УДК 531.36

© 1996 г. А.С. Андреев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Определяются достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия голономной механической системы под действием сил, зависящих от времени. Решаются задачи о стабилизации расчетного движения гироскопической системы на подвижном основании и об условиях устойчивости положения равновесия механической системы с переменными массами. Рассмотрено несколько примеров.

1. Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q \in R^n$. Кинетическая энергия системы $2T = \dot{q}'A(q)\dot{q}$, где вектор $\dot{q} = dq/dt$ обозначен как вектор-столбец, $A(q)$ – $(n \times n)$-матрица, положительно определенная для всех $q \in R^n$, так что имеет место матричное неравенство $A(q) \geqslant A = a_0 E$, $a_0 = \text{const} > 0$, E – единичная матрица. В дальнейшем штрих означает транспонирование, $\| q \|$ – норма в R^n, $\| q \|^2 = q'q = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2$.

Предположим, что на систему действуют силы квазипотенциальные Q_1, гироскопические Q_2, диссипативно-ускоряющие Q_3:

$$Q_1 = -g(t,q)\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}; \quad Q_2 = G(t,q,\dot{q})\dot{q}, \quad G' = -G; \quad Q_3 = -F(t,q,\dot{q})\dot{q}, \quad F' = F$$

где G и F – $(n \times n)$-матрицы; $g, \Pi \in C^1$ – скалярные неотрицательные функции, $\partial\Pi/\partial q = (\partial\Pi/\partial q_1, \ldots, \partial\Pi/\partial q_n)'$.

Движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -g\frac{\partial \Pi}{\partial q} + G\dot{q} - F\dot{q} \tag{1.1}$$

Пусть $\partial\Pi/\partial q = 0$ при $q = 0$ и значит система имеет нулевое положение равновесия $\dot{q} = q = 0$. Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости $\dot{q} = q = 0$ на основе общих теорем асимптотической устойчивости и неустойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений из [1].

Разрешив уравнения (1.1) относительно $\ddot{q}$, их можно представить в виде

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}; \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = \{\dot{q}'B\dot{q}\} - gA^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial q} + A^{-1}G\dot{q} - A^{-1}F\dot{q} \tag{1.2}$$

где $\{\dot{q}'B\dot{q}\}$ – набор n квадратичных относительно $\dot{q}$ форм.

Допустим, что все функции, входящие в правые части уравнений (1.2), непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по $\dot{q}$ и q при каждом $\mu > 0$ в области $\{t \geqslant 0, \ \|\dot{q}\| \leqslant \mu < +\infty, \| q \| \leqslant \mu\}$. Тогда уравнения (1.2) предкомпактны и регулярны

[1, 2], предельные к ним уравнения имеют аналогичный вид [1]:

$$\frac{dq}{dt}=\dot q,\quad \frac{d\dot q}{dt}=\{\dot q'B\dot q\}-g_*A^{-1}\frac{\partial\Pi}{\partial q}+A^{-1}G_*\dot q-A^{-1}F_*\dot q \tag{1.3}$$

где g_*, G_*, F_* являются предельными к соответствующим значениям из (1.2), в частности [2],

$$g_*(t,q)=\frac{d}{dt}\lim_{t_k\to+\infty}\int_0^t g(t_k+\tau,q)d\tau \tag{1.4}$$

Допустим, что для всех $t\in R^+$, достаточно малых $\|\dot q\|$ и $\|q\|$ выполняются соотношения

$$0<g_0\leqslant g(t,q)\leqslant g_1,\quad \left\|\frac{\partial g}{\partial q}(t,q)\right\|\leqslant l=\text{const} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,q)A(q)+2g(t,q)F(t,q,\dot q)\geqslant a_0E,\quad (a_0=\text{const}>0) \tag{1.6}$$

Тогда для производной функции $V=(\dot q'A\dot q)/(2g(t,q))+\Pi(q)-\Pi(0)$ в силу уравнений (1.1) при достаточно малых $\|q\|$ и $\|\dot q\|$ имеем оценку

$$\dot V=-\left(\frac{\partial g}{\partial t}+\dot q'\frac{\partial g}{\partial q}\right)(\dot q'A\dot q)/2g^2-(\dot q'F\dot q)/g\leqslant -b_0\|\dot q\|^2\leqslant 0$$

