

УДК 531.36

© 1996 г. Е.В. Абрарова, А.В. Карапетян

**О ВЕТВЛЕНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ
И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА
В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ**

Рассматривается задача о существовании, ветвлении и устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном гравитационном поле. Тело моделируется совокупностью точечных масс, расположенных на концах трех взаимно перпендикулярных диаметров безмассового шара. Принятая модель позволяет использовать точное выражение гравитационного потенциала (см. также [1–5]). Изучаются нетривиальные стационарные движения тела с трехосным эллипсоидом инерции, при которых либо две, либо все три его главные оси инерции не совпадают с осями орбитальной системы координат. Кроме того, рассматривается ограниченная постановка задачи об относительных равновесиях тела, центр масс которого движется по круговой кеплеровой орбите, их устойчивости и ветвлении.

Ранее [1, 2, 5] были исследованы тривиальные стационарные движения, отвечающие таким ориентациям тела, при которых его главные центральные оси инерции совпадают с осями орбитальной системы координат. Исследован частный случай тела с шаровым эллипсоидом инерции [3] и частный случай плоских движений тела [4].

1. Рассмотрим задачу о поступательно-вращательном движении твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции в центральном гравитационном поле. Будем моделировать тело совокупностью точечных масс $m_s/2$, расположенных на противоположных концах трех взаимно перпендикулярных диаметров d_s ($s = 1, 2, 3$) безмассового шара радиуса a . Без уменьшения общности предположим, что $m_1 > m_2 > m_3$.

Пусть $O\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат с началом в притягивающем центре, а $Sx_1x_2x_3$ – связанная с телом система координат с началом в центре масс тела и осями, направленными вдоль диаметров d_1, d_2, d_3 . Положение центра масс тела по отношению к неподвижной системе координат будем определять сферическими координатами r, θ, ψ , где $r > a$ – длина радиус-вектора OC , θ – угол между вектором OC и плоскостью $O\zeta\xi$, ψ – угол между осью $O\zeta$ и проекцией вектора OC на плоскость $O\zeta\xi$. Ориентацию орбиты центра масс тела и ориентацию тела будем определять проекциями β_s и γ_s единичных векторов β и γ , направленных соответственно вдоль оси $O\eta$ и радиус-вектора OC , на главные центральные оси Sx_s ($s = 1 - 3$) инерции тела. Очевидно, $\sin\theta = (\beta, \gamma) = \sum_s \beta_s \gamma_s$.

Кинетическая T и потенциальная V энергии тела имеют вид

$$2T = [m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + r^2\dot{\theta}^2) + J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2]$$

$$2V = -fM \sum_{s=1}^3 m_s [F_s(a) + F_s(-a)], \quad F_s(a) = (r^2 + a^2 + 2ar\gamma_s)^{-1/2}$$

Здесь $m = m_1 + m_2 + m_3$ – масса тела, $J_i = (m_j + m_k)a^2$ – момент инерции тела относительно оси Cx_i ($i \neq j \neq k$; $i, j, k \in S_3$, $S_3 = \{1, 2, 3\}$), ω_s – проекции абсолютной угловой скорости ω тела на оси Cx_s ($s = 1-3$), f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего центра.

Рассматриваемая система допускает два первых интеграла $H = T + V = \text{const}$ (энергии) и $K = \partial T / \partial \dot{\psi} = k = \text{const}$ (площадей). Полагая $\omega = \dot{\psi}\beta + \Omega$, где Ω – угловая скорость тела в его движении относительно системы координат, равномерно вращающейся вокруг оси $O\eta$, найдем эффективный потенциал тела (напомним, что $\sin\theta = \sum \beta_s \gamma_s$; ср. с [5]):

$$W_k = \min_{r, \psi, \theta, \Omega} H \Big|_{K=k} = V + \frac{k^2}{2J}, \quad J = mr^2 \left(1 - \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_s \beta_s \right)^2 \right) + \sum_{s=1}^3 J_s \beta_s^2$$

Согласно теории Рауса критическим точкам (r_0, γ_0, β_0) эффективного потенциала $W_k(r, \beta, \gamma)$ на многообразии $\{\gamma^2 = 1, \beta^2 = 1\}$ отвечают стационарные движения тела

$$\begin{aligned} r = r_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot{\psi} = \omega_0 \\ (\theta = \theta_0 = \arcsin(\gamma_0 \beta_0), \quad \omega_0 = k / J_0, \quad \Omega = 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

При условиях (1.1) центр масс тела равномерно движется по окружности радиуса $r_0 \cos \theta_0$, расположенной в плоскости, параллельной плоскости $O\zeta\xi$, и находящейся на расстоянии $r_0 |\sin \theta_0|$ от нее; при этом тело сохраняет постоянную ориентацию.

Для определения критических точек функции W_k на многообразии $\{\beta^2 = 1, \gamma^2 = 1\}$ рассмотрим функцию

$$W = (fM)^{-1} W_k + p(\gamma^2 - 1)/2 + q(\beta^2 - 1)/2$$

(p и q – неопределенные множители Лагранжа) и выпишем условия ее стационарности ($\kappa^2 = k^2/(fM)$)

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 m_s ((r + a\gamma_s) F_s^3(a) + (r - a\gamma_s) F_s^3(-a)) - \frac{\kappa^2 mr}{J^2} \left(1 - \left(\sum_{s=1}^3 \gamma_s \beta_s \right)^2 \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_s} = \frac{1}{2} m_s (F_s^3(a) - F_s^3(-a)) r a + p \gamma_s + \frac{\kappa^2 mr^2}{J^2} \beta_s \sum_{\sigma=1}^3 \gamma_\sigma \beta_\sigma = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta_s} = \frac{\kappa^2}{J^2} \left(mr^2 \gamma_s \sum_{\sigma=1}^3 \gamma_\sigma \beta_\sigma - J_s \beta_s \right) + q \beta_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Были исследованы [5] решения системы (1.2)–(1.4) вида

$$\gamma_i = \pm 1, \quad \beta_j = \pm 1, \quad (i \neq j \neq k), \quad \gamma_j = \gamma_k = \beta_i = \beta_k = 0 \quad (i, j, k \in S_3) \quad (1.5)$$

которые отвечают тривиальным ориентациям тела, и найдены достаточные условия устойчивости соответствующих стационарных движений

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0, \quad C_4 = C_{44} C_{55} - C_{45}^2 > 0$$

$$C_1 = \frac{mr}{(mr^2 + J_j)^2} \frac{dK_{ij}}{dr}, \quad C_2 = \left[m_i \frac{(3r^2 + a^2)}{(r^2 - a^2)^3} - \frac{3m_k r}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right] r a^2$$

$$C_3 = \frac{\kappa^2 (J_j - J_k)}{(mr^2 + J_j)^2}, \quad C_{44} = \frac{\kappa^2 (J_j - J_i + mr^2)}{(mr^2 + J_j)^2}, \quad C_{45} = \frac{\kappa^2 mr^2}{(mr^2 + J_j)^2}$$

$$C_{55} = \frac{\kappa^2 m r^2}{(m r^2 + J_j)^2} + m_i r a^2 \frac{(3r^2 + a^2)}{(r^2 - a^2)^3} - \frac{3m_j r^2 a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}$$

$$\kappa^2 = K_{ij}(r), \quad K_{ij} = \frac{(m r^2 + J_j)^2}{m r} \left[m_i \frac{r^2 + a^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{(m_j + m_k) r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right]$$

$$(r_{ij}^+(\kappa^2) > r_{ij}^0 > r_{ij}^-(\kappa^2) > a, \quad r_{ij}^0: K'_{ij}(r_{ij}^0) = 0;$$

$$\kappa^2 > (\kappa_{ij}^0)^2, \quad (\kappa_{ij}^0)^2 = K_{ij}(r_{ij}^0))$$

В частности, было показано [4], что степень неустойчивости тривиальных стационарных движений может изменяться не только в точках $r = r_{ij}^0 (C_1(r_{ij}^0) = 0, i, j \in S_3)$ ветвления решений (1.5) по переменной r , но и в точках $r = r_{ik}^* (C_2(r_{ik}^*) = 0, i > k), r = \bar{r}_{ij}^* (C_4(\bar{r}_{ij}^*) = 0, i > j)$. Это означает, что система (1.2)–(1.4) помимо решений (1.5) допускает решения, отвечающие нетривиальным ориентациям.

2. Согласно теории бифуркации в точках $r_{ik}^* (i > k)$ и $\bar{r}_{ij}^* (i > j)$ имеет место ветвление решений системы (1.2)–(1.4) по переменным γ_i, γ_k и по переменным $\gamma_i, \gamma_j, \beta_i, \beta_j$ соответственно [4]. Таким образом, система (1.2)–(1.4) допускает решения, отвечающие ориентациям вида

$$\gamma_i = \cos \varphi, \quad \gamma_k = \sin \varphi, \quad \gamma_j = \beta_i = \beta_k = 0, \quad \beta_j = \pm 1 \quad (j \neq i > k \neq j) \quad (2.1)$$

$$\gamma_i = \cos \varphi, \quad \gamma_j = -\sin \varphi, \quad \beta_i = \sin(\varphi + \theta), \quad \beta_j = \cos(\varphi + \theta), \quad \gamma_k = \beta_k = 0 \quad (k \neq i > j \neq k) \quad (2.2)$$

При условиях (2.1) плоскость орбиты центра масс тела проходит через притягивающий центр ($\sin \theta = 0$), ось Sx_j направлена по нормали к плоскости орбиты, оси Sx_i и Sx_k повернуты на один и тот же угол φ относительно радиус-вектора центра масс и касательной к орбите. Угол $\varphi = \varphi_{ik}(\kappa^2)$ и радиус орбиты $r = r_{ik}(\kappa^2)$ определяются из системы

$$m_k m_i^{-1} = \Phi_{ik}(r, \varphi), \quad \kappa^2 = \frac{(m r^2 + J_j)^2}{2 m r} \Psi_{ikj}(r, \varphi)$$

$$\Phi_{ik} = \frac{F_i^3(-a) - F_i^3(a)}{F_k^3(-a) - F_k^3(a)} \cdot \frac{\gamma_k}{\gamma_i}, \quad \Psi_{ikj} = m_i G_i + m_k G_k + m_j \frac{2r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$G_s = F_s^3(a)(r + a\gamma_s) + F_s^3(-a)(r - a\gamma_s) \quad (s = i, k); \quad \gamma_i = \cos \varphi, \quad \gamma_k = \sin \varphi$$

которая получается из системы (1.2)–(1.4) при подстановке в нее соотношений (2.1).

