

УДК 531.31

© 1996 г. О.В. Холостова

**О ДВИЖЕНИИ БЛИЗКОЙ К ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ  
В ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

Рассматривается движение автономной механической системы с одной степенью свободы, на которую наложены малые периодические по времени возмущения и малые диссипативные силы, в окрестности ее устойчивого положения равновесия. Предполагается, что имеет место резонанс в вынужденных колебаниях, когда отношение частоты малых колебаний невозмущенной системы к частоте внешнего периодического возмущения близко к целому числу. Изучается качественный характер поведения приближенной системы. В зависимости от параметров задачи – величин диссипации и резонансной расстройки – дано строгое решение вопроса о существовании, числе и устойчивости периодических (с периодом, равным периоду возмущающего воздействия) движений, рождающихся из положения равновесия невозмущенной системы. В качестве примера рассмотрено движение маятника с колеблющейся точкой подвеса.

**1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана.** Рассмотрим близкую к интегрируемой механическую систему, гамильтониан которой представляется в виде ряда по степеням малого параметра  $\epsilon$ :

$$H(x, p_x, t) = H^{(0)}(x, p_x) + \epsilon H^{(1)}(x, p_x, t) + \epsilon^2 H^{(2)}(x, p_x, t) + \dots \tag{1.1}$$

где  $H^{(i)}(x, p_x, t)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) –  $2\pi$ -периодические функции времени.

Пусть при  $\epsilon = 0$  кинетическая и потенциальная энергия системы определяются выражениями  $\frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$  и  $c(x)$  соответственно, а начало координат  $x = 0$  является положением устойчивого равновесия. В окрестности точки  $x = 0, p_x = 0$  функции  $H^{(i)}$  представляются в виде рядов:

$$H^{(0)}(x, p_x) = H_2^{(0)} + H_3^{(0)} + H_4^{(0)} + \dots, \quad H_2^{(0)} = \frac{1}{2}p_x^2 / a(0) + \frac{1}{2}c''(0)x^2$$

$$H^{(i)}(x, p_x, t) = H_1^{(i)} + H_2^{(i)} + H_3^{(i)} + \dots, \quad H_1^{(i)} = f_i(t)x + g_i(t)p_x, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

где  $H_k^{(i)}$  – многочлен  $k$ -й степени относительно  $x$  и  $p_x$ .

Полагаем, что в системе имеет место резонанс в вынужденных колебаниях, т.е. частота  $\omega_0 = \sqrt{c''(0) / a(0)}$  малых колебаний системы при  $\epsilon = 0$  близка к целому числу. Будем, кроме того, считать, что на систему действуют диссипативные силы, описываемые функцией Релея вида  $R(\dot{x}) = \frac{1}{2}\delta\dot{x}^2$ .

Цель работы – исследование вопроса о существовании, числе и устойчивости  $2\pi$ -периодических движений системы в зависимости от параметров задачи: величины диссипации и близости частоты  $\omega_0$  к целому числу. Кроме того, изучается качественный характер поведения приближенной (модельной) системы в окрестности положения равновесия невозмущенной ( $\epsilon = 0$ ) системы в рассматриваемом резонансном случае.

Осуществим предварительно ряд канонических замен переменных, упрощающих

структуру гамильтониана (1.1). Полагая

$$x = \varepsilon^{1/3} x^* / \sqrt{\omega_0 a(0)}, \quad p_x = \varepsilon^{1/3} \sqrt{\omega_0 a(0)} p_x^*$$

запишем новый гамильтониан в виде

$$H^*(x^*, p_x^*, t) = \frac{1}{2} \omega_0 (x^{*2} + p_x^{*2}) + \varepsilon^{1/3} H_3^{(0)}(x^*, p_x^*) + \varepsilon^{2/3} H_4^{(0)}(x^*, p_x^*) + \varepsilon^{2/3} f(t) x^* + \varepsilon^{2/3} g(t) p_x^* + O(\varepsilon) \quad (1.2)$$

$$f(t) = f_1(t) / \sqrt{\omega_0 a(0)}, \quad g(t) = g_1(t) \sqrt{\omega_0 a(0)}$$

Соответствующие уравнения движения запишутся следующим образом:

$$dx^* / dt = \partial H^* / \partial p_x^*, \quad dp_x^* / dt = -\partial H^* / \partial x^* - \varepsilon^{2/3} \delta_* p_x^* + O(\varepsilon)$$

Величина  $\delta_*$  определяется соотношением  $\delta = \varepsilon^{2/3} a(0) \delta_*$ .

