УДК 531.36:534.1

© 1996 г. В.Ш. Бурд

РЕЗОНАНСНЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматриваются почти периодически возмущенные двумерные системы с быстро вращающейся фазой и медленно меняющимися коэффициентами. Изучаются условия существования и устойчивости резонансных почти периодических решений. В качестве примера рассматриваются вынужденные колебания математического маятника под действием суммы двух малых периодических сил с близкими частотами.

Резонансные режимы нелинейных систем, которые содержат быстрые и медленные переменные, изучались многими авторами. Была предложена [1] методика исследования стационарных резонансных режимов в системах с быстро вращающимися фазами общего типа. Развит [2] формализм метода усреднения для исследования резонансных режимов в системах с медленно меняющимися коэффициентами. Изучались [3] периодические возмущения двумерных систем с быстро вращающейся фазой и медленно меняющимися коэффициентами. Были указаны условия близости точных и усредненных уравнений на конечном асимптотически большом временном промежутке.

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,\varphi,\psi,\tau,\varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega(x,\tau)+\varepsilon g(x,\varphi,\psi,\tau,\varepsilon) \tag{1.1}$$

где

$$\dot{\psi} = \Omega(\tau), \quad \tau = \varepsilon t$$

Здесь $x(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – скалярные функции, $\tau \in (-\infty, \infty)$ – медленное время, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ – малый параметр, точкой обозначена производная по t. Функции $f(x, \varphi, \psi, \tau, \varepsilon)$, $g(x, \varphi, \psi, \tau, \varepsilon)$ – достаточно гладкие по переменным x, φ в некоторой области D плоскости x, φ, достаточно гладкие по параметру ε и почти периодические функции (ППФ) по каждой из переменных ψ, τ равномерно относительно остальных переменных. Функция $\omega(x, \tau)$ достаточно гладкая по переменной x в некотором интервале и ППФ по τ равномерно относительно x. ППФ $\Omega(\tau)$ отделена от нуля:

$$\inf_{-\infty<\tau<\infty} |\Omega(\tau)| \neq 0 \tag{1.2}$$

Назовем ППФ $f(t)$ правильной, если

$$\int_0^t f(s)ds = t\langle f \rangle + r(t)$$

где $\langle f \rangle$ – среднее значение ППФ $f(t)$, $r(t)$ – ППФ. Далее предполагается, что $\Omega(\tau)$ – правильная ППФ.

Система (1.1) – это система с двумя медленными переменными x, τ и двумя быстрыми φ, ψ. Будет исследоваться случай резонанса: существует такая ППФ $x_0(\tau)$, что

$$\omega(x_0(\tau), \tau) \equiv 0 \tag{1.3}$$

причем выполнены условия невырожденности резонанса

$$\inf_{-\infty<\tau<\infty} |\omega_x(x_0(\tau),\tau)| \neq 0 \tag{1.4}$$

(f_x, f_{xx}, ... – частные производные функции f по x).

2. Изучается поведение решений системы (1.1) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ – окрестности резонансной точки $x_0(\tau)$.

Произведем замену

$x = x_0(\tau) + \mu z$

и разложим правую часть преобразованной системы по степеням μ. В результате получим

$$\begin{aligned} z^{\cdot} &= \mu[f(x_0,\varphi,\psi,\tau,0) - x_{0\tau}] + \mu^2 f_x(x_0,\varphi,\psi,\tau,0)z + O(\mu^3) \\ \varphi^{\cdot} &= \mu\omega_x(x_0,\tau)z + \frac{1}{2}\mu^2\omega_{xx}(x_0,\tau)z^2 + \mu^2 g(x_0,\varphi,\psi,\tau,0) + O(\mu^3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Система (2.1) содержит только одну быструю переменную ψ. Сделаем в системе (2.1) замену, стандартную для метода усреднения, которая позволит избавиться от быстрой переменной в правой части системы (2.1) с точностью до членов порядка μ^2. Эта замена ищется в виде

$$\begin{aligned} z &= \xi + \mu u_1(\eta, \psi, \tau) + \mu^2 u_2(\eta, \psi, \tau)\xi \\ \varphi &= \eta + \mu^2 v_2(\eta, \psi, \tau) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u_i(\eta, \psi, \tau)$ ($i = 1, 2$), $v_2(\eta, \psi, \tau)$ определяются как ППФ по ψ с нулевым средним значением из уравнений

