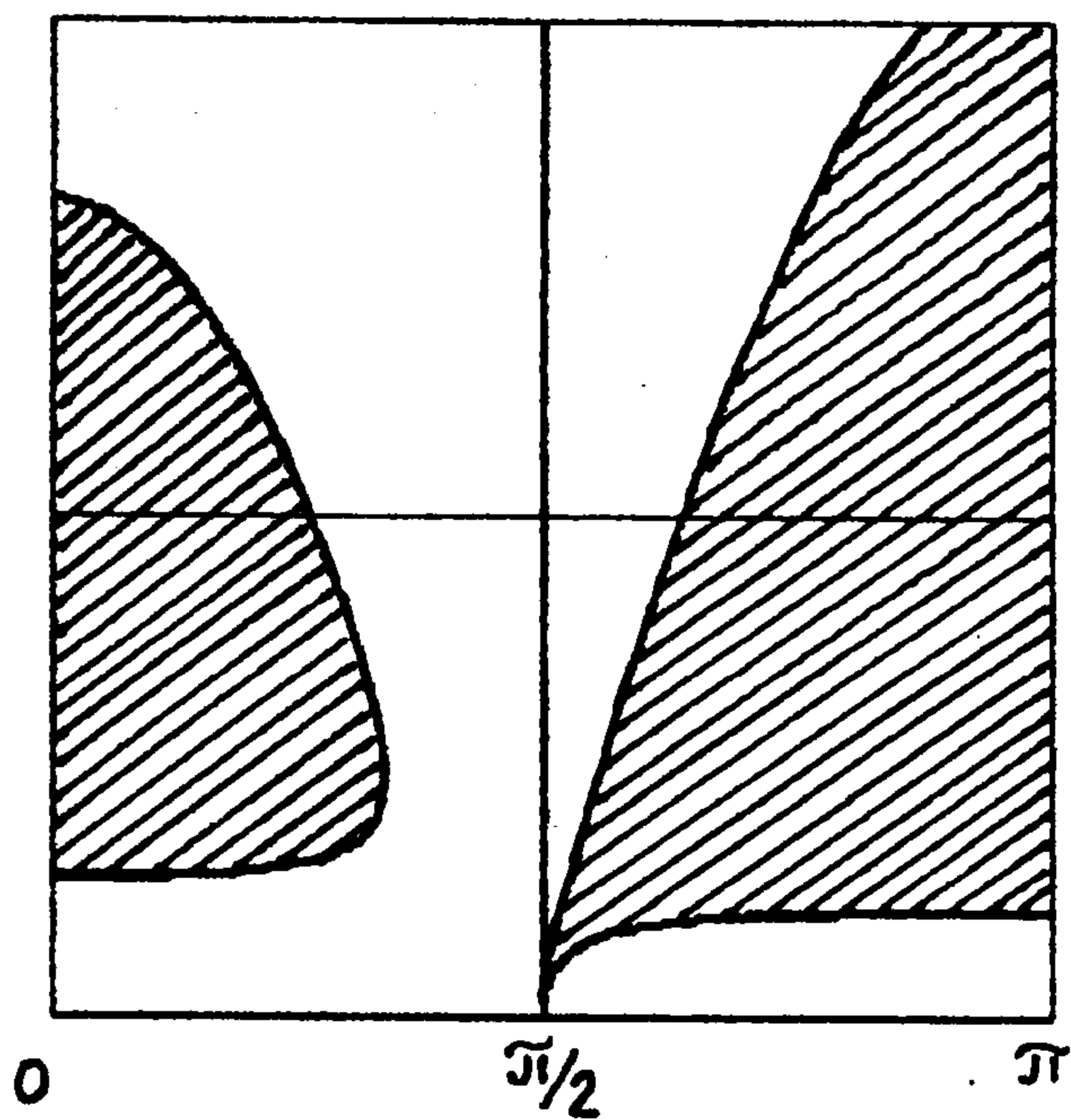
не принадлежат зоне "застоя".

Исследование неравенства (1.3) при  $\nu < 0$  аналогично случаю  $\lambda \geq 1$ .