Осуществляя далее каноническое преобразование  $x^*, p_x^* \rightarrow \xi, \eta$  типа преобразования Биркгофа, уничтожим в гамильтониане (1.2) форму  $H_3^{(0)}$  и упростим форму  $H_4^{(0)}$ , при этом гамильтониан примет вид

$$K = \frac{1}{2} \omega_0 (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{4} \varepsilon^{2/3} c_2 (\xi^2 + \eta^2)^2 + \varepsilon^{2/3} f(t) \xi + \varepsilon^{2/3} g(t) \eta + O(\varepsilon) \quad (1.3)$$

а уравнения движения будут такими:

$$d\xi / dt = \partial K / \partial \eta, \quad d\eta / dt = -\partial K / \partial \xi - \varepsilon^{2/3} \delta_* \eta + O(\varepsilon) \quad (1.4)$$

Постоянный коэффициент  $c_2$  в (1.3) считаем отличным от нуля.

Пусть  $\omega_0 = N + \varepsilon^{2/3} \mu_*$ , где  $N$  – целое число. Представим функции  $f(t)$  и  $g(t)$  в виде рядов Фурье:

$$f(t) = a_N \cos Nt + b_N \sin Nt + \sum_{n \neq N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$g(t) = c_N \cos Nt + d_N \sin Nt + \sum_{n \neq N} (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

Отбрасывая в (1.4) члены  $O(\varepsilon)$  и полагая  $\delta_* = 0$ , рассмотрим линейные уравнения движения. Их решения вида

$$\xi^* = \varepsilon^{2/3} \sum_{n \neq N} [(-\omega_0 a_n + n d_n) \cos nt - (\omega_0 b_n + n c_n) \sin nt] / (\omega_0^2 - n^2)$$

$$\eta^* = \varepsilon^{2/3} \sum_{n \neq N} [-(\omega_0 c_n + n b_n) \cos nt + (n a_n - \omega_0 d_n) \sin nt] / (\omega_0^2 - n^2)$$

представляют собой вынужденные колебания системы, соответствующие нерезонансным частотам внешних возмущений, при отсутствии диссипации. Полагая

$$\xi_1 = \xi - \xi^*, \quad \eta_1 = \eta - \eta^*$$

уничтожим в слагаемых  $\varepsilon^{2/3} f(t) \xi$  и  $\varepsilon^{2/3} g(t) \eta$  гамильтониана (1.3) члены с нерезонансными частотами.

Переходя затем к новым каноническим переменным  $\varphi, r$  по формулам  $\xi_1 = \sqrt{2r} \sin \varphi$ ,  $\eta_1 = \sqrt{2r} \cos \varphi$  и уничтожая в новом гамильтониане слагаемые, содержащие гармоники  $\sin(\varphi + Nt)$ ,  $\cos(\varphi + Nt)$ , путем замены  $\varphi, r \rightarrow \varphi_*, r_*$ , задаваемой формулами

$$r = r_* + \varepsilon^{2/3} \sqrt{2r_*} [(b_N - c_N) \cos(\varphi_* + Nt) - (a_N + d_N) \sin(\varphi_* + Nt)] / (4N) + O(\varepsilon)$$

$$\varphi = \varphi_* - \sqrt{2} \varepsilon^{2/3} [(b_N - c_N) \sin(\varphi_* + Nt) + (a_N + d_N) \cos(\varphi_* + Nt)] / (8N \sqrt{r_*}) + O(\varepsilon)$$

получим гамильтониан вида

$$\Gamma = Nr_* + \varepsilon^{2/3} \mu_* r_* + \varepsilon^{2/3} c_2 r_*^2 + \varepsilon^{2/3} \sqrt{r_*} \kappa \cos(\varphi_* - Nt - \gamma) + O(\varepsilon) \quad (1.5)$$

где угол  $\gamma$  определяется соотношениями  $\sin \gamma = (a_N - d_N)/\kappa_1$ ,  $\cos \gamma = (b_N + c_N)/\kappa_1$ ,  $\kappa_1 = \sqrt{(a_N - d_N)^2 + (b_N + c_N)^2}$ , а  $\kappa = \kappa_1/\sqrt{2}$ .

