ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 60. Вып. 3, 1996

УДК 531.36; 521.135

© 1996 г. В.Н. Тхай

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Общая (неограниченная) задача трех тел исследуется в случае, когда сила взаимного притяжения тел пропорциональна степени n их взаимного расстояния, где n – произвольное действительное число. Дано новое описание плоской задачи, основанное на введении лагранжевых переменных, в качестве которых выбраны: r – корень квадратный из половины полярного момента инерции, ψ – угол между двумя сторонами треугольника и y – натуральный логарифм отношения этих сторон. Первая переменная характеризует размер треугольника, две остальные – его конфигурацию. Получены уравнения Рауса, в которых переменная r "почти отделена" от y, ψ; система уравнений обратима. В частном случае ограниченной задачи, выводимой при устремлении массы одного из тел к нулю, отделимость полная, следовательно, эта задача описывает только изменение конфигурации треугольника.

Показано, что качественные результаты, известные для ньютоновского взаимодействия ($n = -2$), справедливы также для диапазона $-3 < n < -1$. В частности, для этих n "элементарными" методами анализа решена задача об устойчивости по Хиллу пары тел, установлено существование финальных движений, относящихся к гиперболо-эллиптическим движениям при $n = -2$ и проведен локальный анализ окрестностей классических точек либрации.

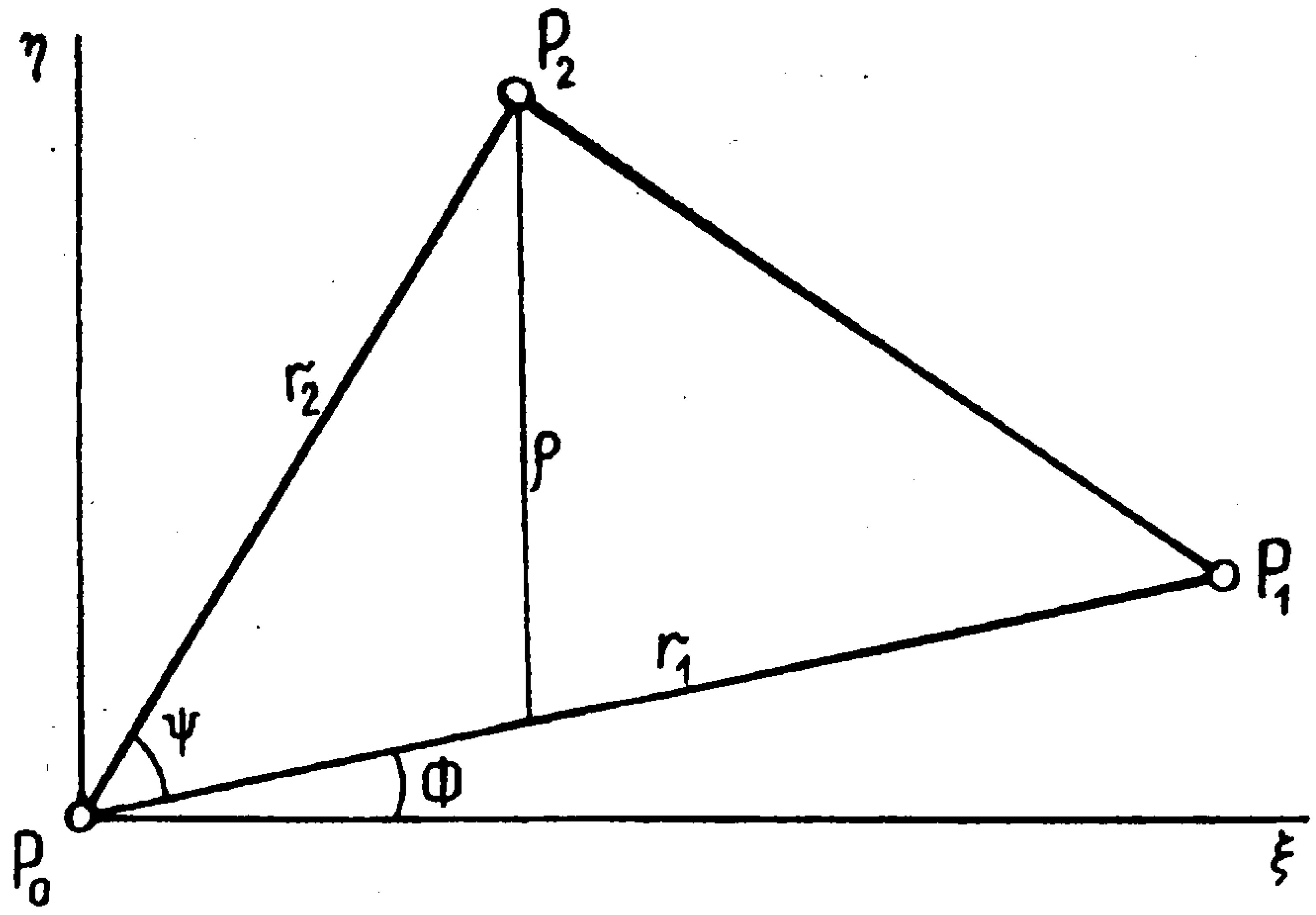
Локальный анализ показал, что в окрестности коллинеарных точек существуют два семейства ляпуновских периодических движений, в которые вырождается семейство двумерных "усатых" торов. Задачи об устойчивости в линейном приближении треугольных точек в ограниченной и неограниченной постановках эквивалентны друг другу, отсюда выводится устойчивость треугольных эллиптических решений неограниченной задачи всюду в области Дэнби, построенной им для ограниченной задачи. Учет малой ненулевой массы одного из тел может привести к сходу двух остальных тел с невозмущенной круговой орбиты; такой эффект отсутствует в ограниченной задаче.