Способом, предложенным в [4], можно показать, что

$$\varphi = \pi n \pm \varphi_{ik}(\kappa^2), \quad (n = 0, 1), \quad r = r_{ik}(\kappa^2), \quad a < r_{ik}(\kappa^2) < r_{ik}^*$$

$$0 < \varphi_{ik}(\kappa^2) < \varphi_{ik}^* < \pi / 4$$

Здесь φ_{ik}^* – единственный (для $0 < \varphi < \pi/2$) корень уравнения $m_k m_i^{-1} = \Phi_{ik}(a, \varphi)$, а r_{ik}^* – единственный (для $r > a$) корень уравнения $C_2(r) = 0$.

При условиях (2.2) расстояние от плоскости орбиты центра масс тела до притягивающего центра равно $r |\sin \theta| \neq 0$, радиус орбиты равен $r \cos \theta$, ось Sx_k направлена по касательной к орбите, ось Sx_i составляет угол φ с радиус-вектором центра масс, а ось Sx_j – угол $\varphi + \theta$ с нормалью к плоскости орбиты. Угол θ явным образом выражается через угол φ и расстояние r от центра масс тела до притягивающего центра

$$\theta = \theta_{ij} = \frac{1}{2} \arctg \frac{v_{ij}(r) \sin 2\varphi}{1 - v_{ij}(r) \cos 2\varphi}; \quad v_{ij} = \frac{m_j - m_j}{m} \frac{a^2}{r^2} \quad (2.4)$$

Угол φ и расстояние r определяются из системы, которая аналогична системе (2.3), но функции Φ_{ij} и Ψ_{ijk} имеют более громоздкий вид.

Аналогично предыдущему можно показать, что

$$\varphi = \pi n \pm \bar{\varphi}_{ij}(\kappa^2), \quad (n = 0, 1), \quad r = \bar{r}_{ij}(\kappa^2), \quad a < \bar{r}_{ij}(\kappa^2) < \bar{r}_{ij}^* \quad (2.5)$$

$$0 < \bar{\varphi}_{ij}(\kappa^2) < \bar{\varphi}_{ij}^* < \varphi_{ij}^* < \pi / 4$$

Здесь φ_{ij}^* – единственный (для $0 < \varphi < \pi/2$) корень уравнения $m_j m_i^{-1} = \Phi_{ij}(a, \varphi)$, а \bar{r}_{ij}^* – единственный (для $r > a$) корень уравнения $C_4(r) = 0$.

Взаимное расположение точек r_{ik}^* , \bar{r}_{ij}^* и $r_{ik(j)}^0$ существенно влияет на степень неустойчивости стационарных движений, отвечающих ориентациям (1.5), (2.1), (2.2), и зависит от соотношения масс m_1, m_2, m_3 . В дальнейшем для простоты ограничимся случаем близких масс:

$$m_2 = m_1(1 - u), \quad m_3 = m_2(1 - v); \quad 0 < u \ll 1, \quad 0 < v \ll 1 \quad (2.6)$$

Отметим, что при условиях (2.6) эллипсоид инерции тела близок к шару, что характерно для многих естественных небесных тел.

При выполнении этих условий имеют место соотношения $r_{ij(k)}^0 \ll \bar{r}_{ij}^*(r_{ik}^*)$, и, кроме того, при этом можно показать, что стационарные движения, отвечающие ориентациям (2.1) и (2.2), существуют при $\kappa^2 \in ((\kappa_{ik}^2)^*; (\kappa_{ik}^2)^*)$ и $\kappa^2 \in ((\bar{\kappa}_{ij}^2)^*; (\bar{\kappa}_{ij}^2)^*)$ соответственно. Здесь $(\kappa_{ik}^2)^*$ или $(\bar{\kappa}_{ij}^2)^*$ определяются из второго уравнения системы (2.3) при $r = a$, $\varphi = \varphi_{ik}^*$ или $r = r_{ik}^*$, $\varphi = 0$. Аналогично определяются $(\bar{\kappa}_{ij}^2)^*$ или $(\bar{\kappa}_{ij}^2)^*$.

3. Для исследования устойчивости стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.1), вычислим вторую вариацию функции W на линейном многообразии $\delta\beta_j = 0$, $\delta\gamma_i \cos\varphi + \delta\gamma_k \sin\varphi = 0$:

$$\delta^2 W = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$2\Sigma_1 = C_{11}(\delta r)^2 + 2C_{12}(\delta r)(\delta\gamma_k) + C_{22}(\delta\gamma_k)^2$$

$$2\Sigma_2 = C_{33}(\delta\gamma_j)^2 + 2C_{34}(\delta\gamma_j)(\delta\beta_i) + 2C_{35}(\delta\gamma_j)(\delta\beta_k) +$$

$$+ C_{44}(\delta\beta_i)^2 + 2C_{45}(\delta\beta_i)(\delta\beta_k) + C_{55}(\delta\beta_k)^2$$

$$C_{11} = \frac{mr}{(mr^2 + J_j)^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{2} \frac{(mr^2 + J_j)^2}{mr} \Psi_{ikj}(r, \varphi) \right]$$

$$C_{12} = -\frac{3}{2} m_k \frac{ra}{\delta_i^{(3)}} \left[\delta_i^{(3)} (r\sigma_k^{(5)} + a\gamma_k \delta_k^{(5)}) - \delta_k^{(3)} (r\sigma_i^{(5)} + a\gamma_i \delta_i^{(5)}) \right]$$

$$C_{22} = -\frac{1}{2} m_k \frac{ra}{\delta_i^{(3)} \gamma_i} \left[\frac{\delta_i^{(3)} \delta_k^{(3)}}{\gamma_i \gamma_k} + 3ra\sigma_k^{(5)} \delta_i^{(3)} \gamma_i + \sigma_i^{(5)} \delta_k^{(3)} \gamma_k \right]$$

$$C_{33} = \frac{1}{2} r^2 \left[m_i \sigma_i^{(3)} + m_k \sigma_k^{(3)} + \frac{2m_j(r^2 - 2a^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right]$$

$$C_{44} = \frac{\kappa^2}{J^2} [mr^2 \cos^2 \varphi + (J_j - J_i)], \quad C_{55} = \frac{\kappa^2}{J^2} [mr^2 \sin^2 \varphi + (J_j - J_k)]$$

$$C_{34} = \pm \frac{\kappa^2}{J^2} mr^2 \cos \varphi, \quad C_{35} = \pm \frac{\kappa^2}{J^2} mr^2 \sin \varphi, \quad C_{45} = \pm \frac{\kappa^2}{J^2} mr^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\delta_s^{(n)} = F_s^n(a) - F_s^n(-a), \quad \sigma_s^{(n)} = F_s^n(a) + F_s^n(-a), \quad (s = 1, 2, 3; \quad n = 3, 5)$$

Здесь $\gamma_i = \cos\varphi$, $\gamma_k = \sin\varphi$, r и φ связаны первым соотношением системы (2.3) и зависят от κ^2 (см. второе соотношение этой системы); $i, j, k \in S_3$, $i > k$.

Поскольку $C_{22} < 0$, то все стационарные движения, соответствующие ориентациям (2.1), неустойчивы в вековом смысле. Степень неустойчивости этих движений при $r < r_{ik}^*$, близких к r_{ik}^* , совпадает со степенью неустойчивости соответствующих тривиальных стационарных движений, отвечающих $r > r_{ik}^*$ ($i > k$), и не изменяется вдоль всей ветви (2.3) ($a < r_{ik}(\kappa^2) < r_{ik}^*$), если определитель Δ квадратичной формы $\delta^2 W = \Sigma_1 + \Sigma_2$ не изменяет знак при всех $r \in (a; r_{ik}^*)$, $\varphi \in (0; \varphi_{ik}^*)$. Поскольку $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$, где $\Delta_{1,2}$ – определитель квадратичной формы $\Sigma_{1,2}$, причем $\Delta_1 \neq 0$ для всех стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.1), то Δ обращается в нуль, если и только если, Δ_2 обращается в нуль. Определитель Δ_2 не обращается в нуль для ориентаций (2.1) в случае $i = 2, j = 3, k = 1$, обращается в нуль в случае $i = 3, j = 1, k = 2$ и может обращаться в нуль в случае $i = 3, j = 2, k = 1$ в некоторой точке $(\bar{r}_{3k}^{**}; \bar{\varphi}_{3k}^{**})$, $a < \bar{r}_{3k}^{**} < r_{3k}^*$, $0 < \bar{\varphi}_{3k}^{**} < \varphi_{3k}^*$, ($k = 1, 2$). Для $k = 1, i = 2, j = 3$ эта точка существует при произвольных значениях масс $m_1 > m_2 > m_3$, а для $k = 2, i = 3, j = 1$ – только при $2m_2 > m_1 + m_3$, (т.е. только при $v > u$; см. (2.6)). При этом степень неустойчивости стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.1) ($k = 1, 2$), для $a < r < \bar{r}_{3k}^{**}$ на единицу меньше, чем для $\bar{r}_{3k}^{**} < r < r_{3k}^*$.

Для исследования устойчивости стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.2), следует вычислить вторую вариацию функции W на линейном многообразии

$$\delta\gamma_i \cos\varphi - \delta\gamma_j \sin\varphi = 0, \quad \delta\beta_j \cos(\theta + \varphi) + \delta\beta_i \sin(\theta + \varphi) = 0$$

$$\delta^2 W = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$2\Sigma_1 = C_{11}(\delta r)^2 + 2C_{12}(\delta r)(\delta\gamma_j) + 2C_{13}(\delta r)(\delta\beta_i) + C_{22}(\delta\gamma_j^2) + 2C_{23}(\delta\gamma_j)(\delta\beta_i) + C_{33}(\delta\beta_i)^2$$

$$2\Sigma_2 = C_{44}(\delta\gamma_k)^2 + 2C_{45}(\delta\gamma_k)(\delta\beta_k) + C_{55}(\delta\beta_k)^2$$

(коэффициенты C_{pq} имеют весьма громоздкий вид и потому не выписаны).