Уравнения движения будут такими:

$$d\varphi_* / dt = \partial \Gamma / \partial r_* + \varepsilon^{2/3} \delta_* \sin \varphi_* \cos \varphi_* + O(\varepsilon) \quad (1.6)$$

$$dr_* / dt = -\partial \Gamma / \partial \varphi_* - \varepsilon^{2/3} \delta_* r_* (1 + \cos 2\varphi_*) + O(\varepsilon)$$

Замена переменных  $\varphi_*$ ,  $r_* \rightarrow \psi$ ,  $R$  вида

$$\varphi_* = \psi - \varepsilon^{2/3} \delta_* \cos 2\psi / (4N) + O(\varepsilon)$$

$$r_* = R - \varepsilon^{2/3} \delta_* R \sin 2\psi / (2N) + O(\varepsilon)$$

позволяет в уравнениях (1.6) упростить диссипативные члены. Новый гамильтониан при этом будет иметь вид (1.5), где вместо переменных  $\varphi_*$  и  $r_*$  стоят  $\psi$  и  $R$ , а уравнения станут такими:

$$d\psi / dt = \partial \Gamma / \partial R + O(\varepsilon), \quad dR / dt = -\partial \Gamma / \partial \psi - \varepsilon^{2/3} \delta_* R + O(\varepsilon)$$

Наконец, замена переменных по формулам

$$\psi = Nt + \gamma + \sigma(\theta + \pi/2) - \pi/2, \quad R = (\kappa / c_2)^{2/3} \rho \quad (\sigma = \text{sign } c_2)$$

и введение нового времени  $\tau$  по формуле  $\tau = \varepsilon^{2/3} |c_2|^{1/3} \kappa^{2/3} t$  приводит гамильтониан (1.5) к виду

$$H = -\mu\rho + \rho^2 + \sqrt{\rho} \cos \theta + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \mu = -\sigma\mu_* / (|c_2|^{1/3} \kappa^{2/3}) \quad (1.7)$$

Соответствующие уравнения движения запишутся следующим образом:

$$d\theta / d\tau = \partial H / \partial \rho + O(\varepsilon^{1/3}), \quad d\rho / d\tau = -\partial H / \partial \theta - \chi\rho + O(\varepsilon^{1/3}) \quad (1.8)$$

$$\chi = \delta_* / (|c_2|^{1/3} \kappa^{2/3})$$

**2. Исследование модельной системы.** Отбрасывая в (1.7) и (1.8) члены  $O(\varepsilon^{1/3})$ , получим укороченную (модельную) систему. Ее движение описывается уравнениями

$$d\theta/d\tau = -\mu + 2\rho + \cos\theta/(2\sqrt{\rho}), \quad d\rho/d\tau = \sqrt{\rho} \sin\theta - \chi\rho \quad (2.1)$$

Исследуем качественный характер поведения системы (2.1) при различных значениях параметров  $\chi$  и  $\mu$ .

Положения равновесия  $\theta = \theta_*$ ,  $\rho = \rho_*$  системы (2.1) удовлетворяют уравнениям

$$\sin\theta = \chi\sqrt{\rho}, \quad \cos\theta = 2\sqrt{\rho}(\mu - 2\rho)$$

откуда, исключив  $\theta$ , получим следующее уравнение для  $\rho$ :

$$F(\rho) \equiv \rho^3 - \mu\rho^2 + \frac{1}{16}(\chi^2 + 4\mu^2)\rho - \frac{1}{16} = 0 \quad (2.2)$$

Число действительных корней уравнения (2.2) зависит от знака выражения

$$Q(\chi, \mu) = \chi^6 + 8\chi^4\mu^2 + 16\chi^2\mu^4 - 8\mu(4\mu^2 + 9\chi^2) + 108 \quad (2.3)$$

Если  $Q > 0$ , то уравнение (2.2) имеет один действительный корень, при  $Q = 0$  – три корня, из которых по крайней мере два равны, и при  $Q < 0$  – три различных действительных корня. Анализ функции  $F(\rho)$  показывает, что все действительные корни уравнения  $F(\rho) = 0$  положительны.

График кривой  $Q(\chi, \mu) = 0$ , построенный при помощи ЭВМ, приведен на фиг. 1. В точке  $(0, 3/2)$  кривая  $Q = 0$  имеет горизонтальную касательную, при  $\mu \rightarrow +\infty$  кривая асимптотически приближается к оси  $O\mu$ , точка  $P(3^{1/2}2^{-1/3}, 3 \cdot 2^{-4/3})$  является точкой возврата.

В области I ( $Q > 0$ ) система (2.1) имеет одно, а в области III ( $Q < 0$ ) – три положения равновесия.