1. Переменные задачи. Функция Рауса. Неограниченная задача трех тел – задача о движении механической системы, состоящей из трех материальных точек $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ с массами M_0, M_1, M_2, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, имеет более чем 300-летнюю историю и введена в рассмотрение Ньютоном. Ниже задача трех тел исследуется для закона взаимодействия, когда сила F_{ij} притяжения точек $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j$ пропорциональна произвольной степени n ($n \neq -1$) взаимного расстояния r_{ij}

$$F_{ij} = fM_iM_jr_{ij}^n \quad (i,j = 0,1,2;\ i \neq j) \tag{1.1}$$

где f – некоторая постоянная. Такая постановка задачи восходит к Лапласу [1], Раусу [2] и Ляпунову [3] и имеет приложения не только в небесной механике, но и в звездной динамике. Ньютоновскому взаимодействию отвечает значение $n = -2$.

Движение точек $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ отнесем к системе координат с началом в точке $\mathbf{P}_0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Тогда абсолютная скорость точки $\mathbf{P}_0$ равна

$$\mathbf{v}_0 = -(m_1\mathbf{v}_{1r} + m_2\mathbf{v}_{2r}), \quad m_i = M_i / M \quad (i = 0,1,2), \quad M = M_0 + M_1 + M_2 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}_{1r}$, $\mathbf{v}_{2r}$ – относительные скорости точек $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ соответственно. Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии T, получим

$$2TM^{-1} = \sum_{i=1}^{2} m_i(1-m_i)\mathbf{v}_{ir}^2 - 2m_1m_2\mathbf{v}_{1r}\mathbf{v}_{2r} \tag{1.3}$$

или в полярных координатах r_i, θ_i ($i = 1, 2$)

$$2TM^{-1} = m_1(1-m_1)(r_1^{\cdot 2} + r_1^2\theta_1^{\cdot 2}) + m_2(1-m_2)(r_2^{\cdot 2} + r_2^2\theta_2^{\cdot 2}) -$$

$$-2m_1m_2\{[r_1^{\cdot}r_2^{\cdot} + r_1r_2\theta_1^{\cdot}\theta_2^{\cdot}]\cos(\theta_2-\theta_1) + (r_1r_2^{\cdot}\theta_1^{\cdot} - r_2r_1^{\cdot}\theta_2^{\cdot})\sin(\theta_2-\theta_1)\}$$