$(b_0=\text{const}>0)$

Определяемое этой оценкой [1] множество $\{\omega(\dot q)=b_0\|\dot q\|^2=0\}\equiv\{\dot q=0\}$ содержит лишь те решения предельных уравнений (1.3) (как это следует непосредственно из их структуры), для которых имеют место соотношения

$$\dot q(t)\equiv 0,\quad q(t)=q_0=\text{const}:\quad g_*(t,q_0)\frac{\partial\Pi}{\partial q}(q_0)=0$$

Но из первого условия (1.5) и определения (1.4) следует, что при каждом $\mu>0$ для почти всех $t\in[0,\mu]$ функция $g_*(t,g)\geqslant g_0>0$. Поэтому указанными решениями будут являться лишь решения, для которых

$$\dot q(t)=0,\quad q(t)=q_0=\text{const};\quad \frac{\partial\Pi}{\partial q}(q_0)=0$$

или положения равновесия исходной системы (1.1).

На основании теорем из [1] имеем следующие достаточные условия устойчивости положения равновесия системы (1.1).

Теорема 1.1. Предположим, что

1) функция $\Pi(q)$ имеет при $q=0$ минимум;

2) положение равновесия системы (1.1) $\dot q=q=0$ является изолированным, $\|\partial\Pi/\partial q\|>0$ для $q\in\{0<\|q\|\leqslant\delta\}$;

3) функция $g(t,q)$ и диссипативно-ускоряющие силы таковы, что выполняются соотношения (1.5) и (1.6).

Тогда положение равновесия (1.1) $\dot q=q=0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 1.2. Если вместо условий 1 и 2 теоремы 1.1 выполняются условия

1') $\Pi(q)$ не имеет минимума при $q=0$;

2') в области $\{q: 0<\|q\|\leqslant\delta,\ \Pi(q)<\Pi(0)\}$ нет положений равновесия системы (1.1), то положение равновесия (1.1) $\dot q=q=0$ неустойчиво.

Замечание. Очевидно, что для случая равномерной непрерывности [1] выполнение условий (1.5) и (1.6) теорем 1.1 и 1.2 можно предполагать при $\dot{q} = q = 0$.

Результаты, полученные ранее [3], позволяют исследовать устойчивость равновесия $\dot{q} = q = 0$ по обобщенным скоростям и части обобщенных координат ($q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_m$) ($m \leqslant n$) [4]. Для этого обозначим $q^1 = (q_1, q_2, \ldots, q_m)'$, $q^2 = (q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n)'$, $\| q^1 \|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_m^2$, $\| q^2 \|^2 = q_{m+1}^2 + q_{m+2}^2 + \ldots + q_n^2$, $h : R^+ \to R^+$ – функция типа Хана [4].

Допустим, что правые части (1.2) непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по $\dot{q}$ и q^1 при каждом $\mu > 0$ в области $\{t \geqslant 0, \|\dot{q}\| \leqslant \mu, \| q^1 \| \leqslant \mu, 0 \leqslant \leqslant \| q^2 \| < +\infty\}$. Тогда уравнения (1.2) оказываются предкомпактными по $\dot{q}$ и q^1 относительно произвольной непрерывной функции q^2: $R^+ \to R^{n-m}$ [3].

Повторяя предыдущие рассуждения, на основании теоремы 5 из [3] можно вывести следующий результат.

Теорема 1.3. Предположим, что

1) функция $\Pi(q) - \Pi(0)$ определенно-положительна по q^1, т.е. $\Pi(q) - \Pi(0) \geqslant h(\| q^1 \|)$, т.е. для всех $q \in \Gamma_0 = \{\| q^1 \| \leqslant \delta_0, \delta_0 > 0, 0 \leqslant \| q^2 \| < +\infty\}$;

2) в области $\Gamma_0 \cap \{q\colon \Pi(q) - \Pi(0) > 0\}$ система (1.1) не имеет положений равновесия, для всех $q \in \Gamma_0 \cap \{q\colon \Pi(q) - \Pi(0) = \varepsilon > 0\}$ выполняется неравенство $\| \partial\Pi/\partial q \| \geqslant \delta = \delta(\varepsilon) > 0$;

3) функция $g(t, q)$ и диссипативно-ускоряющие силы таковы, что для всех $t \in R^+$, $(\dot{q}, q) \in \{\dot{q}\colon \| \dot{q} \| \leqslant \delta_0, \delta_0 > 0\} \times \Gamma_0$ выполняются соотношения (1.5) и (1.6).