Для исследования устойчивости указанных положений равновесия положим  $\theta = \theta_* + x$ ,  $\rho = \rho_* + y$ , тогда из (2.1) получим линеаризованную систему уравнений, корни характеристического уравнения которой имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\chi \pm \sqrt{(6\rho_* - \mu)(\mu - 2\rho_*)} \quad (2.4)$$

При выполнении неравенства

$$s(\chi, \mu) \equiv \chi^2 / 4 - (6\rho_* - \mu)(\mu - 2\rho_*) > 0 \quad (2.5)$$

оба корня (2.4) имеют отрицательные вещественные части, и рассматриваемое положение равновесия асимптотически устойчиво. Если  $s(\chi, \mu) < 0$ , то один из корней (2.4) положителен, и положение равновесия неустойчиво.

Из соотношений (2.2) и (2.5) получим, что

$$s(\chi, \mu) = 4F'(\rho_*)$$

т.е. знак  $s(\chi, \mu)$  совпадает со знаком производной  $F'(\rho)$  в рассматриваемой равновесной точке (нуле функции  $F(\rho)$ ). Таким образом, если, проходя через нуль, функция  $F(\rho)$  возрастает, то соответствующее положение равновесия асимптотически устойчиво, если убывает – неустойчиво.

Анализируя функцию  $F(\rho)$ , получим отсюда, что в области I единственное положение равновесия системы (2.1) асимптотически устойчиво; в области III больший и меньший корни уравнения (2.2) отвечают асимптотически устойчивым, а средний корень – неустойчивому положениям равновесия.

В фазовой плоскости системы (2.1) неустойчивому положению равновесия соответствует седловая точка, а устойчивым – либо устойчивый фокус (при выполнении неравенства  $(6\rho_* - \mu)(\mu - 2\rho_*) < 0$ ), либо устойчивый узел (если это неравенство выполняется с противоположным знаком).

Тип особых точек, отвечающих асимптотически устойчивым положениям равновесия, меняется при переходе через кривые (в плоскости параметров  $\chi, \mu$ ), соответствующие равенствам  $\rho_* = \mu/6$  и  $\rho_* = \mu/2$ . Полагая  $F(\mu/6) = 0$  и  $F(\mu/2) = 0$ , получим из (2.2) следующие уравнения указанных кривых (на фиг. 1 они обозначены соответственно буквами  $\alpha$  и  $\beta$ ):

$$\chi^2 = (54 - 16\mu^3)/(9\mu), \quad \mu = 2/\chi^2 \quad (2.6)$$

Точки A, B и C пересечения этих кривых между собой и с кривой  $Q = 0$  имеют координаты  $(2^{5/6}3^{-1/3}, (3/2)^{2/3})$ ,  $(3 \cdot 2^{1/6} \cdot 5^{-5/6}, 3 \cdot (2/25)^{1/3})$  и  $(2^{1/3}, 2^{1/3})$  соответственно. В точке  $(0, 3/2)$  кривая  $\alpha$  имеет общую горизонтальную касательную с кривой  $Q = 0$ , а при  $\chi \rightarrow +\infty$  асимптотически приближается к оси  $O\chi$ .

Кривые  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $Q = 0$  разбивают полуплоскость  $\chi > 0$  в плоскости параметров  $\chi, \mu$  на семь подобластей (обозначенных на фиг. 1 цифрами 1–7) с различным характером поведения траекторий системы (2.1). Соответствующие фазовые портреты представлены на фиг. 2, а–ж в плоскости переменных  $u = \sqrt{2\rho} \cos\theta, v = \sqrt{2\rho} \sin\theta$ .

В подобластях 1 и 3 области I асимптотически устойчивому положению равновесия отвечает устойчивый фокус (фиг. 2, а, в), в подобласти 2 – устойчивый узел (фиг. 2, б).

В области III выделим четыре подобласти 4–7. Меньшему корню уравнения (2.2) отвечает устойчивый узел в подобластях 4, 5 и устойчивый фокус в подобластях 6, 7; большему

корню – устойчивый фокус в подобластях 4, 7 и устойчивый узел в подобластях 5, 6; среднему корню отвечает седловая точка. Соответствующие подобластям 4–7 фазовые портреты системы (2.1) приведены на фиг. 2, г–ж.

Отметим, что при  $\chi > 0$  система (2.1) не имеет замкнутых траекторий, что следует из критерия Бендиксона [1] и вида правых частей системы (2.1). Каждая траектория системы стремится к единственному (в области I) или одному из двух (в области III) асимптотически устойчивых положений равновесия.