Аналогично предыдущему можно показать, что все стационарные движения, отвечающие ориентациям (2.2), неустойчивы в вековом смысле, так как $\Delta_1 < 0$. В случае $i = 2, j = 1, k = 3$ степень неустойчивости этих движений не изменяется ($\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$) вдоль всей соответствующей ветви (2.5) и совпадает со степенью неустойчивости соответствующих тривиальных стационарных движений, отвечающих $r > r_{21}^*$. В случае $i = 3, j = 2, k = 1$ степень неустойчивости изменяется, а в случае $i = 3, j = 2, k = 1$ может изменяться в некоторой точке $(\bar{r}_{3j}^{**}; \bar{\varphi}_{3j}^{**})$, $a < \bar{r}_{3j}^{**} < \bar{r}_{3j}^*$, $0 < \bar{\varphi}_{3j}^{**} < \bar{\varphi}_{3j}^*$ ($\Delta_2(\bar{r}_{3j}^{**}; \bar{\varphi}_{3j}^{**}) = 0$, $j = 1, 2$). Для $j = 2$ эта точка существует при произвольных значениях масс $m_1 > m_2 > m_3$, а для $j = 1$ – только при $2m_2 > m_1 + m_3$, т.е. при $v > u$ (как и в предыдущем случае $\Delta_1 \neq 0$ для всех ориентаций (2.2)). При этом степень неустойчивости стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.2) ($j = 1, 2$), для $\bar{r}_{3j}^{**} < r < \bar{r}_{3j}^*$ совпадает со степенью неустойчивости соответствующих тривиальных стационарных движений для $r > \bar{r}_{3j}^*$, а для $a < r < \bar{r}_{3j}^{**}$ ($j = 1, 2$) – на единицу меньше последней.

В точках $(r_{32}^{**}; \varphi_{32}^{**})$ и $(\bar{r}_{32}^{**}; \bar{\varphi}_{32}^{**})$ от стационарных движений, отвечающих ориентациям (2.1) ($i = 3, j = 1, k = 2$) и (2.2) ($i = 3, j = 2, k = 1$), всегда ответвляются стационарные движения, соответствующие ориентациям общего вида

$$\gamma = \gamma^0, \quad \beta = \beta^0 \quad ((\gamma^0, \beta^0) \neq 0, \quad \gamma_s^0 \neq 0, \quad \beta_s^0 \neq 0, \quad \beta_s^0 \neq 0, \quad \forall s = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

При выполнении дополнительного условия $2m_2 > m_1 + m_3$ аналогичное утверждение

справедливо и в случаях $(i = 3, j = 2, k = 1)$, $(i = 3, j = 1, k = 2)$ для ориентаций (2.1) и (2.2) соответственно. Можно показать, что эти стационарные движения существуют только при $a < r < \bar{r}_{3k}^{**}$, $a < r < \bar{r}_{3j}^{**}$ и только для $\kappa^2 < (\kappa_{3k}^2)^{**}$, $\kappa^2 < (\kappa_{3j}^2)^{**}$ соответственно. Здесь

$$(\kappa_{3k}^2)^{**} = \left[\frac{(mr^2 + J_j)^2}{2mr} \Psi_{3kj}(r, \varphi) \right]_{r=\bar{r}_{3k}^{**}, \varphi=\varphi_{3k}^{**}} \quad (k, j = 1, 2; k \neq j)$$

$$(\kappa_{3j}^2)^{**} = \left[\frac{(mr^2 + J_j)^2}{2mr} \bar{\Psi}_{3jk}(r, \varphi) \right]_{r=\bar{r}_{3j}^{**}, \varphi=\bar{\varphi}_{3j}^{**}}$$

Стационарные движения общего вида определяются из системы (1.2)–(1.4) и характеризуются тем, что плоскость орбиты центра масс тела не проходит через притягивающий центр (как и в случае (2.2)), причем ни одна из главных центральных осей инерции тела не совпадает ни с одной из осей орбитальной системы координат (в отличие от случаев (1.5), (2.1), (2.2)).

4. Уравнения (1.2)–(1.4) определяют однопараметрическое семейство стационарных движений тела (линию $L = \{r = r(\kappa^2), \gamma = \gamma(\kappa^2), \beta = \beta(\kappa^2)\}$ в пространстве $(r, \gamma, \beta, \kappa^2)$). Сечения этого пространства гиперплоскостями (1.5) приведены на фиг. 1–6. Сплошные линии отвечают тем ветвям линии L , которые лежат в указанных гиперплоскостях и соответствуют тривиальным стационарным движениям. Штриховые и штрих-пунктирные линии отвечают проекциям тех ветвей линии L , которые выходят из указанных гиперплоскостей и соответствуют стационарным движениям (2.1) и (2.2). Пунктирные линии отвечают проекциям тех ветвей линии L , которые всегда выходят из указанных выше нетривиальных ветвей и отвечают ориентациям (3.1). Фиг. 5 соответствует случаю $3\nu > u > \nu$ (см. (2.6)); в случае $3\nu < u$ необходимо поменять местами пунктирную и штрих-пунктирную линии на фиг. 5. В случае $\nu > u$ необходимо добавить на фиг. 4, 5 линии, выходящие из нетривиальных ветвей и отвечающие дополнительным стационарным движениям вида (3.1). Индексы (0), (1), (2), (3) обозначают степень неустойчивости стационарных движений тела, отвечающих тем или иным ориентациям (1.5), (2.1), (2.2), (3.1). Степень неустойчивости последних указана в соответствии с общими положениями теории бифуркаций.

5. Рассмотрим теперь ограниченную постановку задачи, предполагая, что независимо от вращательных движений тела центр масс равномерно движется по круговой орбите радиуса $r_0 \gg a$ ($r_0 = \text{const}$), расположенной в плоскости $O\xi\zeta$. При этом $\theta = 0$, $\dot{\psi} \equiv \omega_0 = (fMm/r_0^3) = \text{const}$ и рассматриваемая система допускает (вообще говоря) только обобщенный интеграл энергии $T_2^0 - T_0^0 + V = \text{const}$, где T_2^0, T_0^0 – формы второй и нулевой степени по скоростям, составляющие $T^0 = T_2^0 + T_1^0 + T_0^0$ ($T^0 = T|_{r_0=r, \theta=0, \psi=\omega_0}$). Полагая, как и в разд. 1, $\omega = \omega_0 \beta + \Omega$, выпишем измененный потенциал тела

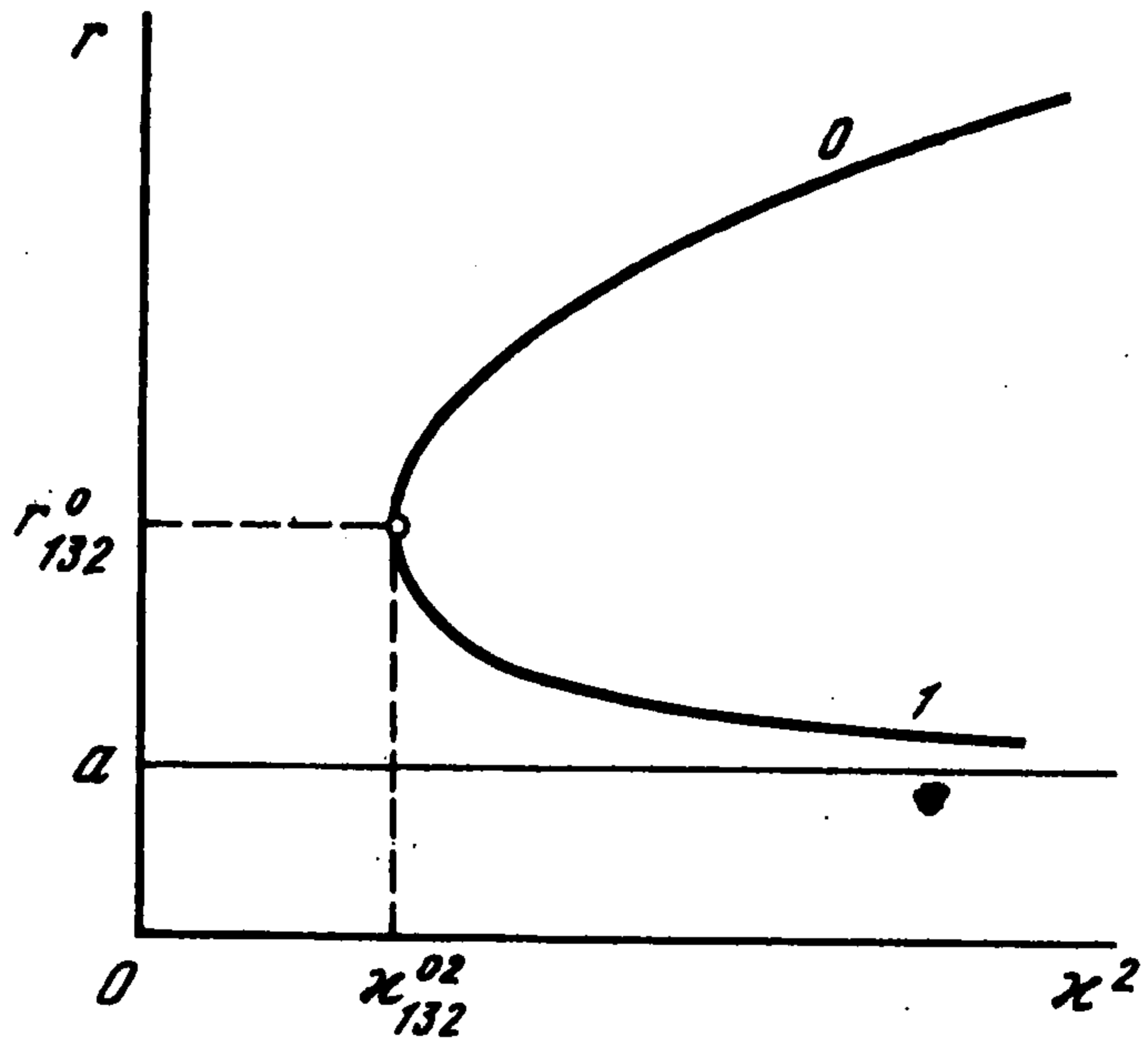
$$W_\omega^0 = V - J\omega_0^2/2$$

$$W_\omega^0 = -\frac{fM}{2} \sum_{s=1}^3 m_s (F_s(a) + F_s(-a)) - \frac{1}{2} \omega_0^2 (J_1 \beta_1^2 + J_2 \beta_2^2 + J_3 \beta_3^2)$$