Тогда положение равновесия (1.1) $\dot{q} = q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво по $(\dot{q}, q^1)$.

Замечания. 1°. При $g = g(t)$, $(t) \geqslant 0$ условия (1.5) и (1.6) выполняются, если $g(t) \leqslant g_1$ и $Q_3'\dot{q} \leqslant -b_0 \|\dot{q}\|^2$, т.е. Q_3 – силы полной диссипации. Результат об асимптотической устойчивости $\dot{q} = q = 0$ по q при этих условиях был выведен ранее в [5]. Для случая $g = g(t)$ условия (1.5) и (1.6) принимают вид [6]

$$0 < g_0 \leqslant g(t) \leqslant g_1, \quad \dot{g}(t)A(q) + 2g(t)F(t,q,\dot{q}) \geqslant a_0 E$$

Можно убедиться, что если это условие выполнено для всех $t \in R^+$, $(\dot{q}, q) \in R^2$, а также если $\partial\Pi/\partial q \neq 0$ для всех $q \neq 0$ и $\Pi(q) \to +\infty$ при $\| q \| \to +\infty$, то положение равновесия системы $\dot{q} = q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво в целом.

2°. Условие (1.6) может выполняться на промежутке времени $[\alpha, \beta]$, при котором $\dfrac{\partial g}{\partial t} > 0$, если даже на этом промежутке силы Q_3 имеют ускоряющий характер $Q_3'\dot{q} > 0$. Эта особенность может быть использована при решении задач стабилизации положения равновесия управляемой механической системы для "подкачки энергии" при $t \in [\alpha, \beta]$.

Пример 1.1. Рассмотрим математический маятник с нитью переменной длины $l(t)$, совершающий угловые колебания в однородном поле тяжести с постоянной ускорения g_0 под действием момента вязкого трения. Обозначая угол отклонения маятника от вертикали через φ, имеем следующие выражения для кинетической энергии и обобщенной силы:

$$2T = m(l^2(t)\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2(t)), \qquad Q = -mg_0 l(t)\sin\varphi - k(t,\varphi,\dot{\varphi})l^2(t)\dot{\varphi}$$

где m – масса точки, $k(t, \varphi, \dot{\varphi})$ – коэффициент вязкости.

Уравнение колебаний маятника несложно представить в виде уравнения (1.1) системы с одной степенью свободы. Отсюда на основании теоремы 1.1 можно найти следующие достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия маятника $\dot{\varphi} = \varphi = 0$ (условие нераскачки маятника):

$$0 < l_0 \leqslant l(t) \leqslant l_1, \quad 3\dot{l}(t) + 2k(t,0,0)m^{-1}l(t) \geqslant l_0 > 0$$

Пример 1.2. Рассмотрим симметричное тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, находящееся в однородном поле тяжести переменной интенсивности $g = g(t)$. Центр тяжести тела лежит на оси симметрии – оси x, масса тела m, главные моменты инерции A и $B = C$, координата центра тяжести $x_0 > 0$. Положение тела относительно инерциальной системы координат с осью z, направленной вертикально вверх, будем определять углами Эйлера θ, φ, ψ обычным образом [7]. Координата ψ является циклической, игнорируя которую, находим функцию Рауса [7] $R = R_2 + R_1 - W$ с приведенной потенциальной энергией

$$W = mg(t)x_0(1-\Pi(\theta,\varphi)) + c^2G(\theta,\varphi)/2$$

$$\Pi(\varphi,\theta) = 1 - \sin\theta\sin\varphi, \quad G(\theta,\varphi) = ((A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + B\cos^2\theta)^{-1}$$

где c – циклическая постоянная.

Находим, что $\partial W/\partial\theta = \partial W/\partial\varphi = 0$ при $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, так что имеются стационарные движения $\dot\psi$ = const, $\dot\theta = 0$, $\dot\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, при которых ось x направлена вертикально вверх.