Для кривых  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $Q = 0$  корни уравнения (2.2) выписываются явно: для точек кривой  $\alpha$

$$\rho_1 = \mu / 6, \quad \rho_{2,3} = \frac{5}{12}\mu \mp \sqrt{25\mu^3 - 54} / (12\sqrt{\mu})$$

(в области I корни  $\rho_{2,3}$  комплексно сопряженные); для точек кривой  $\beta$

$$\rho_{1,2} = \mu / 4 \mp \frac{1}{4}\sqrt{(\mu^3 - 2)/\mu}, \quad \rho_3 = \mu / 2$$

(в области I корни  $\rho_{1,2}$  комплексно сопряженные); для точек нижней ветви кривой  $Q = 0$

$$\rho_1 = \rho_2 = (4\mu - \sqrt{4\mu^2 - 3\chi^2}) / 12, \quad \rho_3 = (16\rho_1^2)^{-1}$$

для точек верхней ветви кривой  $Q = 0$

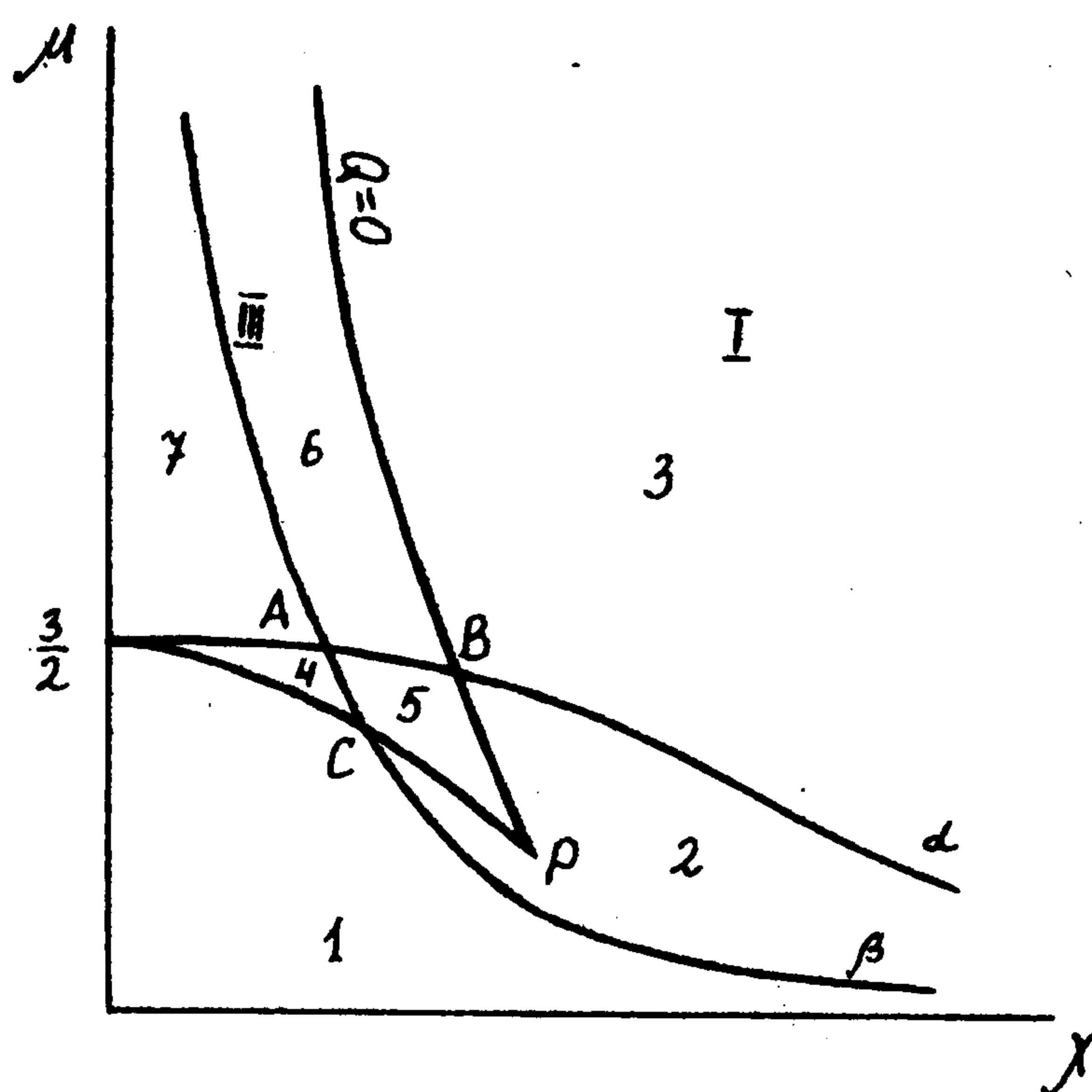
$$\rho_1 = (16\rho_2^2)^{-1}, \quad \rho_2 = \rho_3 = (4\mu + \sqrt{4\mu^2 - 3\chi^2}) / 12$$