$$\Omega(\tau)\frac{\partial u_1}{\partial\psi} = f(x_0,\eta,\psi,\tau,0) - f_0(\eta,\tau)$$

$$\Omega(\tau)\frac{\partial u_2}{\partial\psi} = f_x(x_0,\eta,\psi,\tau,0) - \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\omega_x(x_0,\tau) - f_1(\eta,\tau)$$

$$\Omega(\tau)\frac{\partial u_2}{\partial\psi} = g(x_0,\eta,\psi,\tau,0) - \omega_x(x_0,\tau)u_1 - g_0(\eta,\tau)$$

где функции $f_0(\eta, \tau), f_1(\eta, \tau), g_0(\eta, \tau)$ – средние значения по ψ функций $f(x_0, \eta, \psi, \tau, 0)$, $f_x(x_0, \eta, \psi, \tau, 0)$, $g(x_0, \eta, \psi, \tau, 0)$ соответственно, причем эти три функции являются правильными ППФ ψ. Замена (2.2) приводит к системе, которая во времени τ является сингулярно возмущенной:

$$\begin{aligned} \mu\frac{d\xi}{d\tau} &= f_0(\eta,\tau) - \frac{dx_0}{d\tau} + \mu f_1(\eta,\tau)\xi + O(\mu^2) \\ \mu\frac{d\eta}{d\tau} &= \omega_x(x_0,\tau)\xi + \mu g_0(\eta,\tau) + \frac{1}{2}\mu\omega_{xx}(x_0,\tau)\xi^2 + O(\mu^2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Пусть существует такая ППФ $\varphi_0(\tau)$, что

$$f_0(\varphi_0(\tau), \tau) \equiv dx_0/d\tau \tag{2.4}$$

Тогда вырожденная система (2.3) ($\mu = 0$) имеет решение

$$\xi = 0, \quad \eta = \varphi_0(\tau) \tag{2.5}$$

Линеаризуя правую часть вырожденной системы на решении (2.5), получаем матрицу

$$A_0(\tau)=\begin{Vmatrix} 0 & f_{0\eta}(\varphi_0(\tau),\tau) \\ \omega_x(x_0,\tau) & 0 \end{Vmatrix}$$

Будем полагать, что ППФ

$$m(\tau)=\omega_x(x_0,\tau)f_{0\eta}(\varphi_0(\tau),\tau)$$

знакопостоянная. Пусть сначала ($\sigma_0 = \mathrm{const}$)

$$m(\tau)>\sigma_0>0, \qquad \tau\in(-\infty,\infty) \tag{2.6}$$

Тогда матрица $A_0(\tau)$ имеет при всех τ вещественные собственные значения разных знаков. В этом случае, как известно [4], у системы

$$\mu\frac{du}{d\tau}=A_0(\tau)u \tag{2.7}$$

при достаточно малых μ пространство решений $U(\mu)$ представимо в виде

$$U(\mu)=U_+(\mu)+U_-(\mu)$$

Для решений $u_+(\tau,\mu)\in U_+(\mu)$ выполнено неравенство $|u_+(\tau,\mu)| \leqslant M_+\exp[-\gamma_+\mu^{-1}\times(\tau-s)]\,|u_+(s,\mu)|$ $(-\infty<s<\tau<\infty)$, а для решений $u_-(\tau,\mu)\in U_-(\mu)$ – неравенство $|u_-(\tau,\mu)| \leqslant M_-\exp[\gamma_-\mu^{-1}(\tau-s)]\,|u_-(s,\mu)|$ $(-\infty<\tau<s<\infty)$. Здесь M_+, M_-, γ_+, γ_- – положительные постоянные, $|\;|$ – некоторая норма в R^2.

Из оценок решений системы (2.7) следует, что решение этой системы неустойчиво при достаточно малых μ, если пространство $X_-(\mu)$ начальных условий решений из $U_-(\mu)$ нетривиально.