Далее, вводя новые безразмерные параметры $\mu_{i+j} = m_im_j$ ($i, j = 0, 1, 2$; $i \neq j$) и учитывая равенство $\theta_2 = \Phi + \psi$ ($\Phi = \theta_1$), имеем

$$2TM^{-1} = (\mu_1+\mu_3)(r_1^{\cdot 2} + r_1^2\Phi^{\cdot 2}) + (\mu_2+\mu_3)[r_2^{\cdot 2} + r_2^2(\psi^{\cdot}+\Phi^{\cdot})^2] -$$

$$-2\mu_3\{[r_1^{\cdot}r_2^{\cdot} + r_1r_2\Phi^{\cdot}(\psi^{\cdot}+\Phi^{\cdot})]\cos\psi + [r_1r_2^{\cdot}\Phi^{\cdot} - r_2r_1^{\cdot}(\psi^{\cdot}+\Phi^{\cdot})]\sin\psi\}$$

Нетрудно заметить, что переменная Φ является циклической, что отвечает интегралу площадей. Проведем процедуру игнорирования циклической координаты и сформируем функцию Рауса задачи. Получим

$$\beta = M^{-1}\partial T / \partial\Phi^{\cdot} = [\mu_1 + \mu_2e^{2y} + \mu_3(1+e^{2y} - 2e^y\cos\psi)]r_1^2\Phi^{\cdot} +$$

$$+[(\mu_2+\mu_3)e^{2y} - \mu_3e^y\cos\psi]r_1^2\psi^{\cdot} - \mu_3e^yr_1^2\sin\psi^{\cdot}y^{\cdot}$$

$$2R = [\mu_1+\mu_3+(\mu_2+\mu_3)e^{2y} - 2\mu_3e^y]r_1^{\cdot 2} + (\mu_2+\mu_3)e^{2y}[r_1^2(y^{\cdot 2}+\psi^{\cdot 2}) + 2r_1r_1^{\cdot}y^{\cdot}] -$$

$$-2\mu_3e^y[r_1r_1^{\cdot}y^{\cdot}\cos\psi - r_1r_1^{\cdot}\psi^{\cdot}\sin\psi] - (\mu_1r_1^2 + \mu_2r_2^2 + \mu_3r_3^2)\Phi^{\cdot 2} + U_*$$

$$U_* = \frac{U}{M}, \quad U = -\frac{f}{n+1}\{M_0M_1r_1^{n+1} + M_0M_2r_2^{n+1} + M_1M_2r_3^{n+1}\}, \quad y = \ln\frac{r_2}{r_1}$$

где r_3 – расстояние между точками $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, а U – силовая функция задачи.

Дальнейшие вычисления связаны с введением вместо расстояния r_1 новой переменной r

$$2r^2 = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \mu_3 r_3^2 = \frac{M_0 M_1 r_1^2 + M_0 M_1 r_2^2 + M_1 M_2 r_3^2}{(M_0 + M_1 + M_2)^2}$$

имеющей смысл квадратного корня из половины полярного момента инерции, деленного на массу всей системы. Данный выбор определяется следующим обстоятельством. Как известно [4, 5], в небесной механике имеет место фундаментальное соотношение Лагранжа–Якоби – дифференциальное уравнение для полярного момента инерции. Это уравнение в дифференциальной форме выражает закон сохранения полной механической энергии и является предметом многочисленных исследований [6–11]. При выборе r, y, ψ в качестве независимых переменных одним из уравнений движения будет фактически уравнение Лагранжа–Якоби, а два других уравнения замыкают систему дифференциальных уравнений, описывающих задачу трех тел.

Опуская весьма громоздкие промежуточные вычисления, выпишем окончательное выражение для функции Рауса

$$R = r^{\cdot 2} + r^2 F_2 + F_1 - \frac{\beta^2}{4r^2} + r^{n+1} F_0 \quad (n \neq -1) \tag{1.4}$$

$$F_2 = \frac{\mu}{S^2}(y^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}) \quad (\mu = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3)$$

$$F_1 = -\frac{\beta}{S}[\mu_3(\psi^{\cdot} \cos\psi + y^{\cdot} \sin\psi) - (\mu_2 + \mu_3)e^{y}\psi^{\cdot}]$$

$$F_0 = -\frac{fM}{n+1}\left(\frac{2}{S}\right)^{(n+1)/2} \{\mu_1 e^{-(n+1)y/2} + \mu_2 e^{(n+1)y/2} + \mu_3(e^{y} + e^{-y} - 2\cos\psi)^{(n+1)/2}\}$$