для точки P кривой  $Q = 0$

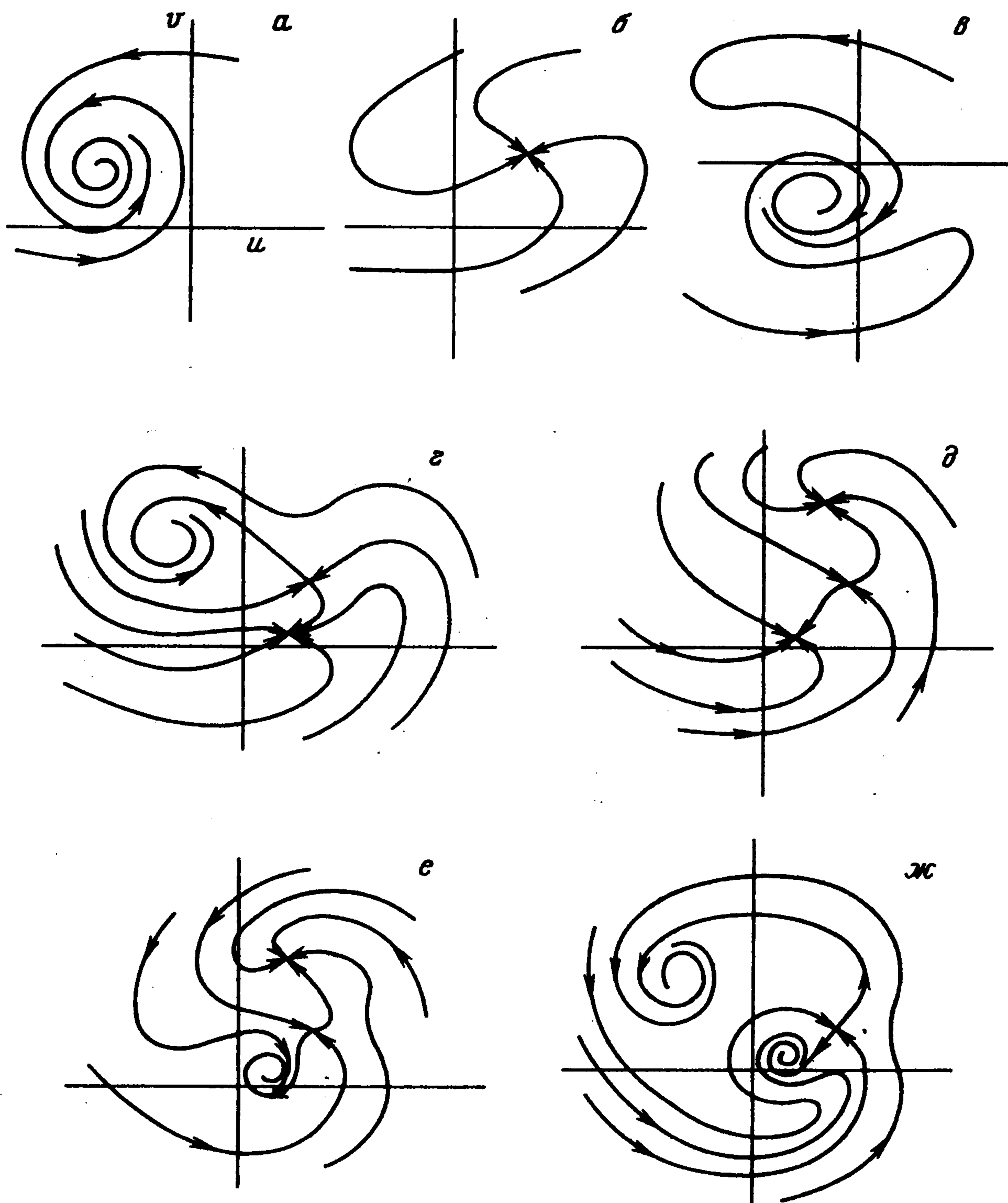
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2^{-4/3}$$

Не приводя фазовых портретов системы (2.1), соответствующих кривым  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $Q = 0$ , укажем изменения в характере особых точек, происходящие на этих кривых.