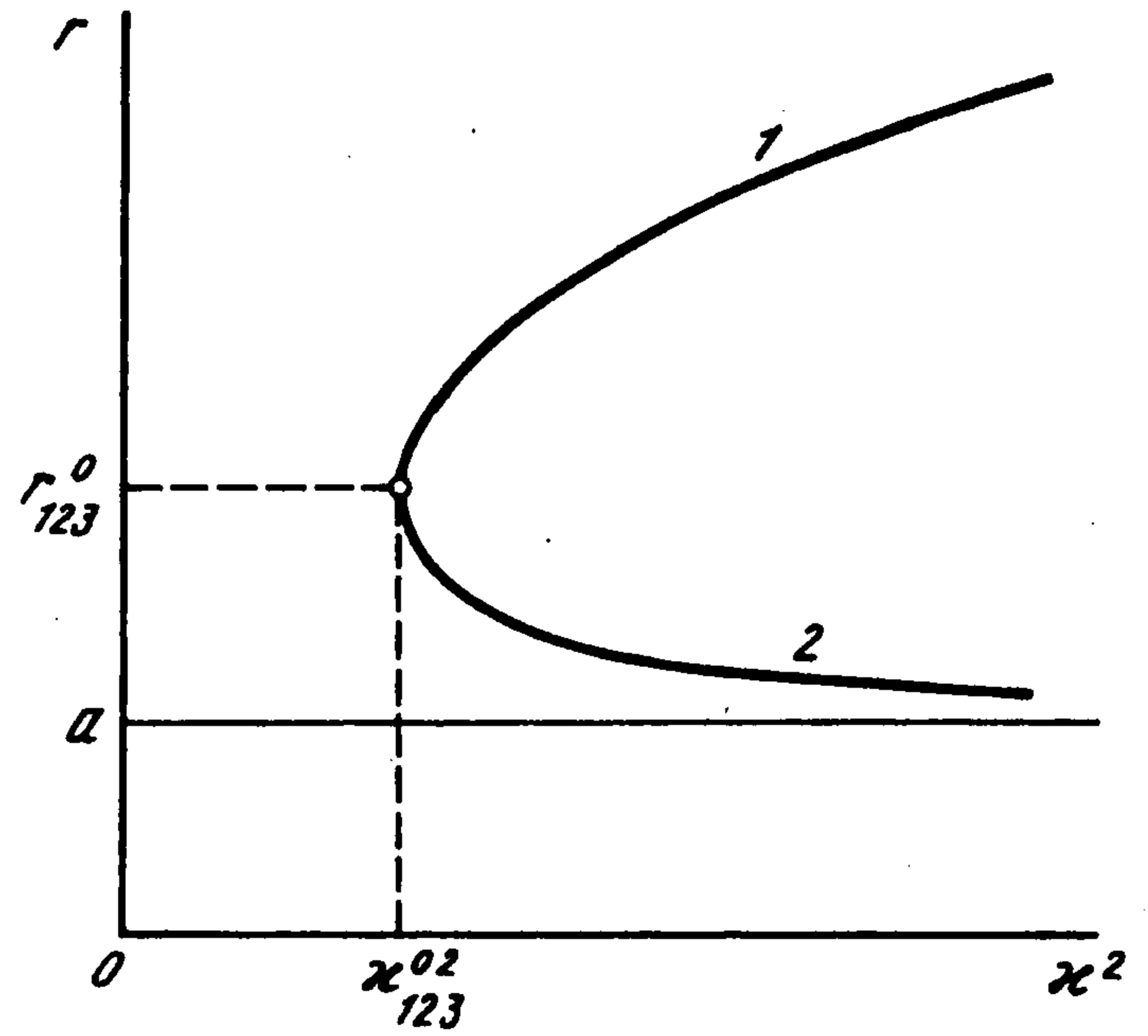
Критическим точкам (γ_0, β_0) измененного потенциала W_ω^0 на многообразии $\{\gamma^2 = 1; \beta^2 = 1; (\gamma \cdot \beta) = 0\}$ отвечают относительные равновесия тела на круговой орбите. Для отыскания этих точек введем функцию

$$W^0 = (fM)^{-1} W_\omega^0 + \lambda(\gamma \cdot \beta) + \sigma(\gamma^2 - 1)/2 + \nu(\beta^2 - 1)/2$$

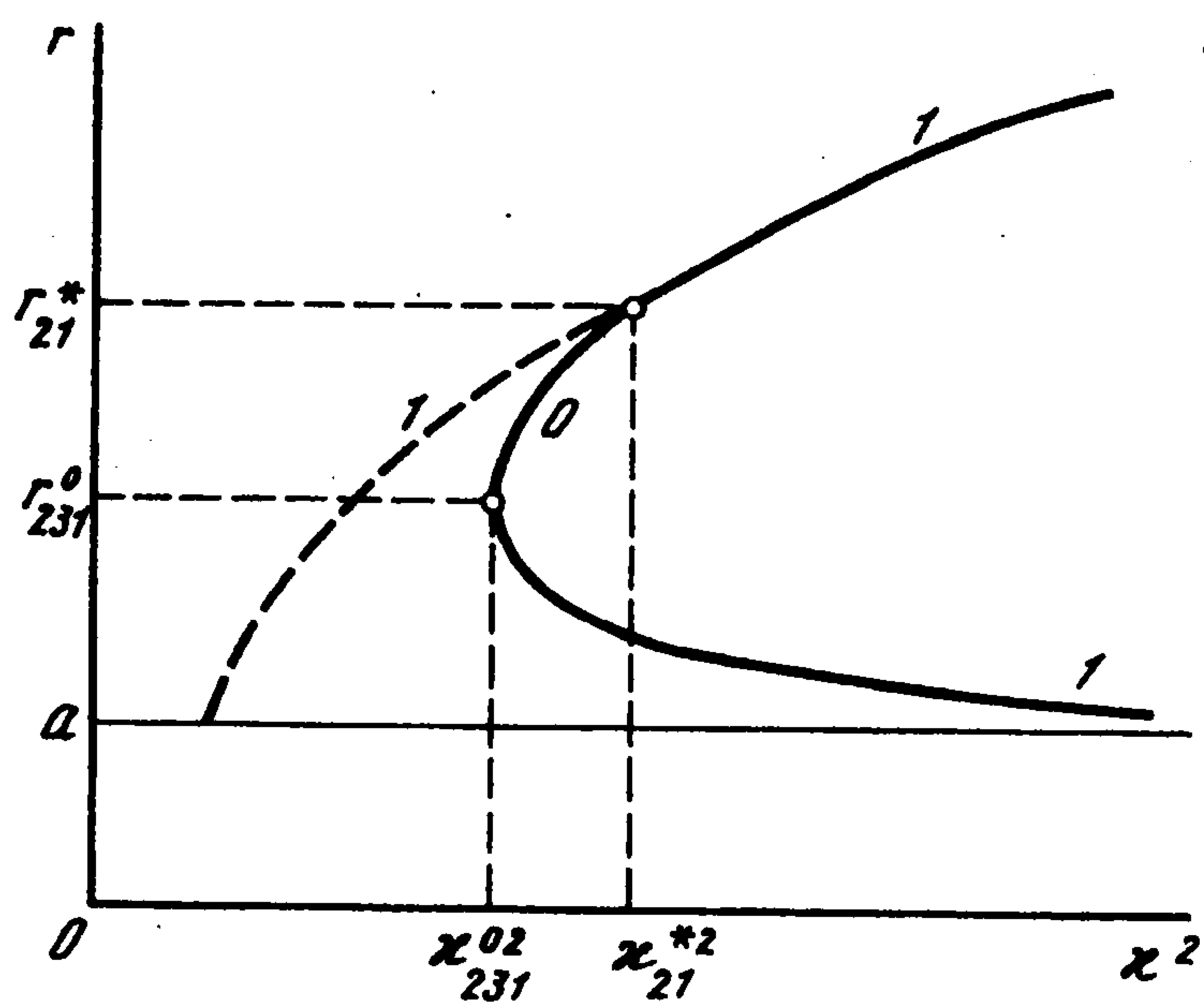
(λ, σ, ν – неопределенные множители Лагранжа) и выпишем условия ее стационарности (полагая без уменьшения общности, что $fM = 1, m = 1, r_0 = 1$; при этом $\omega_0 = 1$ и $a \ll 1$):