$$S = \mu_1 e^{-y} + \mu_2 e^{y} + \mu_3(e^{y} + e^{-y} - 2\cos\psi)$$

Теперь, зная функцию Рауса, можно получить гамильтониан задачи

$$H = \frac{p_r^2}{4} + \frac{S^2}{4\mu r^2}[(p_\psi - b_\psi)^2 + (p_y - b_y)^2] + \frac{\beta^2}{4r^2} - r^{n+1} F_0 \tag{1.5}$$

$$b_\psi = -\frac{\beta}{S}[\mu_3 \cos\psi - (\mu_2 + \mu_3)e^{y}], \quad b_y = -\frac{\beta}{S}\mu_3 \sin\psi$$

где p_r, p_ψ, p_y – импульсы, отвечающие переменным r, ψ, y соответственно.

Отличительные особенности данного описания задачи заключаются в следующем. Новыми параметрами задачи являются безразмерные произведения μ_{ij} масс тел $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_j$, и эти параметры отражают взаимодействие тел. Уравнение для переменной r

$$2r^{\cdot\cdot} = 2rF_2 + \frac{\beta^2}{2r^3} + (n+1)r^n F_0 \tag{1.6}$$

фактически совпадает с уравнением Лагранжа–Якоби. И наконец, задача описывается уравнениями Рауса или Гамильтона, которые в то же время являются обратимыми. Так, в случае уравнений Рауса неподвижное множество совпадает с гиперплоскостью $\mathbf{M} = \{r, y, \psi, r^{\cdot}, y^{\cdot}, \psi^{\cdot}\colon\ \psi = 0(\mathrm{mod}\,\pi),\ r^{\cdot} = 0,\ y^{\cdot} = 0\}$, а в случае уравнений Гамильтона – с $\mathbf{M}_1 = \{r, y, \psi, p_r, p_y, p_\psi\colon\ \psi = 0(\mathrm{mod}\,\pi),\ p_r = 0,\ p_y = 0\}$.

Отметим также тот примечательный факт, что квадратичная от скоростей часть функции Рауса (1.4) уже фактически приведена к "изометрическим" ([12], с. 539) координатам.

2. Некоторые следствия из интеграла энергии. Система уравнений движения с функцией Рауса (1.4) допускает интеграл энергии

$$r'^2 + r^2 F_2 + \frac{\beta^2}{4r^2} - r^{n+1} F_0 = h \quad (h = \mathrm{const}) \tag{2.1}$$

Из вида функции $F_0(y, \psi)$ следует, что $F_0(y, \psi)$ принимает положительные (отрицательные) значения при $n < -1$ ($n > -1$), причем она неограничена при $n < -1$ и стремится к $+\infty$ при $y \to \pm\infty$. При $n > -1$ функция $F_0(y, \psi)$ ограничена.

Рассмотрим функцию

$$g(p,q) = P^{-(n+1)/2} Q$$

$$P = \mu_1 + \mu_2 p + \mu_3 q, \quad Q = \mu_1 + \mu_2 p^{(n+1)/2} + \mu_3 q^{(n+1)/2}$$

которая совпадает с F_0 с точностью до постоянного множителя, если положить

$$p = e^{2y}, \quad q = 1 + e^{2y} - 2e^y \cos\psi$$

В области $p > 0$, $q \geqslant 0$ эта функция имеет единственную стационарную точку $p = q = 1$, так как функция $P(p, q) > 0$. Значит, функция F_0, помимо стационарных $y = 0$, $\psi = \pm\pi/3$ (лагранжевы треугольные решения), может иметь только такие стационарные точки, для которых

$$\partial q/\partial\psi = 2e^y \sin\psi = 0$$

т.е. коллинеарные решения.

Выясним характер экстремума функции $F(p, q)$ в точке $p = q = 1$. Вычисления показывают, что при $n^2 > 1$ функция $g(p, q)$ имеет при $p = q = 1$ глобальный минимум, равный $g^\circ = \nu^{(1-n)/2}$, $\nu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$; верхний индекс $^\circ$ означает, что функции вычислены в стационарной точке $p = q = 1$. Отсюда следует, что значения функции F_0 в коллинеарных стационарных точках при $n < 1$ ($n > 1$) больше (меньше), чем значение в треугольных лагранжевых точках.