На кривых  $\alpha$  и  $\beta$  меняется характер особой точки, отвечающей равновесному значению  $\rho_1 = \mu/6$  и  $\rho_3 = \mu/2$  соответственно (переход от устойчивого фокуса к устойчивому узлу или наоборот). Для этих точек характеристическое уравнение



Фиг. 1



Фиг. 2

имеет кратный корень; в фазовой плоскости им отвечает устойчивый вырожденный узел. Характер двух остальных особых точек (в области III) на кривых  $\alpha$  и  $\beta$  сохраняется.

На кривой  $Q = 0$  происходит слияние двух особых точек из области III – седла и устойчивого узла – в одну сложную особую точку типа седло-узел с устойчивым узловым сектором [1] (соответствующее характеристическое уравнение имеет один нулевой и один отрицательный вещественный корень). В области I эта сложная особая точка исчезает, и остается единственная особая точка, характер которой при переходе через кривую  $Q = 0$  не меняется.

В точке  $P$  кривой  $Q = 0$  три особых точки системы (2.1) сливаются в одну сложную особую точку, имеющую характер устойчивого узла [1].

**3. О периодических решениях полной системы.** Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости периодических решений полной системы уравнений (1.8) с гамильтонианом (1.7), рождающихся из положений равновесия модельной системы (2.1), для значений параметров  $\chi$  и  $\mu$ , лежащих внутри областей 1–7 фиг. 1. В окрестности положения равновесия  $\theta = \theta_*$ ,  $\rho = \rho_*$  систему (1.8) можно рассматривать

как квазилинейную с возмущениями порядка  $\varepsilon^{1/3}$ , имеющими по  $\tau$  период  $T \sim \varepsilon^{2/3}$ . Так как корни характеристического уравнения модельной системы имеют порядок единицы и, следовательно, не могут быть равны  $ik2\pi/T$  ( $k$  – целое число), то имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических движениях квазилинейных систем [2].

Из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное,  $T$ -периодическое по  $\tau$ , аналитическое по  $\varepsilon^{1/3}$  решение полной системы (1.8). В исходной близкой к гамильтоновой системе ему соответствует решение, аналитическое по  $\varepsilon^{1/3}$ , периодическое по времени, с периодом, равным периоду внешнего возмущающего воздействия. При  $\varepsilon = 0$  это периодическое решение соответствует устойчивому положению равновесия  $x \equiv 0$  невозмущенной системы.

Выводы об устойчивости положений равновесия модельной системы переносятся на соответствующие периодические решения полной системы: асимптотически устойчивые и неустойчивые положения равновесия системы (2.1) переходят соответственно в асимптотически устойчивые и неустойчивые периодические решения системы (1.8). Это следует из непрерывности по  $\varepsilon$  характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

**4. Пример: маятник с колеблющейся точкой подвеса.** В качестве примера рассмотрим движение математического маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания малой амплитуды. Пусть  $l$  – длина маятника,  $x$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $a$  и  $\Omega$  – амплитуда и частота колебаний его точки подвеса. На маятник действуют диссипативные силы, задаваемые функцией Релея  $R = \frac{1}{2}\delta\dot{x}'^2$  (здесь и далее штрих означает дифференцирование по безразмерному "времени"  $\Omega t$ , которое в дальнейшем вновь будем обозначать через  $t$ ).

Движение маятника описывается уравнением

$$x'' + \delta x' + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon \sin t \cos x \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = a/l \ll 1, \quad \omega_0^2 = g/(\Omega^2 l)$$

Это уравнение можно заменить эквивалентной системой двух уравнений вида

$$x' = \partial H / \partial p_x, \quad p_x' = -\partial H / \partial x - \delta x' \quad (4.2)$$

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 - \omega_0^2 \cos x - \varepsilon \sin t \sin x$$

При  $\varepsilon = 0$  и  $\delta = 0$  система (4.2) имеет решение  $x = 0$ ,  $p_x = 0$ , соответствующее устойчивому положению равновесия маятника. В окрестности указанного решения гамильтониан представляется в виде ряда

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega_0^2 x^2) - \frac{1}{24}\omega_0^2 x^4 + \varepsilon(-\sin t \cdot x + \frac{1}{6}\sin t \cdot x^3) + \dots \quad (4.3)$$

где многоточием обозначены члены выше четвертой степени по  $x$  и  $p_x$ .

Пусть частота  $\omega_0$  собственных малых колебаний маятника близка к единице. Будем считать, что  $\omega_0 = 1 + 2^{-5/3} \varepsilon^{2/3} \mu$  и, кроме того,  $\delta = \varepsilon^{2/3} \delta_*$ .