Обозначим через B банахово пространство ППФ со значениями в R^2 с обычной нормой. Из изложенного выше следует, что дифференциальный оператор

$$L(\mu)u=du/d\tau-\mu^{-1}A_0(\tau)u$$

непрерывно обратим в B при достаточно малых μ и, следовательно, неоднородная система

$$\mu u'=A_0(\tau)u+f(\tau), \qquad f(\tau)\in B \tag{2.8}$$

имеет единственное почти периодическое решение (ППР)

$$u(\tau,\mu)=L^{-1}(\mu)f(\tau)=\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,s,\mu)f(s)ds$$

где

$$|K(\tau,s,\mu)|\le M\exp[-\gamma\mu^{-1}|\tau-s|] \quad (-\infty<\tau,s<\infty) \tag{2.9}$$

а M, γ – положительные постоянные.

В системе (2.3) сделаем замену $v=\eta(\tau)-\varphi_0(\tau)$ и запишем полученную систему в векторной форме

$$\mu w'=A_0(\tau)w+F(w,\psi,\tau,\mu) \quad (w=(\xi,v)) \tag{2.10}$$

Очевидно, выполнено неравенство

$$|F(0,\psi,\tau,\mu)| \leqslant \omega_1(\mu) \tag{2.11}$$

где $\omega_1(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. Далее, в силу гладкости вектор-функции $F(w,\psi,\tau,\mu)$ по w

справедливо неравенство

$$|F(w_1,\psi,\tau,\mu)-F(w_2,\psi,\tau,\mu)|\leqslant\omega_2(\rho,\mu)|w_1-w_2| \tag{2.12}$$

при $|w_1|, |w_2| \leqslant \rho$, причем $\omega_2(\rho,\mu)\to 0$ при $\rho\to 0$, $\mu\to 0$.

Задача о ППР системы (2.10) эквивалентна вопросу о разрешимости в пространстве B операторного уравнения

$$w(\tau,\mu)=\Pi(w,\mu)=\frac{1}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\tau,s,\mu)F(w,s,\mu)ds \tag{2.13}$$

Из неравенств (2.9), (2.11), (2.12) следует, что существуют числа a_0 и μ_1, такие, что при $0<\mu\leqslant\mu_1$ оператор $\Pi(w,\mu)$ на шаре $\|w\|\leqslant a_0$ пространства B удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений, причем при $\mu\to 0$ числа $a_0(\mu)\to 0$. Поэтому операторное уравнение (2.13) имеет в шаре $\|w\|\leqslant a_0$ единственное решение $w(\tau,\mu)$, которое стремится к (0, 0) при $\mu\to 0$ равномерно по τ. Из неравенства (2.6) и теоремы об устойчивости по первому приближению получаем, что при достаточно малых μ ППР $w(\tau,\mu)$ системы (2.10) неустойчиво.

Сформулируем полученный результат применительно к системе (1.1).

Теорема 1. Пусть существует ППФ $x_0(\tau)$, удовлетворяющая равенству (1.3) и неравенству (1.4). Пусть правильная ППФ $\Omega(\tau)$ удовлетворяет неравенству (1.2). Пусть $f(x_0,\varphi,\psi,\tau,0)$ правильная ППФ ψ и существует ППФ $\varphi_0(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (2.4), и выполнено неравенство (2.6). Тогда в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки $x_0(\tau)$ существует при достаточно малых ε почти периодическое по t решение системы (1.1), которое неустойчиво.

3. Предположим теперь, что вместо неравенства (2.6) выполнено неравенство

$$m(\tau)<\sigma_1<0,\qquad \tau\in(-\infty,\infty),\qquad (\sigma_1=\text{const}) \tag{3.1}$$

В этом случае собственные значения матрицы $A_0(\tau)$ при всех τ чисто мнимые.