Можно вывести представления

$$\partial W/\partial\theta = g(t,\theta,\varphi)\partial\Pi/\partial\theta, \quad \partial W/\partial\varphi = g(t,\theta,\varphi)\partial\Pi/\partial\varphi$$

$$g(t,\theta,\varphi) = c^2(A-B)\sin\theta\sin\varphi G^2(\theta,\varphi) - mg(t)x_0$$

Это позволяет на основе теоремы 1.2 определить моменты диссипативных сил вида $M_\theta = -k_1(t)\dot\theta$, $M_\varphi = -k_2(t)\dot\varphi$, стабилизирующих указанные вертикальные стационарные вращения тела. Находим для функции R_2 при $\theta = \varphi = \pi/2$ выражение $2R_2 = B(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2)$. Тогда условия (1.5) и (1.6) в данной задаче запишутся в виде

$$\begin{gathered} 0 < a_0 \leqslant c^2(A-B) - mg(t)A^2x_0 \leqslant a_1 \\ 2c^2(A-B)k_i(t) - A^2Bm\dot g(t)x_0 \geqslant a_0 \quad (i=1,2) \end{gathered} \tag{1.7}$$

На основании теоремы 1.2 заключаем, что каждое стационарное движение $\dot\theta = \dot\varphi = 0$, $\theta = \varphi = \pi/2$, отвечающее значению циклической постоянной c, удовлетворяющему условиям (1.7), асимптотически устойчиво по $\dot\theta$, $\dot\varphi$, θ и φ.

Теоремы 1.1 и 1.3 об устойчивости положения равновесия можно распространить и на случай квазипотенциальных сил вида

$$Q_1(t,q) = -D(t,q)A^{-1}(q)\partial\Pi(q)/\partial q \tag{1.8}$$

где $D(t, q)$ – симметричная $(n \times n)$-матрица, такая, что для всех $t \in R^+$ и достаточно малых $(q, \dot q) \in \{\|q\| \leqslant \delta, \|\dot q\| \leqslant \delta, \delta > 0\}$ имеют место соотношения

$$d_0E \leqslant D(t,q) \leqslant d_1E \quad (0 < d_0 \leqslant d_1), \quad \left\| \frac{\partial d_{ij}(t,q)}{\partial q} \right\| \leqslant d_2 = \text{const}$$

$$AD^{-1}\left(F - G - \frac{\partial D}{\partial t}D^{-1}A\right) + \left(F + G - AD^{-1}\frac{\partial D}{\partial t}\right)D^{-1}A \geqslant a_0E \tag{1.9}$$

$$(a_0 = \text{const} > 0)$$

При этих условиях в силу уравнений движения для производной функции $2V = \dot qAD^{-1}A\dot q + 2\Pi(q)$ при достаточно малых $\|q\|$ и $\|\dot q\|$ можно найти оценку

$$\dot V(t,q,\dot q) \leqslant -b_0\|\dot q\|^2 \leqslant 0 \quad (b_0 = \text{const})$$

Отсюда можно показать, что теоремы 1.1 и 1.3 сохраняют свою формулировку и для случая сил Q_1 вида (1.8) с заменой условий (1.5) и (1.6) на условия (1.9).

2. Рассмотрим задачу об определении управляющего воздействия, обеспечивающего устойчивость расчетного движения гироскопической системы на подвижном основании, в принятой ранее постановке [8].

Гироскопическая система определяется как система, стесненная голономными, стационарными в движении относительно основания связями, содержащая r симметричных гироскопов. Ее положение относительно основания задается n обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_n$ и r углами собственных вращений гироскопов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r$. Основание гироскопической системы совершает заданное движение относительно инерциального пространства. Дополнительные голономные, нестационарные связи обеспечивают постоянные скорости собственных вращений гироскопов $\dot{\varphi} = \varphi_0 = \text{const}$.

Уравнения движения системы, преобразованные из формы Лагранжа, имеют вид [8]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q + D\dot{q} + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.1}$$

где $Q = Q(t, q, \dot{q})$ – обобщенные силы, а другие входящие в уравнения величины определяются из выражения кинетической энергии системы в абсолютном движении,

$$T_a = T_2 + T_1 + T_0, \quad 2T_2 = \dot{q}'A(q)\,\dot{q}$$

$$T_1 = B'(t, q, \dot{\varphi}_0)\,\dot{q}, \quad T_0 = T_0(t, q, \dot{\varphi}_0), \quad D = \frac{\partial B}{\partial q'} - \frac{\partial B'}{\partial q} = -D'$$

A, B – соответствующие $(n \times n)$-матрица и $(n \times 1)$-матрица-столбец. Обобщенные силы определим из следующих условий.