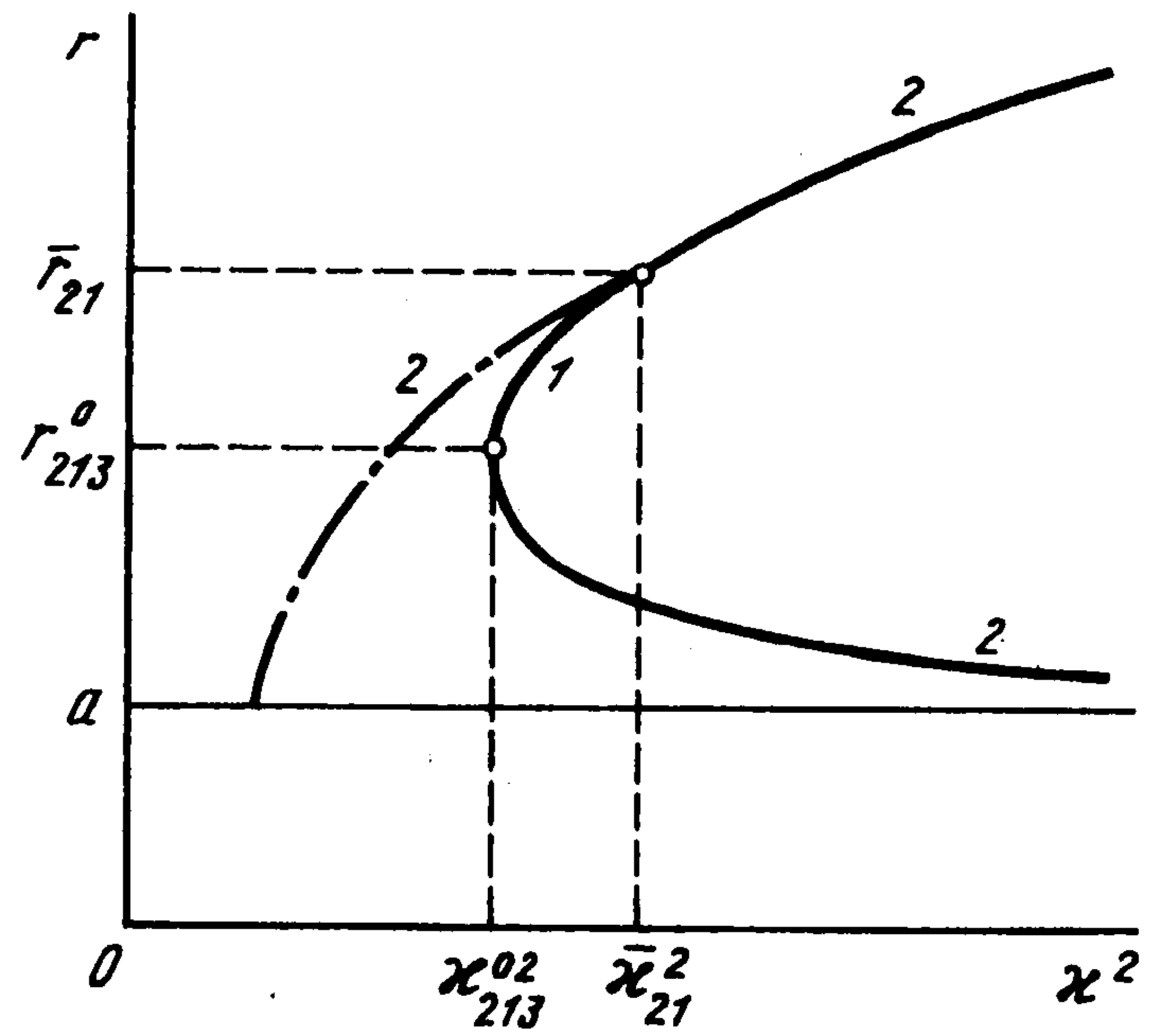
Фиг. 1



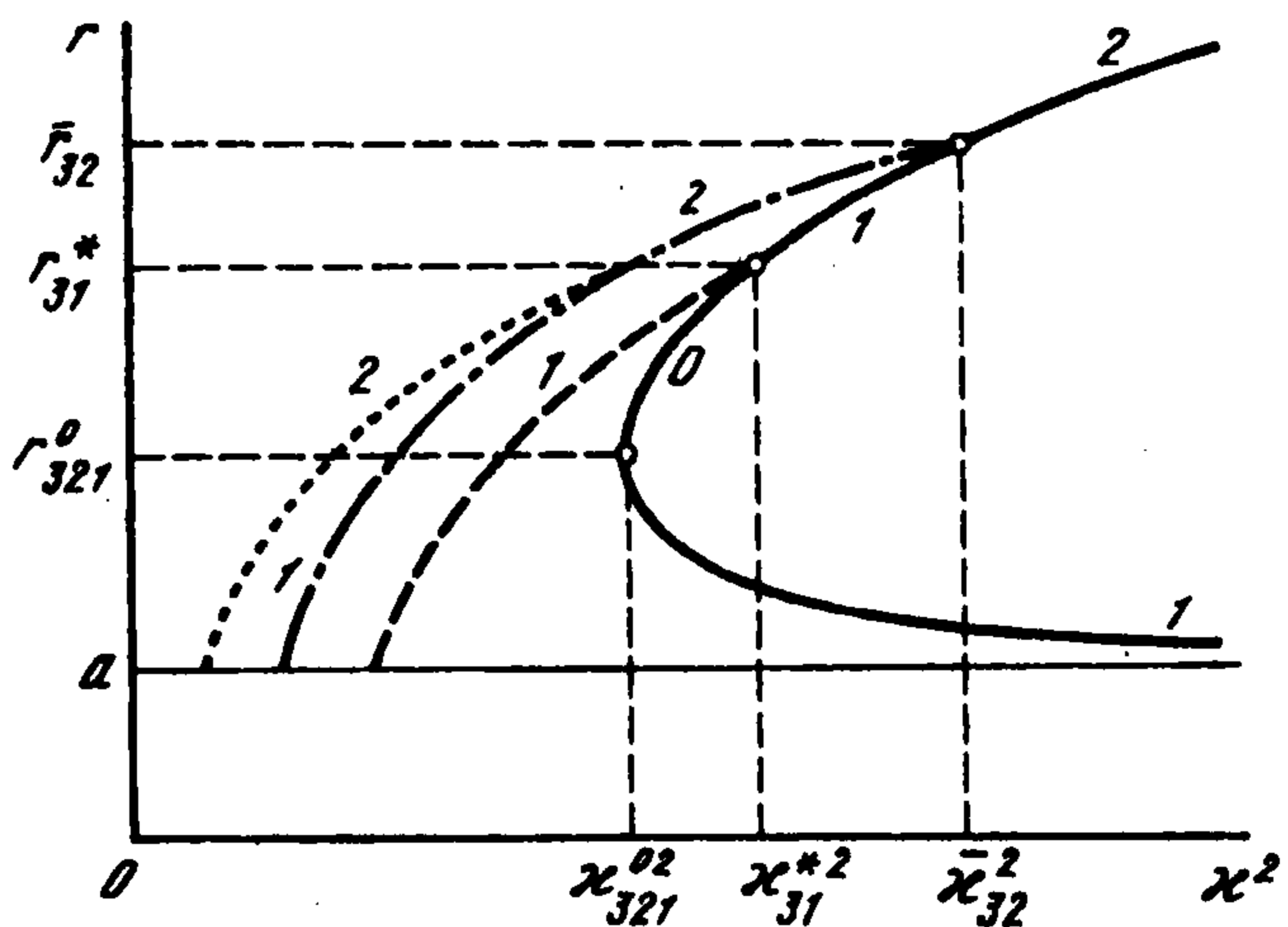
Фиг. 2



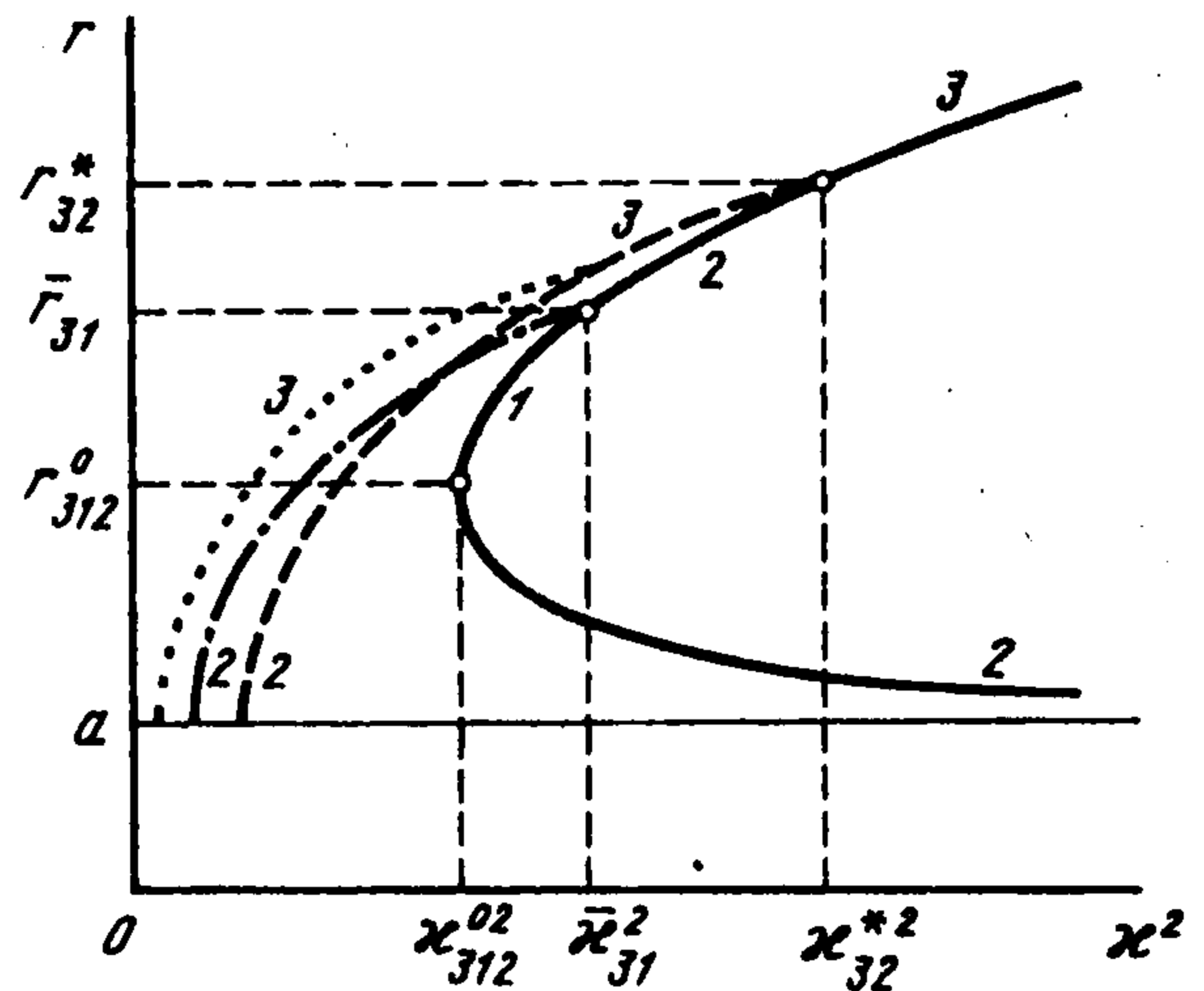
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$$\partial W^0 / \partial \gamma_s = (am_s)(F_s^3(a) - F_s^3(-a)) / 2 + \lambda \beta_s + \sigma \gamma_s = 0 \quad (5.1)$$

$$\partial W^0 / \partial \beta_s = \beta_s(v - J_s) + \lambda \gamma_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Система уравнений (5.1) допускает решения

$$\gamma_i = \pm 1; \quad \beta_j = \pm 1; \quad \gamma_j = \gamma_k = \beta_i = \beta_k = 0 \quad (i \neq j \neq k) \quad (5.2)$$

отвечающие тривиальным относительным равновесиям тела (при этом $\lambda = 0$), аналогичным стационарным движениям (1.5).

Для исследования устойчивости этих относительных равновесий вычислим вторую вариацию функции W^0 на линейном многообразии

$$\delta \gamma_i = \delta \beta_j = 0; \quad \delta \gamma_j = -\delta \beta_i$$

Имеем

$$2\delta^2 W = C_1^0 (\delta \gamma_j)^2 + C_2^0 (\delta \gamma_k)^2 + C_3^0 (\delta \beta_k)^2$$

$$C_1^0 = a^2(m_i - m_j + bm_i - cm_j), \quad C_2^0 = a^2(m_i b - m_k c)$$

$$C_3^0 = a^2(m_k - m_j); \quad b = \frac{(3+a^2)}{(1-a^2)^3}, \quad c = \frac{3}{(1+a^2)^{5/2}}$$

Очевидно, условия устойчивости относительных равновесий (5.2) имеют вид $C_1^0 > 0$, $C_2^0 > 0$, $C_3^0 > 0$.