Систему (2.3) запишем во времени t:

$$\begin{aligned}\xi^{\cdot}&=\mu\left[f_0(\eta,\tau)-\frac{dx_0}{d\tau}\right]+\mu^2f_1(\eta,\tau)\xi+O(\mu^3)\\ \eta^{\cdot}&=\mu\omega_x(x_0,\tau)\xi+\mu^2g_0(\eta,\tau)+\frac{1}{2}\mu^2\omega_{xx}(x_0,\tau)\xi^2+O(\mu^3)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Сделаем в системе (3.2) замену

$$\xi=\mu u(t)+\mu\xi_0(\tau)+\mu^3u_3(\psi,\tau)$$

$$\eta=\varphi_0(\tau)+\mu v(t)+\mu^2v_0(\tau)$$

где ППФ $\varphi_0(\tau)$ – решение уравнения (2.4), а ППФ $\xi_0(\tau)$ и $v_0(\tau)$ – решения уравнений

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau}=\omega_x(x_0,\tau)\xi_0(\tau)+g_0(\varphi_0(\tau),\tau)$$

$$\frac{d\xi_0}{d\tau}=f_{0\eta}(\varphi_0,\tau)v_0(\tau)+f_1(\varphi_0,\tau)\xi_0+\langle f_x(x_0,\varphi_0,\psi,\tau,0)u_1(\varphi_0,\psi,\tau)\rangle+$$

$$+\langle f_\varphi(x_0,\varphi_0,\psi,\tau,0)v_2(\varphi_0,\psi,\tau)\rangle+\langle f_\varepsilon(x_0,\varphi_0,\psi,\tau,0)\rangle$$

соответственно. Эти уравнения разрешимы в силу неравенств (1.4) и (2.6). Функция $u_3(\psi,\tau)$ определяется из уравнения, которое аналогично уравнениям, определяющим функции $u_i(\eta,\psi,\tau)$ $(i=1,2)$. (Подробно формализм замен такого типа изложен в [3].)

В результате получим систему

$$
\begin{aligned}
u^{\cdot} &= \mu a(\tau)v + \mu^2[b(\tau)u + e(\tau)v^2] + O(\mu^3) \\
v^{\cdot} &= \mu c(\tau)u + \mu^2 d(\tau)v + O(\mu^3)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где

$$
a(\tau) = f_{0\eta}(\varphi_0, \tau), \quad b(\tau) = f_1(\varphi_0, \tau), \quad c(\tau) = \omega_x(x_0, \tau)
$$

$$
d(\tau) = g_0(\varphi_0, \tau), \quad e(\tau) = \frac{1}{2} f_{0\eta\eta}(\varphi_0, \tau)
$$

В новых обозначениях условие (3.1) принимает вид

$$
m(\tau) = a(\tau)c(\tau) < -\sigma_1 < 0, \qquad \tau \in (-\infty, \infty) \tag{3.4}
$$

а собственные значения матрицы $\mu A_0(\tau)$ определяются формулами

$$
\lambda_{1,2}(\tau, \mu) = \pm i\mu[-m(\tau)]^{1/2}
$$

Приведем систему (3.3) к "стандартной форме", т.е. к форме, где матрица первого приближения нулевая, с помощью замены

$$
\begin{aligned}
u &= A\cos\chi + B\sin\chi + \mu[-m(\tau)]^{1/2} n(\tau)(B\cos\chi - A\sin\chi) \\
v &= \delta(\tau)(B\cos\chi - A\sin\chi)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где

$$
n(\tau) = \frac{1}{2}\left[b(\tau) + d(\tau) - \frac{\delta'(\tau)}{\delta(\tau)}\right], \quad \delta(\tau) = \left[-\frac{c(\tau)}{a(\tau)}\right]^{1/2}
$$

$$
\chi(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^\tau [-m(s)]^{1/2} ds
$$

причем предполагается, что $[-m(\tau)]^{1/2}$ – правильная ППФ. Замена (3.5) преобразует систему (3.3) в систему

$$
\begin{aligned}
A^{\cdot} &= \mu^2 n(\tau)A + \mu^2\Phi_1(A, B, \chi, \tau) + O(\mu^3) \\
B^{\cdot} &= \mu^2 n(\tau)B + \mu^2\Phi_2(A, B, \chi, \tau) + O(\mu^3)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Здесь $\Phi_1(A, B, \chi, \tau)$, $\Phi_2(A, B, \chi, \tau)$ – периодические по χ функции с периодом 2π, которые содержат по A, B члены не ниже квадратичных.