Следуя рассуждениям из разд. 1, осуществим ряд канонических замен переменных, приводящих гамильтониан (4.3) к виду (1.7), а систему уравнений движения – к виду (1.8). Эта последовательность замен переменных имеет вид:

$$x = \varepsilon^{1/3} x^* / \sqrt{\omega_0}, \quad p_x = \varepsilon^{1/3} \sqrt{\omega_0} p_x^* \quad (4.4)$$

$$x^* = \xi + \varepsilon^{2/3} (5\xi^3 + 9\xi\eta^2) / (192\omega_0) + O(\varepsilon^{4/3})$$

$$p_x^* = \eta - \varepsilon^{2/3} (5\xi^2\eta + \eta^3) / (64\omega_0) + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (4.5)$$

$$\xi = \sqrt{2r} \sin \varphi, \quad \eta = \sqrt{2r} \cos \varphi \quad (4.6)$$

$$\varphi = \varphi_* + \sqrt{2} \varepsilon^{2/3} \sin(\varphi_* + t) / (8\sqrt{r_*}) + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (4.7)$$

$$r = r_* - \frac{1}{4} \varepsilon^{2/3} \sqrt{2r_*} \cos(\varphi_* + t) + O(\varepsilon^{4/3})$$

$$\varphi_* = \psi - \frac{1}{4} \varepsilon^{2/3} \delta_* \cos 2\psi + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (4.8)$$

$$r_* = R - \frac{1}{2} \varepsilon^{2/3} \delta_* R \sin 2\psi + O(\varepsilon^{4/3})$$

$$\psi = t - \theta, \quad R = 2^{7/3} \rho \quad (4.9)$$

Одновременно с последней заменой вводится новая независимая переменная  $\tau = 2^{-5/3} \varepsilon^{2/3} t$ . В результате преобразований (4.4)–(4.9) система уравнений (4.2) примет вид

$$d\theta/d\tau = \partial H / \partial \rho + O(\varepsilon^{2/3}), \quad d\rho/d\tau = -\partial H / \partial \theta - \chi \rho + O(\varepsilon^{2/3})$$

$$H = -\mu \rho + \rho^2 + \sqrt{\rho} \cos \theta + O(\varepsilon^{2/3}), \quad \chi = 2\delta_*$$

Из результатов разд. 2 и 3 следует, что из существующего при  $\varepsilon = 0$  устойчивого положения равновесия маятника рождается, при  $0 < \varepsilon \ll 1$ , одно или три  $2\pi$ -периодических движения маятника (в областях I и III (фиг. 1) соответственно), которым отвечают одно или три положения равновесия модельной системы (разд. 2). Определяя равновесные значения переменных  $\theta$  и  $\rho$  (обозначим их  $\theta_0, \rho_0$  для области I и  $\theta_i, \rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для области III) и осуществляя обратную последовательность замен переменных (4.4)–(4.9), получим, что в области I указанное  $2\pi$ -периодическое решение имеет вид

$$x_0(t) = 2^{5/3} \varepsilon^{1/3} \sqrt{\rho_0} \sin(t - \theta_0) + O(\varepsilon^{2/3}) \quad (4.10)$$

а в области III

$$x_i(t) = 2^{5/3} \varepsilon^{1/3} \sqrt{\rho_i} \sin(t - \theta_i) + O(\varepsilon^{2/3}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

Решения (4.10) и (4.11) описывают колебания маятника малой амплитуды с частотой, равной частоте колебаний его точки подвеса. Начальный угол отклонения маятника от вертикали для указанных колебаний отрицателен (маятник отклонен влево); начальная угловая скорость  $x'_0(0) < 0$  в подобласти 1 и  $x'_0(0) > 0$  в подобластях 2 и 3 (см. фиг. 1); в области III  $x'_2(0) > 0$ ,  $x'_3(0) > 0$ , а величина  $x'_1(0) > 0$  в подобластях 5, 6 и  $x'_1(0) < 0$  в подобластях 4, 7.

Из результатов разд. 3 следует, что единственное в области I периодическое решение  $x_0(t)$  асимптотически устойчиво; в области III решения  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$ , отвечающие колебаниям маятника с наименьшей и наибольшей амплитудой соответственно, также асимптотически устойчивы, а решение  $x_2(t)$ , отвечающее колебанию со средней по величине амплитудой, неустойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16257) и Международного научного фонда (MFG 300).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.III.1995