Если $m_i > m_j$, то $C_1^0 > 0$; если же $m_i < m_j$, то $C_1^0 > 0$ ($C_1^0 < 0$) при $\mu_2 \equiv m_j/m_i < \mu_{ji}$ ($\mu_2 > \mu_{ji}$). Если $m_i > m_k$, то $C_2^0 > 0$; если же $m_i < m_k$, то $C_2^0 > 0$ ($C_2^0 < 0$) при $\mu_1 \equiv m_k/m_i < \mu_{ki}$ ($\mu_1 > \mu_{ki}$). Наконец, $C_3^0 > 0$ ($C_3^0 < 0$) при $m_k > m_j$ ($m_k < m_j$). Здесь

$$\mu_{ji} \equiv \mu_{ji}(a) = \frac{(4 - 2a^2 + 3a^4 + a^6)}{(c+1)(1-a^2)^3} = 1 + \frac{35}{8}a^2 + o(a^2)$$

$$\mu_{ki} \equiv \mu_{ki}(a) = \frac{b}{c} = 1 + \frac{35}{6}a^2 + o(a^2)$$

Таким образом, относительные равновесия (5.2) при

a) $i = 1, j = 2, k = 3$ ($m_i > m_j > m_k$; $\mu_1 < \mu_2 < 1$) всегда неустойчиво (степень неустойчивости $\chi = 1$);

b) $i = 1, j = 3, k = 2$ ($m_i > m_k > m_j$; $\mu_2 < \mu_1 < 1$) всегда устойчиво ($\chi = 0$);

c) $i = 2, j = 1, k = 3$ ($m_j > m_i > m_k$; $\mu_2 > 1 > \mu_1$) неустойчиво ($\chi = 1$), если $\mu_2 < \mu_{ji}$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $\mu_2 > \mu_{ji}$;

d) $i = 2, j = 3, k = 1$ ($m_k > m_i > m_j$; $\mu_1 > 1 > \mu_2$) устойчиво ($\chi = 0$), если $\mu_1 < \mu_{ki}$, и неустойчиво ($\chi = 1$), если $\mu_1 > \mu_{ki}$;

e) $i = 3, j = 1, k = 2$ ($m_j > m_k > m_i$; $\mu_2 > \mu_1 > 1$) неустойчиво, если $\mu_2 < \mu_{ji}$ ($\chi = 1$) или $\mu_1 > \mu_{ki}$ ($\chi = 3$), и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $\mu_1 < \mu_{ki}$ и $\mu_2 > \mu_{ji}$;

f) $i = 3, j = 2, k = 1$ ($m_k > m_j > m_i$; $\mu_1 > \mu_2 > 1$) устойчиво ($\chi = 0$), если $\mu_1 < \mu_{ki}$ и $\mu_2 < \mu_{ji}$, неустойчиво ($\chi = 1$), если $\mu_1 > \mu_{ki}$ и $\mu_2 < \mu_{ji}$ или $\mu_1 < \mu_{ki}$ и $\mu_2 > \mu_{ji}$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $\mu_1 > \mu_{ki}$ и $\mu_2 > \mu_{ji}$.

На фиг. 7 плоскость параметров μ_1, μ_2 разбита сплошными линиями на шесть областей, отвечающих, соответственно, случаям a–f, и цифрами 0–3 указана степень неустойчивости соответствующих относительных равновесий (5.2). Штриховыми линиями отмечены бифуркационные прямые $\mu_1 = \mu_{ki}$ и $\mu_2 = \mu_{ji}$, на которых происходит смена степени неустойчивости тривиальных ориентаций (в случаях c–f).

6. При $\mu_1 = \mu_{ki}$ изменяется степень неустойчивости тривиальных относительных равновесий (5.2), отвечающих случаям $d - f$. При этом обращается в нуль коэффициент C_2^0 и от указанных тривиальных решений системы (5.1) ответвляются решения ($i > k$)

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \cos \varphi_0; \quad \gamma_k = \sin \varphi_0; \quad \beta_j = \pm 1; \\ \gamma_j &= \beta_i = \beta_k = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

При $\mu_2 = \mu_{ji}$ изменяется степень неустойчивости тривиальных относительных равновесий (5.2), отвечающих случаям c, e, f . При этом обращается в нуль коэффициент C_1^0 и от указанных тривиальных решений системы (5.1) ответвляются решения

$$\gamma_i = \cos \psi_0; \quad \gamma_j = -\sin \psi_0; \quad \beta_i = \sin \psi_0; \quad \beta_j = \cos \psi_0; \quad \gamma_k = \beta_k = 0 \quad (6.2)$$

Заметим, что для решений (6.1) $\lambda = 0$, а для решений (6.2) $\lambda = a^2 \sin \psi \cos \psi (m_j - m_i) \neq 0$. Относительные равновесия (6.1) аналогичны стационарным движениям (2.1), для которых $\theta = 0$, а относительные равновесия (6.2) существенно отличаются от соответствующих стационарных движений (2.2), для которых $\theta \neq 0$. Более того, поскольку для решений (6.2) $\lambda \neq 0$, то для их существования необходимо прилагать силы, удерживающие центр масс тела в плоскости, содержащей притягивающий центр.

Углы φ_0 и ψ_0 определяются из уравнений

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \varphi_0 \frac{F_i^3(-a) - F_i^3(a)}{F_k^3(-a) - F_k^3(a)} \quad (6.3)$$

$$\mu_2 = \operatorname{tg} \psi_0 \frac{F_i^3(-a) - F_i^3(a) + 2a \cos \psi_0}{F_j^3(a) - F_j^3(-a) + 2a \sin \psi_0} \quad (6.4)$$

(ср. (6.3) с первым уравнением системы (2.3)). Свойства решений уравнений (6.3) и (6.4) аналогичны свойствам решений (2.1) и (2.2).

Решения (6.1) и (6.2) существуют только при $\mu_1 < \mu_{ki}$ и $\mu_2 < \mu_{ji}$ соответственно (эллипсоид инерции тела близок к эллипсоиду вращения), поэтому в дальнейшем без уменьшения общности будем считать, что

$$m_k = m_i(1 + ha^2) + o(a^2), \quad m_j = m_i(1 + ga^2) + o(a^2) \quad (6.5)$$

7. Для исследования устойчивости относительных равновесий (6.1) вычислим вторую вариацию функции W^0 на линейном многообразии

$$\delta\beta_j = 0; \quad \delta\gamma_i = -\operatorname{tg} \varphi_0 \delta\gamma_k; \quad \delta\gamma_j = -\cos \varphi_0 \delta\beta_i - \sin \varphi_0 \delta\beta_k$$

Имеем

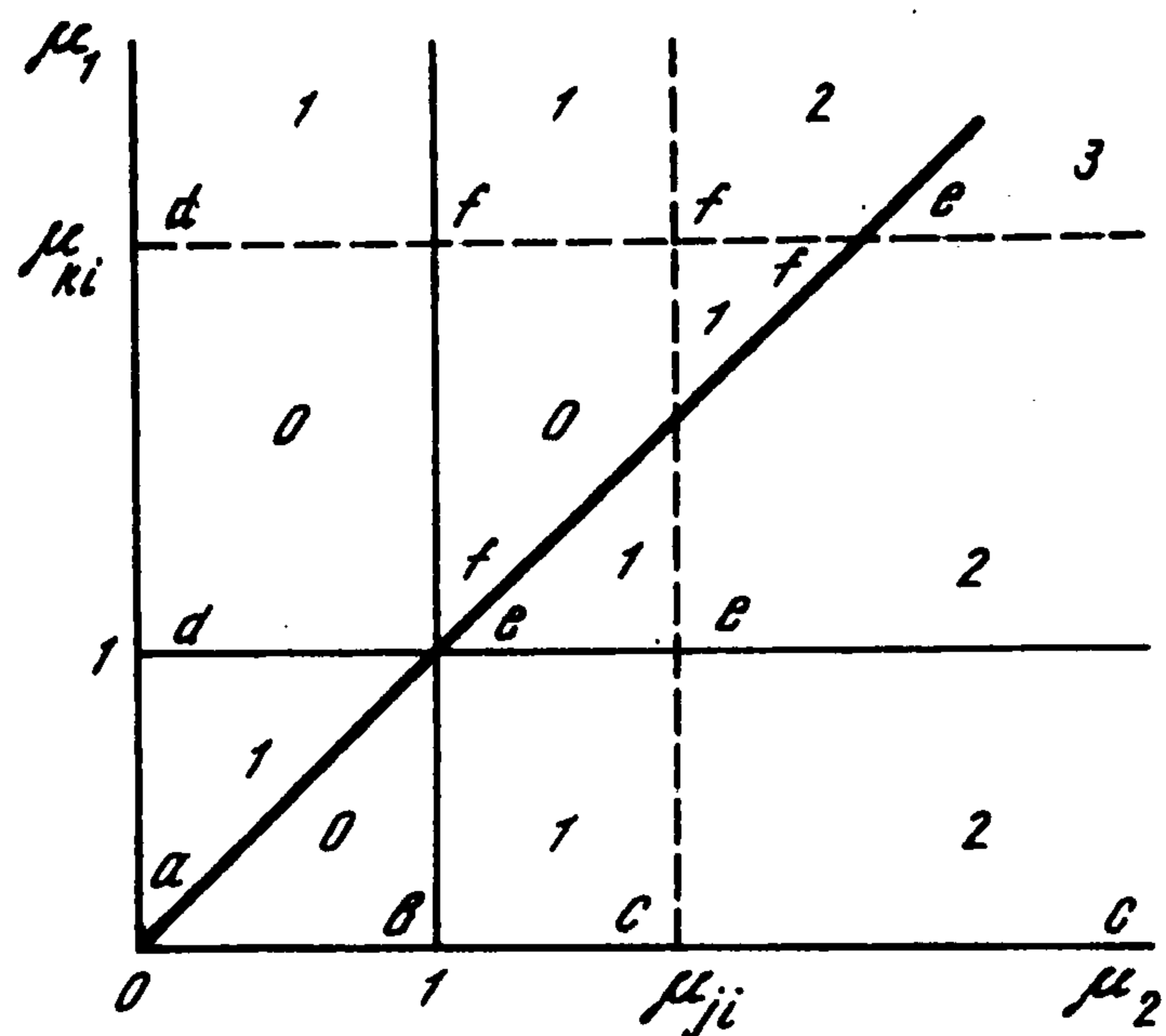
$$2\delta^2 W^0 = C_{11}^0 (\delta\gamma_k)^2 + C_{22}^0 (\delta\beta_i)^2 + 2C_{23}^0 \delta\beta_i \delta\beta_k + C_{33}^0 (\delta\beta_k)^2$$

$$C_{11}^0 = a(m_i [F_i^3(-a) - F_i^3(a)] / \cos \varphi_0 - 3a[\sin^2 \varphi_0 m_i [F_i^5(a) + F_i^5(-a)] - \cos^2 \varphi_0 m_k [F_k^5(a) + F_k^5(-a)]] / 2 \cos^2 \varphi_0$$