Очевидно, дифференциальный оператор

$$
Lz = dz/d\tau - M(\tau)z \qquad (M(\tau) = n(\tau)E)
$$

где E – единичная матрица, непрерывно обратим в пространстве B, если среднее значение ППФ $n(\tau)$ отлично от нуля и, следовательно, среднее ППФ $\sigma(\tau) = b(\tau) + d(\tau)$ отлично от нуля, причем нулевое решение системы $Lz = 0$ асимптотически устойчиво, если $\langle \sigma(\tau) \rangle < 0$ и неустойчиво, если $\langle \sigma(\tau) \rangle > 0$. В этом случае система

$$
dz/d\tau = M(\tau)z + f(\tau), \qquad f(\tau) \in B
$$

имеет единственное ППР

$$
z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, s) f(s) ds
$$

где

$$|G(\tau,s)| \leqslant M\exp[-\gamma|\tau-s|] \quad (-\infty<\tau,s<\infty), \qquad M,\gamma>0$$

Записав систему (3.6) в векторной форме ($z = (A, B)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$) во времени τ, получим, что задача о ППР системы (3.6) эквивалентна вопросу о разрешимости в пространстве B операторного уравнения

$$z(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau,s)[\Phi(z,s,\chi)+O(\mu)]ds \tag{3.7}$$

Далее, как и в случае теоремы 1, показывается, что при достаточно малых μ оператор, определяемый правой частью уравнения (3.7), удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений на некотором шаре $\|z\| \leqslant a_1$ пространства B, причем $a_1 \to 0$ при $\mu \to 0$. Поэтому уравнение (3.7) имеет единственное решение в этом шаре, а следовательно, система (3.6) имеет при достаточно малых μ единственное ППР, близкое к (0, 0). Вопрос об устойчивости ППР устанавливается с помощью теорем об устойчивости по первому приближению.

Сформулируем полученное утверждение применительно к системе (1.1).

Теорема 2. Пусть ППФ $x_0(\tau)$, $\Omega(\tau)$ и $\varphi_0(\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть выполняется неравенство (3.4), функции $f(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$, $f_x(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$, $g(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$, $f_x(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$ $u_1(\varphi_0, \psi, \tau)$, $f_\varphi(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$ $v_2(\varphi_0, \psi, \tau)$, $f_\varepsilon(x_0, \varphi_0, \psi, \tau, 0)$, $u_{1\eta}(\varphi_0, \psi, \tau)$, $u_{1\tau}(\varphi_0, \psi, \tau)$ – правильные ППФ ψ, $a[-m(\tau)]^{1/2}$ – правильная ППФ τ. Пусть, наконец, среднее значение ППФ $a(\tau) + d(\tau)$ отлично от нуля.

Тогда система (1.1) имеет в ε-окрестности резонансной точки $x_0(\tau)$ при достаточно малых ε единственное почти периодическое по t решение, которое асимптотически устойчиво, если $\langle \sigma(\tau) \rangle < 0$, и неустойчиво, если $\langle \sigma(\tau) \rangle > 0$.

4. Перейдем к рассмотрению примеров. Уравнение

$$x^{\cdot\cdot}+\Omega^2\sin x=\varepsilon[\gamma x^{\cdot}+a_1\sin\omega t+a_2\sin(\omega t+\varepsilon\Delta t)] \tag{4.1}$$

описывает вынужденные колебания и вращения математического маятника под действием суммы двух малых периодических сил с близкими частотами. Здесь ε – малый параметр, Ω^2, γ, a_1, a_2, ω, Δ – вещественные положительные постоянные. Периодическую по t с периодом $2\pi/\omega$ и по $\tau = \varepsilon t$ с периодом $2\pi/\Delta$ функцию

$$f(t,\tau)=a_1\sin\omega t+a_2\sin(\omega t+\varepsilon\Delta t)$$

можно записать в виде

$$f(t,\tau)=E(\tau)\sin(\omega t+\delta(\tau)) \tag{4.2}$$

$$E(\tau)=(a_1^2+2a_1a_2\cos\Delta\tau+a_2^2)^{1/2},\ \operatorname{tg}\delta(\tau)=\frac{a_2\sin\Delta\tau}{a_1+a_2\cos\Delta\tau}$$

Функция $E(\tau)$ строго положительна, если $a_1 \neq a_2$, что и будет предполагаться.