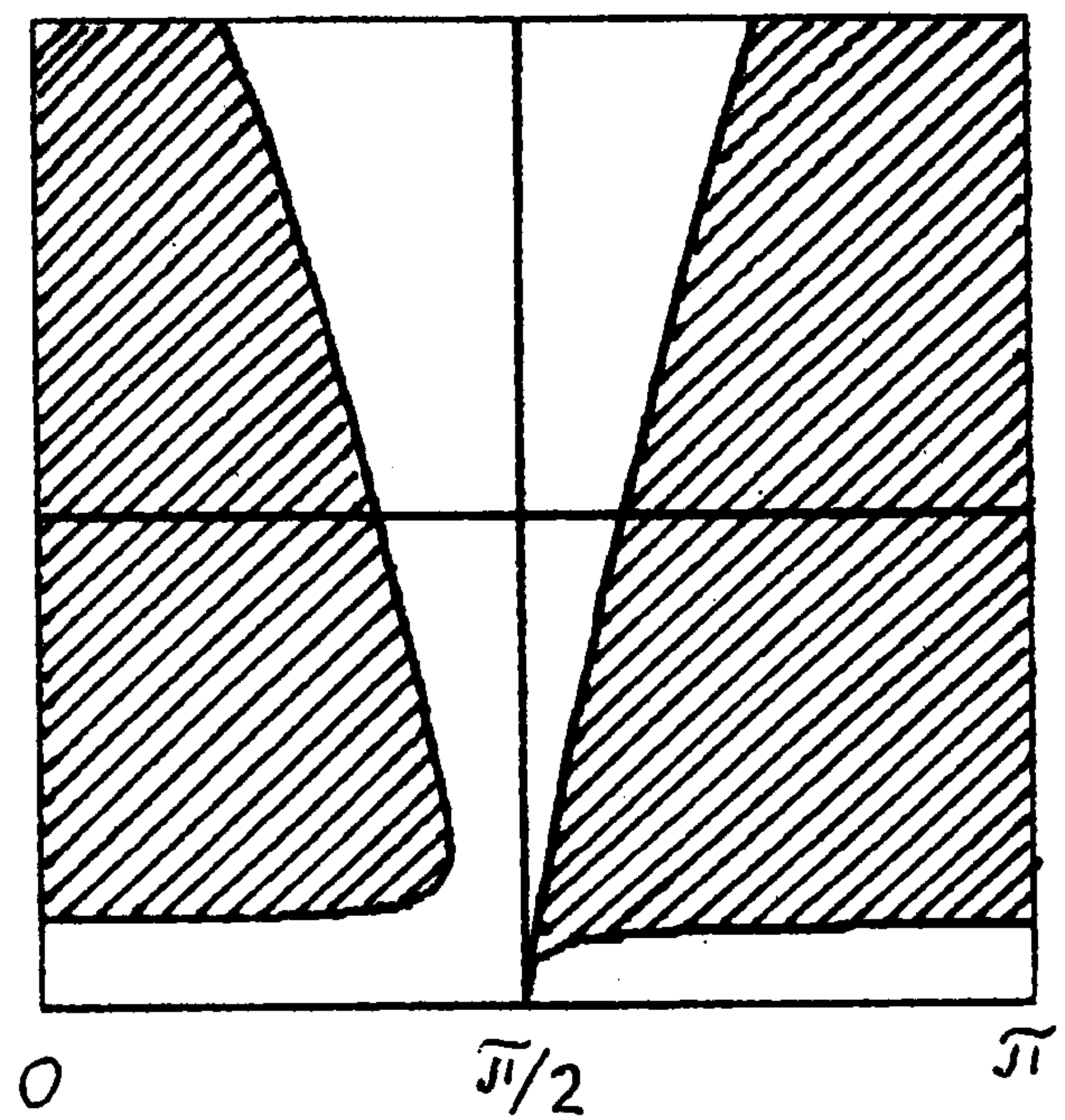
На фиг. 3, 4 приведены кривые (1.2) соответственно для  $\lambda = 0,7$  и  $\lambda = 0,5$ . Зона "застоя" не заштрихована. С уменьшением значений параметра  $\lambda$  она уменьшается.

**2. Анализ движений.** Если параметры системы таковы, что величина (1.1) больше единицы и угол  $\theta_0$  начального отклонения маятника от вертикали по модулю меньше  $\pi/2$ , то на фазовой плоскости траектория точки, изображающей движение маятника, целиком лежит в зоне "застоя". Рама остается неподвижной во все время колебаний маятника, которые постепенно затухают (первый тип движения). Заметим, что при достаточно больших значениях  $\lambda$  область, заштрихованная на фиг. 2, стягивается к кривой  $y = y_1$ , поэтому указанный тип движения должен наблюдаться и при  $\theta_0 > \pi/2$ .