Перейдем к выводам.

Теорема 1. При $n > 1$ треугольные лагранжевы решения неограниченной задачи трех тел устойчивы вековым образом при любых значениях масс.

Замечание. Существование треугольных решений для ньютоновского закона впервые установил Лагранж [13]. Лаплас [1] обобщил этот результат на случай произвольного n.

Доказательство теоремы 1 следует из положительной определенности функции $g(p, q)$ в окрестности стационарной точки $p = q = 1$, а также из интеграла энергии (2.1). Здесь используется теорема Рауса [14] с дополнением Ляпунова [15].

Треугольные лагранжевы решения находятся из условия стационарности функции R_0. Для этого решения

$$R_0^\circ = \frac{n-1}{n+1}\frac{\beta^2}{4r_0^2}, \quad r_0 = r^\circ = \left[\frac{\beta^2}{4fM}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{(n-1)/2}\right]^{1/(n+3)}$$

В окрестности стационарной точки

$$R_0 - R_0^\circ = -\frac{\beta^2}{2r_0^4}(n+3)\delta r^2 -$$

$$-\frac{\beta^2}{2r_0^2}\frac{(n-1)\mu_3}{\nu}\left\{\left[1-\frac{3}{4}(\mu_1+\mu_2)\right]\delta\psi^2+2\sqrt{3}(\mu_1-\mu_2)y\delta\psi+\frac{3}{4}(\mu_1+\mu_2)y^2\right\}+\ldots,$$

$$\delta r = r - r^\circ, \quad \delta\psi = \psi - \pi/3$$

Отсюда видно, что при $n < -3$ число отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре равно трем и, согласно известной теореме Кельвина – Четаева [16], треугольные лагранжевы решения неустойчивы. При $-3 < n < 1$ степень неустойчивости равна двум, и возможна гироскопическая стабилизация, условия которой получены Гашо [17], Раусом [2] и Жуковским [18].

Теорема 1 является следствием достижения функцией $-R_0(r, y, \psi)$ локального минимума в точке $r = r^\circ$, $y = 0$, $\psi = \pi/3$ при $n > 1$. Из глобальности минимума $p = q = 1$ для функции $g(p, q)$, а также вида функции R_0 следует, что точка $r = r^\circ$, $y = 0$, $\psi = \pi/3$ – точка глобального минимума функции $-R_0$ при $n > 1$. Отсюда выводим невозможность столкновений тел, если $h < h^*$ (некоторого предела, определяемого ниже). Невозможность тройного столкновения при $n > -1$ следует из интеграла энергии (2.1). При двойном столкновении $y \to \pm\infty$ или $y \to \infty$, $\psi \to 0$. В этих случаях функция g не превышает одного из чисел

$$(\mu_2+\mu_3)^{(n-1)/2}, \quad (\mu_1+\mu_3)^{(n-1)/2}, \quad (\mu_1+\mu_2)^{(n-1)/2}$$

Обозначим минимальное из этих чисел через a. Из интеграла энергии имеем

$$-F_0 \leqslant \left(h-\frac{\beta^2}{4r^2}\right)r^{-(n+1)}$$

Поэтому при

$$h-\frac{\beta^2}{4r^2}<\frac{b}{n+1}r^{n+1}, \quad b = fM2^{(n+1)/2}a$$

получим $-F_0 < b/(n + 1)$, и двойное столкновение невозможно. А функция $\beta^2/(4r^2) + br^{n+1}$ всегда превосходит значение

$$h^* = \frac{1}{2}\frac{n+3}{n+1}b\left(\frac{\beta^2}{2b}\right)^{(n+1)/(n+3)}$$

Теорема 2. При $n > -1$ движение в неограниченной задаче трех тел устойчиво по Лагранжу и происходит без тройных столкновений. В случае $n > 1$ движения с постоянной энергией $h < h^*$ происходят без двойных и тройных столкновений.