Пусть возмущенный маятник совершает колебательное движение. Введем переменные действие – угол (I, θ) в невозмущенной системе и перейдем от уравнения (4.1) к системе по формулам

$$\begin{aligned} x&=2\arcsin k\,\mathrm{sn}[2\pi^{-1}K(k)\theta]=X(I,\theta)\\ x^{\cdot}&=2k\Omega\,\mathrm{cn}[2\pi^{-1}K(k)\theta]=Y(I,\theta)\end{aligned} \tag{4.3}$$

содержащим эллиптические функции Якоби и полный эллиптический интеграл первого рода.

Функция $k = k(I)$ определяется из уравнения

$$I=8\pi^{-1}\Omega[E(k)-(1-k^2)K(k)],$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Отметим, что при фиксированном k и $\theta = \pi\Omega t/(2K(k))$ первая из формул (4.3) представляет собой решение уравнения невозмущенного маятника в колебательном случае.

В результате замены (4.3) получим систему

$$
\begin{aligned}
I' &= \varepsilon[f(t,\tau) - \gamma Y(I,\theta)]X_\theta(I,\theta) \\
\theta' &= \frac{\pi\Omega}{2K(k)} - \varepsilon[f(t,\tau) - \gamma Y(I,\theta)]\, X_I(I,\theta)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Будем говорить, что в системе (4.4) имеет место резонанс, если

$$
\frac{\pi\Omega}{2K(k(I))} = \frac{r}{s}\omega \tag{4.5}
$$

где r, s – взаимно простые целые числа. Решение уравнения (4.5), если оно существует, обозначим через I_{rs}. После замены $\theta = \varphi + (r/s)\omega t$ система (4.4) принимает вид

$$
\begin{aligned}
I' &= \varepsilon\left[f(t,\tau) - \gamma Y\left(I, \varphi + \frac{r}{s}\omega t\right)\right] X_\theta\left(I, \varphi + \frac{r}{s}\omega t\right) \\
\varphi' &= \frac{\pi\Omega}{2K(k)} - \frac{r}{s}\omega - \left[f(t,\tau) - \gamma Y\left(I, \varphi + \frac{r}{s}\omega t\right)\right] X_I\left(I, \varphi + \frac{r}{s}\omega t\right)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Следовательно, I_{rs} – точка резонанса в указанном в начале статьи смысле, но I_{rs} не зависит от τ.

Для исследования резонансных режимов воспользуемся теоремами 1 и 2. Вычисление средних значений по t слагаемых в правой части системы (4.6) основывается на разложении эллиптических функций в ряды Фурье. Среднее значение по t первого слагаемого в правой части первого уравнения системы (4.6) отлично от нуля только тогда, когда $r = 1$, $s = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \ldots$). При $r = 1$, $s = 2n + 1$ это среднее значение равно

$$
f_0(\varphi,\tau) = \frac{1}{2} E(\tau) a_n(q) \sin[\delta(\tau) - (2n+1)\varphi]
$$

$$
a_n(q) = \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}, \quad q = \exp\left(-\frac{\pi K(k')}{K(k)}\right), \quad k'^2 = 1 - k^2
$$

Среднее значение второго слагаемого в правой части первого уравнения системы (4.6) равно γI. Поэтому функция $\varphi_0(\tau)$ определяется из уравнения

$$
\sin[\delta(\tau) - (2n+1)\varphi] = \frac{2\gamma I_{rs}}{E(\tau)a_n(q)} = A(\tau) \tag{4.7}
$$

Так как $a_n(q) \to 0$ при $n \to \infty$, то уравнение (4.7) может иметь решение только для конечного числа значений n. Если же уравнение (4.7) разрешимо, то

$$
\varphi_{0l}(\tau) = \frac{\delta(\tau)}{2n+1} - \frac{(-1)^l \arcsin A(\tau)}{2n+1} - \frac{l\pi}{2n+1}, \quad l = 0, 1, \ldots, 4n+1
$$

Вычисляя производную функцию $f_0(\varphi, \tau)$ в точке $\varphi_0(\tau)$, получим

$$
f_{0\varphi}(\varphi_0, \tau) = a(\tau) = -(-1)^l \frac{1}{2} E(\tau)(2n+1)a_n(q)[1 - A^2(\tau)]^{1/2}
$$