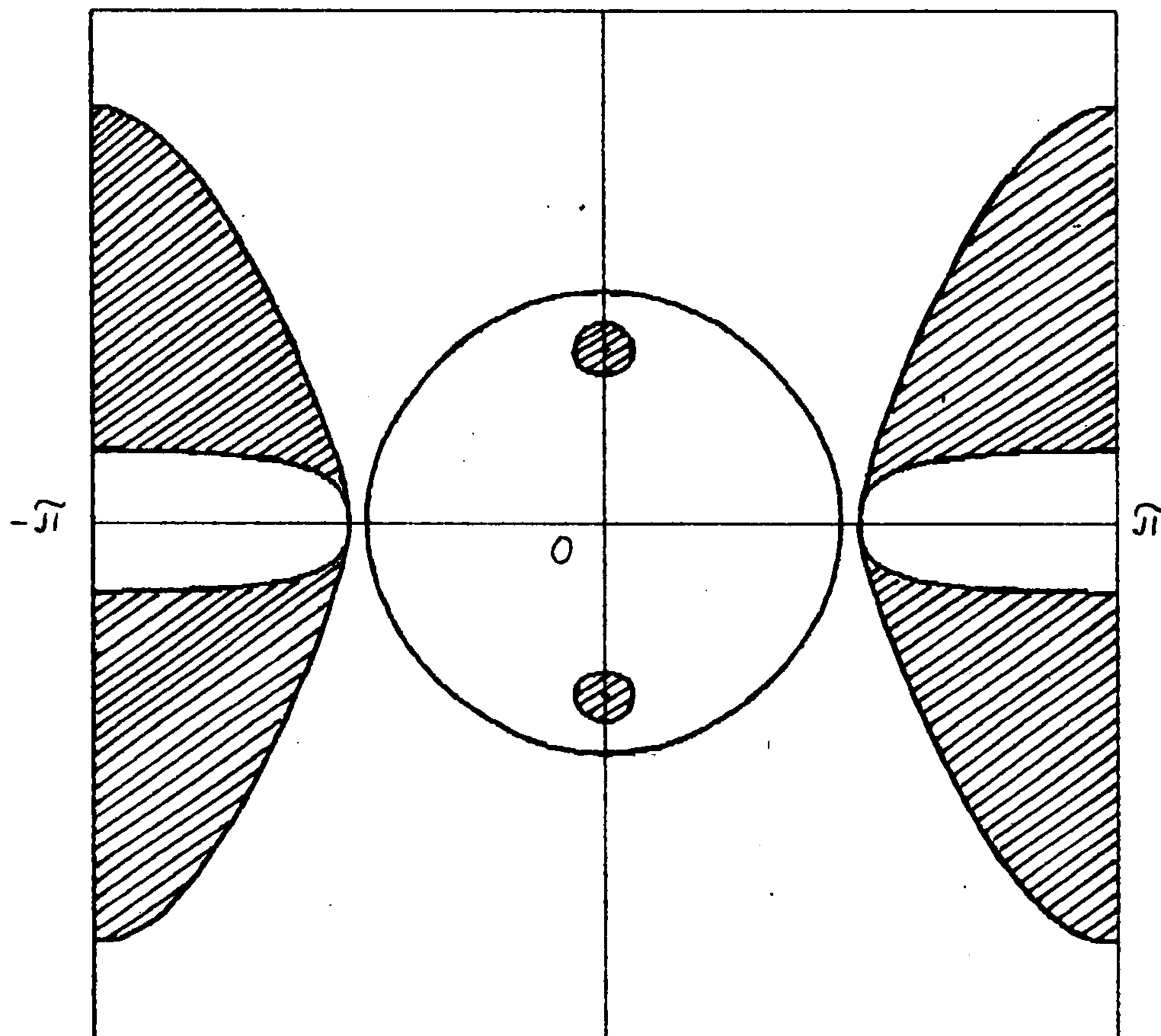
Интересные динамические эффекты проявляются, когда  $\lambda < 1$ . В частности, из рассмотрения фиг. 3, 4 следует объяснение, почему рама во втором типе движения



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

кратковременно останавливается в моменты смены направления колебаний маятника. Действительно, при уменьшении  $\lambda$  зона "застоя" для  $|\theta| < 1$  стягивается к линии  $d\theta/d\tau = 0$ :

$$y_4 = (v - D^{1/2}) / \lambda = \lambda / (2v^2) + O(\lambda^3)$$

На фиг. 5 зона "застоя" (незаштрихована) построена для  $\lambda = 0,95$ . Замкнутая кривая, которая охватывает точки  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ , представляет траекторию

$$(d\theta/d\tau)^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

соответствующую интегралу энергии маятника при  $\theta_0 = 1,5 < \pi/2$ .

Если бы диссипации механической энергии не было, то маятник качался бы, а рама оставалась неподвижной. Но из-за трения в подшипниках горизонтальной оси рамы,

сопротивления воздуха и т.п. механическая энергия рассеивается. Следовательно, реальная траектория изображающей точки сходит внутрь упомянутой замкнутой кривой, приближаясь к точке равновесия  $(0, 0)$ . При малой диссипации точка может совершить несколько полных оборотов вокруг начала координат, не пересекая заштрихованных на фиг. 5 областей, охватывающих точки  $(0, 1)$  и  $(0, -1)$ . Однако в какой-то момент изображающая точка попадает внутрь одной из этих областей. Тогда момент сил трения относительно вертикальной оси не сможет компенсировать момент силы Кориолиса  $M_z$ , рама начнет поворачиваться, что отвечает третьему типу движений в приборе Пошехонова.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-16242).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* О маятнике Пошехонова // *Астрон. журн.* 1955. Т. 32. Вып. 5. С. 462-468; Прикладные задачи механики. Кн. 2: Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука, 1986. С. 216-224.
2. *Перцев Б.П.* Теория маятника Пошехонова // *Астрон. журн.* 1954. Т. 31. Вып. 1. С. 90-96.
3. *Киселевська Л.М.* До теорії маятника Пошехонова // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1968. № 6. С. 547-550.

Москва

Поступила в редакцию  
20.VI.1995