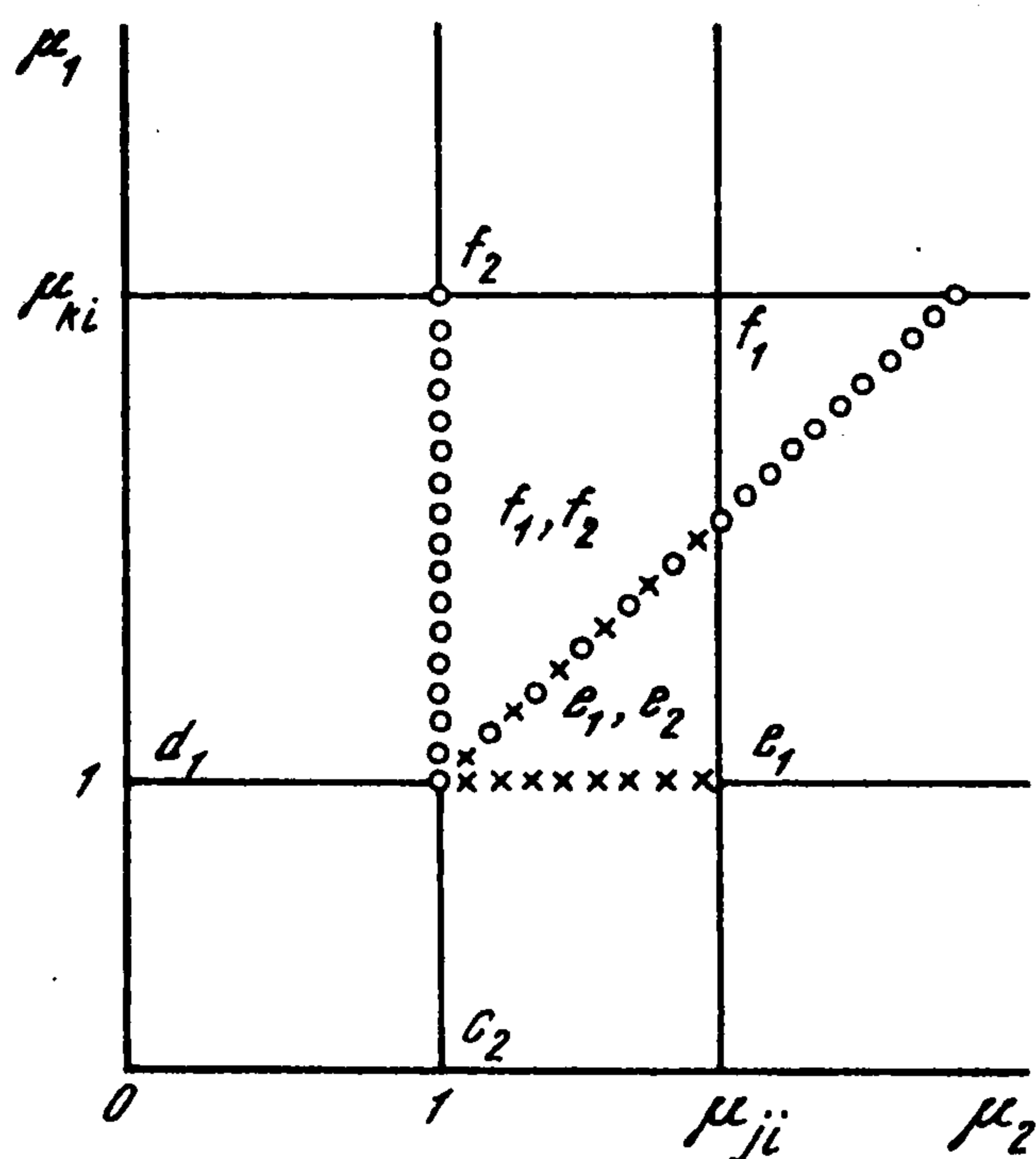
$$C_{22}^0 = a^2(m_i - m_j) + a \cos^2 \varphi_0 \delta_{ij}, \quad C_{23}^0 = a \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \delta_{ij}$$

$$C_{33}^0 = a^2(m_k - m_j) + a \sin^2 \varphi_0 \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = m_i [F_i^3(-a) - F_i^3(a)] / 2 \cos \varphi_0 - 3cm_j$$



Фиг. 7



Фиг. 8

Учитывая первое из соотношений (6.5), заключаем, что $C_{11}^0 < 0$ при всех $i > k$, т.е. все относительные равновесия (6.1) неустойчивы в вековом смысле. Детальный анализ других коэффициентов квадратичной формы $\delta^2 W^0$ показывает, что относительное равновесие (6.1) при

d) $i = 2, j = 3, k = 1$ всегда неустойчиво ($\chi = 1$);

e) $i = 3, j = 1, k = 2$ неустойчиво ($\chi = 3$), если $g > g_+$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $g < g_+$;

f) $i = 3, j = 2, k = 1$ неустойчиво ($\chi = 1$), если $g < g_-$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $g > g_-$.

Здесь

$$g_{\pm} = g_{\pm}(\varphi_0) = \frac{35}{48} \left[6 \cos^4 \varphi_0 + \cos 2\varphi_0 \pm \left(\frac{9}{4} \sin^4 2\varphi_0 + \cos^4 2\varphi_0 \right)^{1/2} \right]$$

Аналогично исследуется устойчивость относительных равновесий (6.2) путем анализа второй вариации функции W^0 на линейном многообразии $\delta\gamma_j = -\delta\beta_i$, $\delta\gamma_i = \delta\beta_j = -\text{tg } \psi_0 \delta\beta_i$.

При этом оказывается, что все ($i > j$) относительные равновесия (6.2) неустойчивы в вековом смысле, причем равновесие (6.2) при

c) $i = 2, j = 1, k = 3$ неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$);

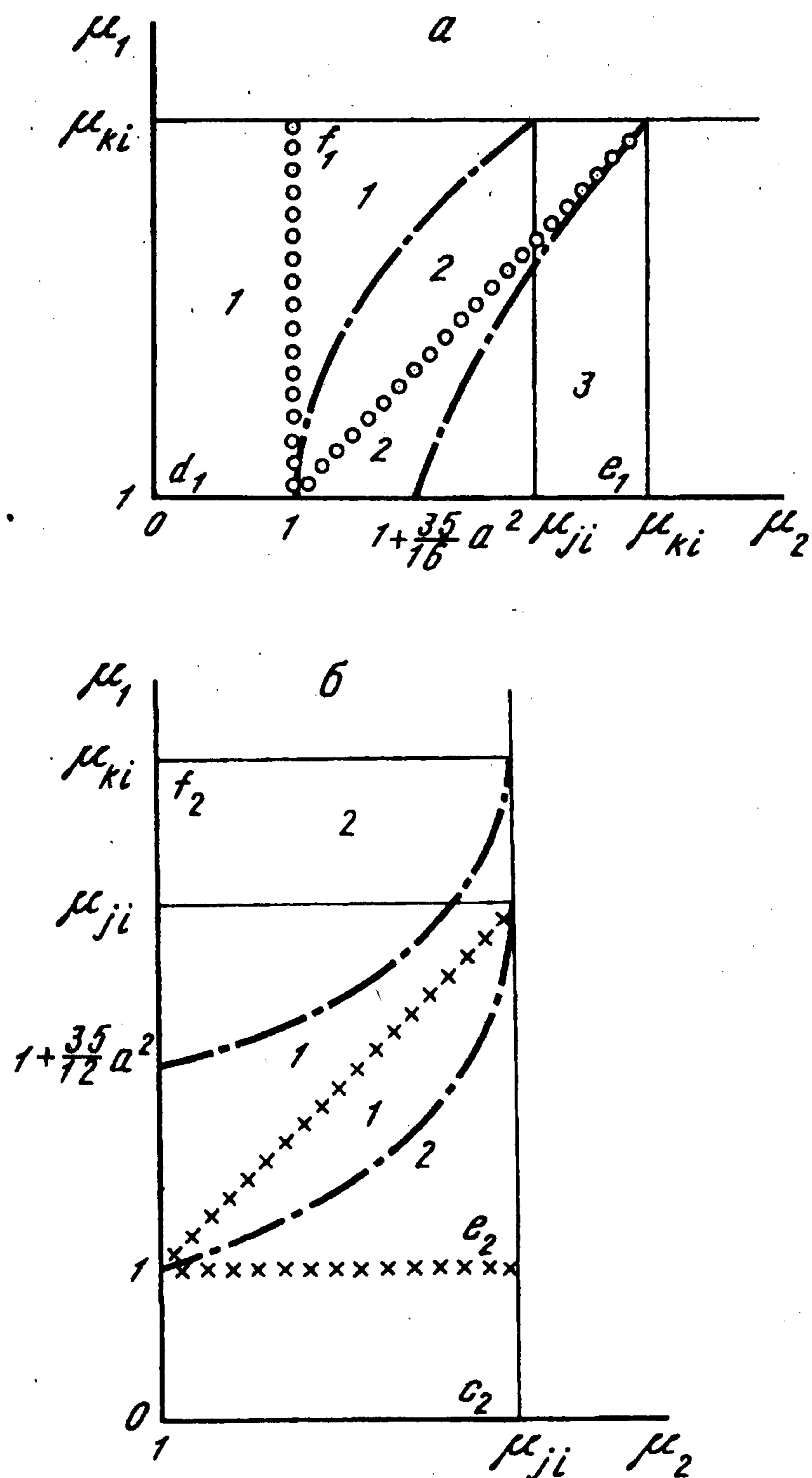
e) $i = 3, j = 1, k = 2$ неустойчиво ($\chi = 1$), если $h > h_-$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $h < h_-$;

f) $i = 3, j = 2, k = 1$ неустойчиво ($\chi = 1$), если $h < h_+$, и неустойчиво в вековом смысле ($\chi = 2$), если $h > h_+$.

Здесь

$$h_{\pm} = h_{\pm}(\psi_0) = \frac{35}{48} [8 \cos^4 \psi_0 - \cos 2\psi_0 \pm (4 \sin^4 2\psi_0 + \cos^4 2\psi_0)^{1/2}]$$

На фиг. 8 жирными линиями выделена область на плоскости параметров μ_1, μ_2 , в которой существуют решения (6.1), (6.2). Решения (6.1) существуют в полосе $\mu_1 \in (1; \mu_{ki})$, $\mu_2 > 0$, а решения (6.2) – в полосе $\mu_2 \in (1; \mu_{ji})$, $\mu_1 > 0$. Первая полоса разбита светлыми точками на три области, отвечающие случаям (6.1) d–f (помечены d_1 – f_1), а вторая полоса разбита крестами на три области, отвечающие случаям (6.2) c, e, f (помечены c_2, e_2, f_2).