и, следовательно, функция $a(\tau)$ положительна при l нечетном и отрицательна при l четном. Далее, простой подсчет показывает, что $c(\tau) < 0$ при всех τ и $b(\tau) + d(\tau) = -\gamma$.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат. Если резонансная точка $I_{1,\,2n+1}$ соответствует решению уравнения (4.5), то при достаточно малых ε уравнение (4.1) имеет $2n + 1$ неустойчивых резонансных почти периодических по t решений в ε-окрестности резонансной точки и $2n + 1$ асимптотически устойчивых резонансных почти периодических по t решений в ε-окрестности резонансной точки. При $\varepsilon = 0$ эти решения превращаются в периодические решения невозмущенного уравнения, определяемые формулами

$$I = I_0, \quad \theta = \frac{\omega}{2n+1}t + \frac{l\pi}{2n+1} \qquad (l = 0,\ldots,4n+1)$$

Заметим, что результаты не изменятся, если предположить, что $\gamma = \gamma(\tau)$ – ППФ τ с положительным средним значением.

Аналогичные результаты получаются и в случае вращательных движений невозмущенного маятника, причем точки резонанса определяются из уравнения

$$\frac{\pi\Omega}{kK(k)} = \frac{1}{n}\omega$$

Таким же образом исследуется и более общее маятниковое уравнение

$$x'' + \Omega^2(\tau)\sin x = \varepsilon[\gamma(\tau)x' + E(\tau)\sin(\nu + \delta(\tau))] \tag{4.8}$$

Здесь $\Omega(\tau)$ – правильная ППФ, удовлетворяющая условию (1.2), $E(\tau)$ и $\delta(\tau)$ определяются формулами (4.2), $d\nu/dt = \omega(\tau)$, $\omega(\tau)$ – правильная ППФ, которая отделена от нуля, $\gamma(\tau)$ – ППФ с положительным средним значением.

Рассматриваются решения уравнения

$$x'' + \Omega^2(\tau)\sin x = 0$$

внутри некоторой подобласти области колебательных движений при всех τ, причем граница этой подобласти не зависит от τ. От уравнения (4.8) перейдем к системе с помощью замены (4.3). Резонансные точки $I_{rs}(\tau)$ определяются из уравнения

$$\frac{\pi\Omega(\tau)}{2K(k(I_{rs}(\tau))} = \frac{r}{s}\omega(\tau)$$

где r, s – взаимно простые целые числа. Сделав замену $\theta = \varphi + (r/s)\nu$ в соответствующей системе и вычислив средние значения правых частей по ν, получим, что функция $f_0(\varphi, \tau)$ может быть отлична от нуля только при $r = 1$, $s = 2n + 1$. Уравнение для определения $\varphi_0(\tau)$ принимает вид

$$\sin(\delta(\tau) - (2n+1)\varphi) = \frac{2(dI_{rs}(\tau)/d\tau) + 2\gamma(\tau)I_{rs}(\tau)}{E(\tau)a_n(q)}$$

Вычисление коэффициентов $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ и $d(\tau)$ дает те же результаты, что и в предыдущем случае. Поэтому для уравнения (4.8) имеют место утверждения, аналогичные полученным для уравнения (4.1).

Приведенная выше схема применима и к исследованию резонансных режимов маятника, точка подвеса которого колеблется вдоль вертикальной или горизонтальной оси по закону

$$\xi = \varepsilon E(\tau)\sin(\upsilon + \delta(\tau)), \quad d\upsilon/dt = \omega(\tau)$$

где $E(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\omega(\tau)$ – периодические или почти периодические функции.

Работа частично поддержана фондом "Культурная инициатива" и программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики" (3.3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
2. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
3. *Morrison J.A.* Resonance Behavior of a Perturbed system Depending on a slow-Time Parameter // J. Math Analysis Appl. 1968. V. 21. № 1. P. 79–98.
4. *Chang K.W.* Almost Periodic Solutions of Singularly Perturbed systems of Differential Equations // J. Different. Equat. 1968. V. 4. № 2. P. 300–307.

Ярославль

Поступила в редакцию
12.V.1994