1°. Уравнения движения (2.1) допускают расчетное движение

$$\dot{q} = q = 0 \tag{2.2}$$

Для этого необходимо положить, что для всех $t \geqslant 0$

$$Q(t, 0, 0) = \left[\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q}\right]_{q=0} \tag{2.3}$$

2°. Равнодействующая обобщенных сил $Q(t, q, \dot{q})$ есть совокупность сил собственно гироскопической системы $Q_c = Q_c(t, q, \dot{q})$ и специальных сил коррекции $Q_k = Q_k(t)$, обеспечивающих движение (2.2). Таким образом,

$$Q(t, q, \dot{q}) = Q_c(t, q, \dot{q}) + Q_k(t),$$

$$Q_k(t) = \left[\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q}\right]_{q=0} - Q_c(t, 0, 0) \tag{2.4}$$

3°. Силы собственно гироскопической системы Q_c представляют собой совокупность потенциальных сил с силовой функцией $U = U(t, q)$ и диссипативных сил $Q_d(t, q, \dot{q})$, линейных относительно $\dot{q}$:

$$Q_c(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial U(t, q)}{\partial q} + Q_d(t, q, \dot{q})$$

$$Q_d'(t, q, \dot{q})\,\dot{q} \leqslant -\dot{q}'F(t, q)\,\dot{q} \leqslant 0 \tag{2.5}$$

4°. Действие потенциальных сил собственно гироскопической системы, сил коррекции и инерциальных сил представимы в виде

$$\frac{\partial U}{\partial q} + Q_k + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \Pi_0}{\partial q}, \quad \frac{\partial \Pi_0}{\partial q} = 0 \quad \text{при} \quad q = 0 \tag{2.6}$$

где, соответственно, $\Pi_0 = \Pi_0(q)$ – некоторая скалярная функция, а $g = g(t, q)$ – скалярный коэффициент, удовлетворяющий соотношениям

$$0 < g_0 \leqslant g(t,q) \leqslant g_1, \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial q} \right\| \leqslant g_2 \tag{2.7}$$

Предположения 1°–3° не отличаются от соответствующих предположений в работе [8]. Предположение 4° является более специальным по сравнению с соответствующим из [8]. Предполагая выполненными условия (2.3)–(2.7) и требуя выполнение условий теоремы (1.1), можно определить условия стабилизации гироскопических систем на подвижном основании, отличающиеся от указанных ранее [8] использованием функции Ляпунова не со знакоопределенной, а со знакопостоянной производной.

Рассмотрим это различие на следующем примере из [8].

Пример 2.1. Гироскоп Фуко с двумя степенями свободы второго рода. Симметричный ротор гироскопа помещен в кожух (поплавок) и имеет относительно него постоянную собственную угловую скорость $\dot\varphi_{I0}$, I – осевой момент ротора. С основанием прибора связан правый трехгранник $O\xi\eta\zeta$, имеющий абсолютную угловую скорость $u = (u_\xi, u_\eta, u_\zeta)$, скорость начала координат равна v_0. Кожух гироскопа установлен в подшипниках, ось которых совпадает с ζ, причем ось собственного вращения гироскопа z перпендикулярна оси вращения кожуха ζ (находится в плоскости $\xi\eta$ и проходит через точку O). Допускается, что центр тяжести системы совпадает с началом координат O, $Oxz\zeta$ является трехгранником главных осей инерции кожуха; A и B – моменты инерции системы относительно ζ и z; момент инерции кожуха относительно третьей оси x такой, что моменты инерции системы относительно x и z равны. Через α обозначается угол между осью η и осью гироскопа, при этом положительное направление угловой скорости кожуха $\dot\alpha$ совпадает с положительным направлением ζ. Относительно оси вращения кожуха ζ действуют: момент сил вязкого сопротивления $k(\dot\alpha + \omega_\zeta)$ и момент коррекции $M_\zeta^k(t)$.