Фиг. 9

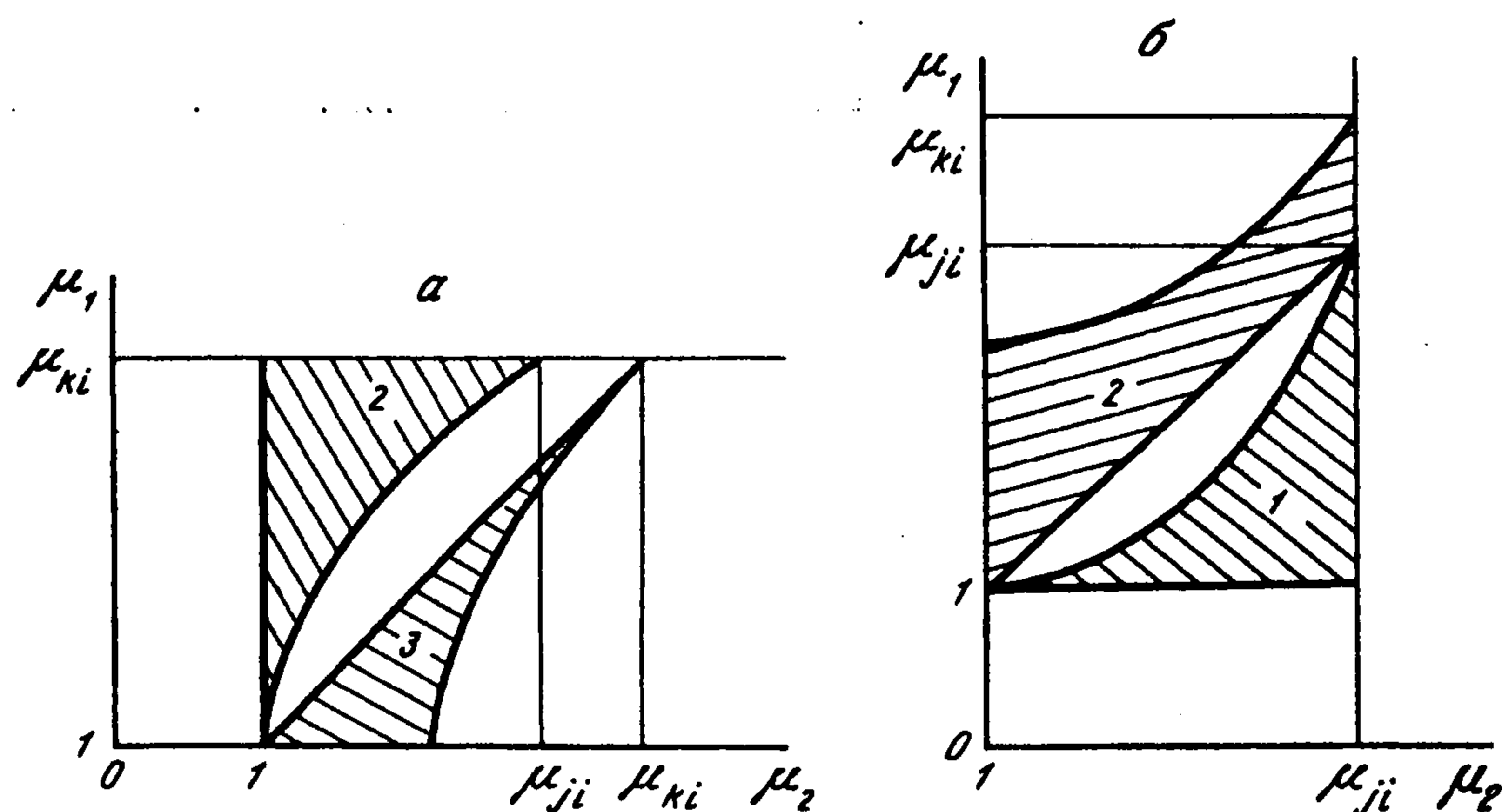
На фиг. 9 эти полосы показаны отдельно и указаны степени неустойчивости соответствующих относительных равновесий (6.1), (6.2). Штрих-пунктирными линиями отмечены проекции бифуркационных кривых, на которых происходит смена степени неустойчивости равновесных ориентаций (6.1), (6.2) (в случаях e, f).

8. В случаях e и f ($i = 3, j, k = 1, 2$) изменяется степень неустойчивости относительных равновесий (6.1) (при $g = g_{\pm}$) и (6.2) (при $h = h_{\pm}$). При этом ответвляются решения общего вида

$$\begin{aligned}
 \gamma_i &= \cos \varphi_0 \cos \psi_0; & \gamma_j &= \sin \varphi_0 \cos \psi_0 \sin \theta_0 - \sin \psi_0 \cos \theta_0 \\
 \gamma_k &= \sin \varphi_0 \cos \psi_0 \cos \theta_0 + \sin \psi_0 \sin \theta_0 \\
 \beta_i &= \cos \varphi_0 \sin \psi_0; & \beta_j &= \sin \varphi_0 \sin \psi_0 \sin \theta_0 + \cos \psi_0 \cos \theta_0 \\
 \beta_k &= \sin \varphi_0 \sin \psi_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \psi_0
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

$$\left(\lambda = (J_i - J_j) \sin \psi_0 \left(\cos \psi_0 + \frac{\sin \varphi_0 \sin \theta_0 \sin \psi_0}{\cos \theta_0} \right) \neq 0 \right)$$

Эти решения существуют только при $i = 3$ и только при одновременном выполнении условий $\mu_1 < \mu_{k3}$, $\mu_2 < \mu_{k3}$, которые эквивалентны условиям (6.5) и означают, что эллипсоид инерции тела близок к шару. Эти относительные равновесия существенно отличаются от соответствующих им стационарных движений (3.1), для которых $\theta \neq 0$ и всегда неустойчивы в вековом смысле (в зависимости от соотношений масс m_1, m_2, m_3 , удовлетворяющих условиям (6.5), степень неустойчивости решений (8.1) может равняться 1, 2 или 3).



Фиг. 10

На фиг. 10 жирными линиями отмечены области существования решений (8.1) и цифрами 1–3 указаны степени неустойчивости этих решений (в соответствии с положениями теории бифуркаций).

9. Таким образом, в рассматриваемой модельной задаче имеют место следующие явления, вызванные использованием точного выражения для потенциала гравитационных сил:

1) наличие вековой устойчивости стационарных движений и относительных равновесий тела, отвечающих тривиальным ориентациям в случаях, когда не только наибольшая ($i = 1, j = 3, k = 2$), но также средняя ($i = 2, j = 3, k = 1$) или малая ($i = 3, j = 2, k = 1$) оси эллипсоида инерции тела направлены вдоль радиус-вектора его центра масс (см. также [1, 4, 5]);

2) существование нетривиальных стационарных движений и относительных равновесий, для которых по крайней мере две из его главных центральных осей инерции не совпадают с осями орбитальной системы координат (см. также [4]);

3) существование стационарных движений тела, для которых плоскость орбиты его центра масс не проходит через притягивающий центр.

Следует отметить, что в случае, когда эллипсоид инерции тела близок к шару (см. (2.6)), бифуркационные значения радиуса орбиты центра масс тела на тривиальных стационарных движениях определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{21}^* &= a \left(\frac{35}{6u} \right)^{1/2} (1 + o(1)), & r_{32}^* &= a \left(\frac{35}{6v} \right)^{1/2} (1 + o(1)) \\ r_{31}^* &= a \left(\frac{35}{6u + 6v} \right)^{1/2} (1 + o(1)), & \bar{r}_{32}^* &= a \left(\frac{35}{8v} \right)^{1/2} (1 + o(1)) \\ \bar{r}_{21}^* &= a \left(\frac{35}{8u} \right)^{1/2} (1 + o(1)), & \bar{r}_{31}^* &= a \left(\frac{35}{8v + 8u} \right)^{1/2} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Следовательно, в этом случае в окрестности точек бифуркации $a/r \ll 1$ и отмеченные выше явления сохраняются, даже если размеры тела много меньше расстоя-

ния между его центром масс и притягивающим центром. Это же подтверждает проведенное исследование ограниченной постановки задачи, в которой для относительных равновесий тела, эллипсоид инерции которого близок к шару (см. (6.5)), имеют место первые два явления из указанных выше.

Заметим, что при $a/r \ll 1$ обычно используют спутниковое приближение гравитационного потенциала; при этом, как известно [1], указанные явления вообще не имеют места. В частности, при использовании спутникового приближения гравитационного потенциала существуют только тривиальные стационарные ориентации (общим числом 24).

При использовании точного выражения гравитационного потенциала в неограниченной постановке задачи всегда существуют 72 стационарные ориентации (во всяком случае, в рассматриваемой модельной задаче): 24 тривиальные ориентации (1.5), 24 "плоские" ($\theta = 0$) нетривиальные ориентации (2.1) и 24 "пространственные" ($\theta \neq 0$) нетривиальные ориентации (2.2). Кроме того, если эллипсоид инерции тела близок к шару (см. (2.6)), то существуют по крайней мере 32 дополнительные стационарные ориентации "общего вида" (3.1) (для произвольных значений m_1, m_2, m_3 , близких одно к другому). Эти 104 стационарные ориентации соответствуют 104 стационарным ориентациям, указанным [3] для частного случая $m_1 = m_2 = m_3$, и переходят в последние при $u^2 + v^2 \rightarrow 0$. Наконец, если $2m_2 > m_1 + m_3$, то существуют еще 32 стационарные ориентации "общего вида", которые не имеют аналога в указанном выше частном случае $m_1 = m_2 = m_3$.

Аналогичные выводы справедливы и для ограниченной постановки задачи. Отличие состоит лишь в том, что в этом случае все относительные равновесия характеризуются условием $\theta \equiv 0$, причем, как уже отмечалось, для относительных равновесий (5.3) и (6.1), отвечающих "плоским" ($\theta = 0$) стационарным движениям (1.5) и (2.1), реакция связи $\theta = 0$ равна нулю, а для относительных равновесий (6.2) и (8.1), отвечающих "пространственным" ($\theta \neq 0$) стационарным движениям (2.2) и (3.1), эта реакция не равна нулю (см. выражения для неопределенного множителя λ).

Кроме того, при условии $r \gg a$ нетривиальные стационарные движения и относительные равновесия существуют лишь для тел, эллипсоид инерции которых близок к эллипсоиду вращения (в частности, к шару).

Отметим также, что стационарные движения тела, для которых плоскость орбиты его центра масс проходит через притягивающий центр, существуют (при $m_1 \neq m_2 \neq m_3$) только в том случае, когда одна из его главных центральных осей инерции ортогональна плоскости орбиты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242) и Международного научного фонда (МАК 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Pascal M. Sur le mouvement d'un triple bâtonnet dans un champ newtonien // J. de mès. 1972. V. 11. № 1. P. 147-160.
3. Суликашвили Р.С. О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрий правильных многогранников, в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582-586.
4. Абрарова Е.В., Карапетян А.В. О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68-73.
5. Абрарова Е.В. Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 84-91.