Полагается, что гироскоп Фуко установлен на объекте, находящемся в данный момент на широте φ и движущемся по поверхности Земли курсом λ со скоростью v относительно Земли, так что [8]

$$u_\xi = 0, \quad u_\eta = \Omega + \frac{v\cos\lambda}{R\cos\varphi}, \quad u_\zeta = 0, \quad \omega_\zeta = \frac{v}{R}\cos\lambda$$

где R – радиус, Ω – угловая скорость Земли. Допускается, что на основе информации о скорости v и курса λ на кожух гироскопа накладывается момент коррекции $M_\xi^k(t) = kvR^{-1}\cos\lambda$.

Тогда уравнения движения гироскопа допускают частное решение, в котором ось гироскопа z постоянно указывает направление оси мира [8]. Можно найти на основе теоремы 1.1, что это положение будет равномерно асимптотически устойчивым при условиях:

$$I\dot\varphi_{10}\Omega + \frac{I\dot\varphi_{10}v\sin\lambda}{R\cos\varphi} \geqslant k_0, \quad 2k + \frac{(v\sin\lambda/\cos\varphi)^\cdot\cos\varphi}{\Omega R\cos\varphi + v\sin\lambda}A \geqslant k_0 > 0 \tag{2.8}$$

Отметим, что если первое неравенство накладывает ограничение на величину скорости и направление движения объекта, то второе накладывает ограничение на изменение скорости и курса объекта. Условия (2.8) соответствуют реальным параметрам объектов типа корабля и самолета.

При сравнении условий (2.8) с соответствующими из [8] имеем совпадение первого из неравенств (2.8) с соответствующим условием из [8]. Вместо второго неравенства (2.8) в [8] требуется, чтобы выполнялось иное соотношение:

$$v_{\max} < \frac{k^2 R\cos\varphi}{AI\dot\varphi_{10}} \max\left(\sqrt{\frac{AI\dot\varphi_{10}\Omega}{k^2} + I} - 1\right) \tag{2.9}$$

Второе неравенство (2.8) предпочтительнее, так как из (2.9) должно следовать, что с увеличением кинетического момента ротора допустимая скорость объекта должна уменьшаться.

3. Движение голономной механической системы с переменными массами $m_\lambda = m_\lambda(t)$ ($\lambda = 1, 2, ..., N$), не зависящими от времени связями и n обобщенными координатами $q = (q_1, q_2, ..., q_n)'$ под действием квазипотенциальных, гироскопических и диссипативных сил можно описать уравнениями [9]

$$\frac{d^0}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -g\frac{\partial \Pi}{\partial q} + G\dot{q} - F\dot{q} + \Psi \tag{3.1}$$

$$2T = \dot{q}'A(m(t), q)\dot{q}, \quad A' = A, \quad g = g(t, m(t), q)$$

$$\Pi = \Pi(m(t), q), \quad G = G(t, q, \dot{q}), \quad G' = -G$$

$$F = F(t, q, \dot{q}), \quad F' = F, \quad \Psi = \Psi(t, q, \dot{q})$$

где $\Psi(t, q, \dot{q})$ – обобщенные реактивные силы, обусловленные движением отделяющихся и присоединяющихся частиц внутри точек механической системы, отделением или присоединением этих частиц к точкам; d^0/dt – производная при закрепленных массах.

Допустим, что массы точек системы не исчезают и ограничены, $0 < m^0 \leqslant m_\lambda(t) \leqslant m^1$ ($\lambda = 1, 2, ..., N$), вследствие чего в общем случае имеем $a_0E \leqslant A(m(t), q) \leqslant a_1E$ ($0 < a_0 \leqslant a_1$); для всех значений m_λ в этих пределах $\partial\Pi(m, q)/\partial q = 0$ при $q = 0$; $\Psi = 0$ при $\dot{q} = q = 0$. Тогда система (3.1) имеет положение равновесия $\dot{q} = q = 0$.

При условии $g(t, m, q) > 0$, $\Pi(m, q) \geqslant 0$ для исследования устойчивости $\dot{q} = q = 0$ может быть использована функция $V = T/g + \Pi$, имеющая производную в силу уравнений движения (3.1):

$$\dot{V} = \frac{1}{g}\left(\dot{m}'\frac{\partial T}{\partial m} - \dot{q}'F\dot{q} + \dot{q}'\Psi + \dot{m}'\frac{\partial \Pi}{\partial m}\right) - \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \dot{m}'\frac{\partial g}{\partial m} + \dot{q}'\frac{\partial g}{\partial q}\right)T$$

Требуя неположительность этой производной и выполнения соответствующих условий теорем из [1, 3], можно аналогично предыдущему получить различные достаточные условия полной и частичной асимптотической устойчивости положения равновесия системы (3.1) $\dot{q} = q = 0$, например, следующую теорему.

Теорема 3.1. Предположим, что для системы (3.1) выполнены условия:

1) функция $\Pi(m, q)$ такова, что $\Pi(m, 0) = 0$, $\Pi(m, q) \geqslant h(\| q \|)$ (или $\Pi(m, q) \geqslant h(\| q^1 \|)$); эта функция не возрастает по m в процессе изменения масс точек системы, $\dot{m}'(\partial\Pi/\partial m) \leqslant 0$;

2) отсутствие положений равновесия при малых $\| q \|$ (или при $\Pi(m, q) > 0$); $\| \partial\Pi(m, q)/\partial q \| > \delta(\varepsilon) > 0$ для $\| q \| = \varepsilon > 0$ (или для всех $q \in \{q\colon \Pi(m, q) \geqslant \varepsilon > 0\}$);

3) реактивные силы не возникают при изменении масс точек системы;

4) для всех $t \in R^+$, малых $\|\dot{q}\|$ и малых $\| q \|$ (или малых $\| q^1 \|$) выполняются соотношения

$$0 < g_0 \leqslant g(t, m, q) \leqslant g_1, \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial q}(t, m, q) \right\| \leqslant l = \text{const}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \dot{m}'\frac{\partial g}{\partial m}\right)A + 2gF - g\frac{\partial A}{\partial t} \geqslant a_0E, \quad a_0 = \text{const} > 0$$

Тогда положение $\dot{q} = q = 0$ системы (3.1) равномерно асимптотически устойчиво (соответственно равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}$ и q^1).

Таким же образом можно исследовать устойчивость движений механических систем с переменными массами, на которые распространим метод Рауса–Ляпунова [10].

Пример 3.1. Рассмотрим движение твердого тела переменной массы $m = m(t)$ с закрепленной точкой O, находящегося в ньютоновском поле сил. Предположим, что истечение и приток частиц таковы, что главные оси инерции тела относительно закрепленной точки x, y, z неподвижны в теле, сумма моментов реактивных сил относительно неподвижной точки равна нулю, центр инерции тела во все время движения находится на оси z тела.

Примем, что ось ζ неизменной в пространстве системы координат $O\xi\eta\zeta$ направлена вдоль радиус-вектора $\overrightarrow{O^*O}$, где O^* – центр притяжения. Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ направляющие косинусы углов оси ζ в системе $Oxyz$, A_i – главные моменты тела относительно осей Ox, Oy, Oz; p, q, r – проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz; $R = |OO^*|$; $g = m/R^2$, z_c – координата центра масс тела по оси Oz.

Предположим, что кроме силы притяжения на тело действуют силы вязкого трения, момент которых относительно точки O есть $M' = (M_X, M_Y, M_Z)$ с оценкой

$$M_X p + M_Y q + M_Z r \leqslant -(\nu_1(t)p^2 + \nu_2(t)q^2 + \nu_3(t)r^2), \quad \nu_i(t) \geqslant 0$$

Считая, что величина R достаточно велика по сравнению с размерами тела, имеем выражение потенциальной энергии тела из соответствующего выражения для постоянной массы [11]

$$\Pi = mqz_c\gamma_3 + 3g(2R)^{-1}((A_1 - A_3)\gamma_1^2 + (A_2 - A_3)\gamma_2^2) - mgz_c$$

В рамках сделанных предположений получаем, что тело имеет положения равновесия

$$p = q = r = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1 \tag{3.2}$$

при которых ось Oz тела направлена вдоль $O\zeta$. При этом функция Π определенно-положительна по γ_1, γ_2 в окрестности положения $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ при условиях:

$$p_1 = 3gR^{-1}(A_1 - A_3) - mgz_c \geqslant \varepsilon > 0$$

$$p_2 = 3gR^{-1}(A_2 - A_3) - mgz_c \geqslant \varepsilon > 0$$

Учитывая выражение кинетической энергии тела $2T = A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2$ на основании теоремы 3.1 имеем следующие условия, при которых положения тела (3.2) будут равномерно асимптотически устойчивы:

$$0 < \varepsilon \leqslant A_i(t) \leqslant A_0, \quad (p_1 / p_2)^{\cdot} \leqslant 0$$

$$(2\nu_i(t) - \dot{A}_i(t))p_2(t) + \dot{p}_2(t)A_i(t) \geqslant \beta_0 > 0 \quad (i = 1,2,3)$$

Если вместо условия $p_2 \geqslant \varepsilon > 0$ имеет место условие $p_2 \leqslant -\varepsilon < 0$, то при выполнении всех остальных условий множество положений равновесия (3.2), определяющее ориентацию оси Oz тела вдоль $O\zeta$, неустойчиво.

4. Исследуем задачу об асимптотической устойчивости положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ голономной механической системы (1.2) в случае потенциальных сил $Q_1 = -\partial\Pi(t, q)/\partial q$, полагая, что $\partial\Pi(t, q)/\partial q = 0$ при $q = 0$.

Пусть $\mu > 0$ – достаточно малое число, определяемое исследуемой областью устойчивости $\Gamma_0 = \{\|\dot{q}\| \leqslant \mu, \|q\| \leqslant \mu\}$. Определим функции:

$$\alpha(t) = \sup\left(\frac{1}{\Pi(t,q)}\frac{\partial\Pi(t,q)}{\partial t} \quad \text{при} \quad \|q\| \leqslant \mu\right), \quad \beta(t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau$$

и допустим, что функция $\beta(t)$ ограничена, $|\beta(t)| \leqslant \beta_0$ для всех $t \in R^+$, а диссипативные силы таковы, что для всех $t \in R^+$, $(\dot{q}, q) \in \Gamma_0$:

$$\alpha(t)A(q) + 2F(t, q, \dot{q}) \geqslant a_0E, \quad a_0 = \text{const} > 0 \tag{4.1}$$

Тогда для производной функции $V = \exp(-\beta(t))(T + \Pi)$ можно найти оценку

$$V = \exp(-\beta(t))(-aT - \dot{q}'F\dot{q}) \leqslant -\gamma_0 \|\dot{q}\|^2 \leqslant 0 \quad (\gamma_0 = \text{const} > 0)$$

Отсюда аналогично теореме 1.1 имеем следующие достаточные условия асимптотической устойчивости под воздействием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, зависящих от времени.

Предположим, что

1) потенциальная энергия такова, что для малых $\| q \|$

$$h_1(\| q \|) \leq \Pi(t,q) \leq h_2(\| q \|), \quad \| \partial\Pi / \partial q \| \geq \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{для } \| q \| = \varepsilon > 0;$$

2) имеет место соотношение (4.1).

Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы равномерно асимптотически устойчиво.

Для случая механической системы с переменными массами этот результат представлен в [12]. Иные условия устойчивости по $(\dot{q}, q)$ и асимптотической устойчивости по $\dot{q}$ выведены в [13, 14].

Автор благодарит В.В. Румянцева за обсуждение результатов.

Работа поддержана программой "Университеты России" по направлению "Фундаментальные проблемы математики и механики", проект № 3.3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
2. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. № 2. P. 216–223.
3. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 539–547.
4. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
5. *Salvadori L.* Famiglie and un parametro di funzioni di Liapunov nello studio della stabilità // Symposia Math. N.Y.: L., 1971. V. 6. P. 309–330.
6. *Andreev A.* Sulla stabilità asimptotica ed instabilità // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1986. V. 75. P. 235–245.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
8. *Матросов В.М.* К задаче устойчивости гироскопических систем на подвижном основании // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1962. Вып. 71. С. 12–35.
9. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.
10. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости движения некоторых неавтономных механических систем под действием диссипативных сил // Докл. АН УзССР. 1978. № 4. С. 22–25.
11. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
12. *Андреев А.С.* О влиянии сил трения на устойчивость положения равновесия неавтономной механической системы // Докл. АН УзССР. 1984. № 8. С. 17–19.
13. *Hatvani L., Terjéki J.* Stability properties of the equilibrium under the influence of unbounded damping // Acta Sci. Math. 1985. T. 48. № 1–4. P. 187–200.
14. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. III // Acta sci. math. 1985. T. 49. № 1–4. P. 157–167.

Ульяновск

Поступила в редакцию
4.VII.1995