Пусть теперь $-3 < n < -1$, а постоянная энергии $h < 0$. Из интеграла энергии следует, что

$$F_0(y,\psi) \geqslant G(r) = \frac{\beta^2}{4}r^{-(n+1)} - hr^{-(n+3)} \tag{2.2}$$

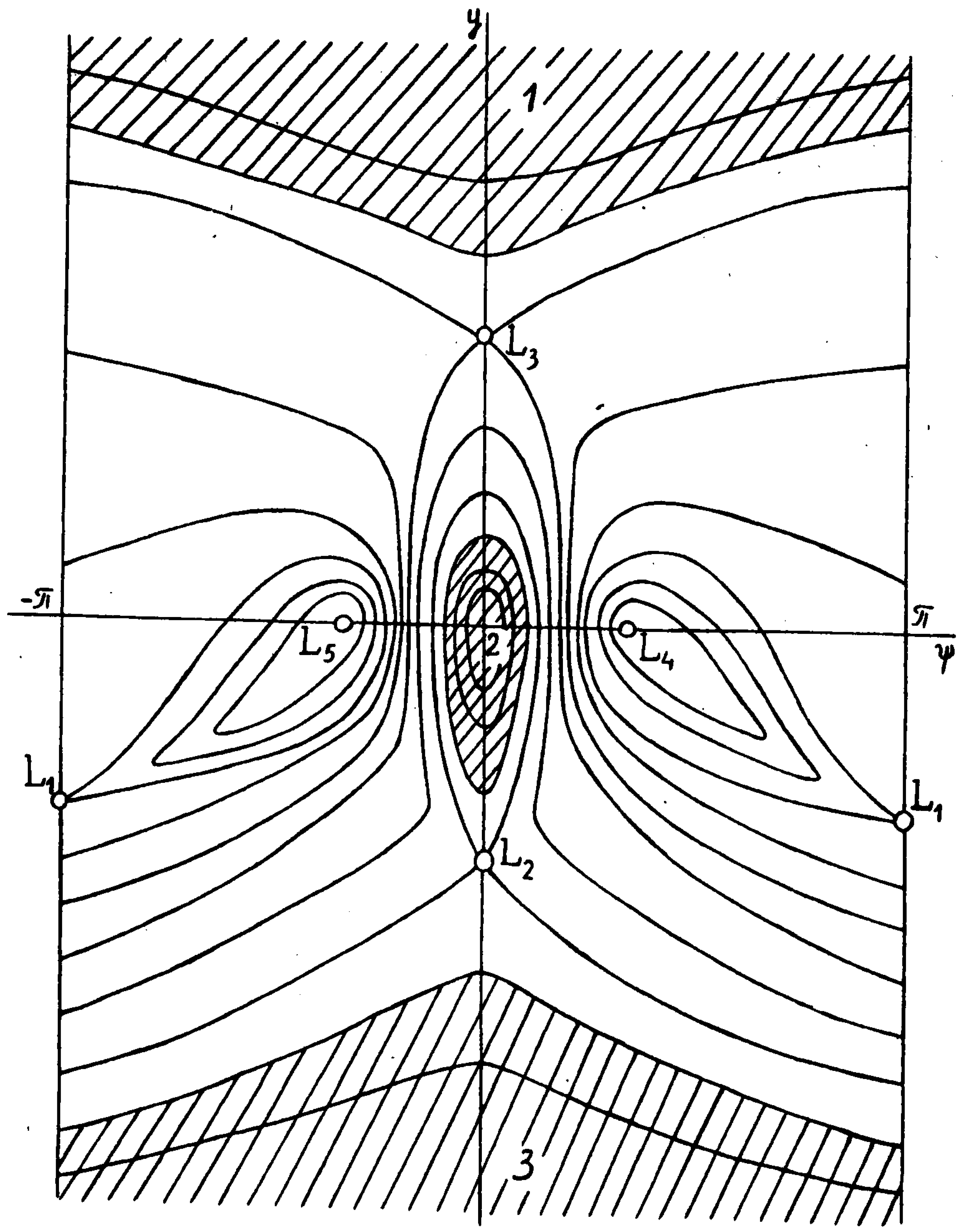
В рассматриваемом интервале изменения n функция $G(r)$ принимает минимальное значение, равное

$$\chi = -\frac{2h}{n+3}\left[\frac{\beta^2}{4h}\frac{n+3}{n+1}\right]^{-(n+1)/2} \qquad \text{при} \quad r^2 = \frac{\beta^2}{2h}\frac{n+1}{n+3}$$

причем для ньютоновского взаимодействия имеем $\chi^2 = -h\beta^2$.

Неравенство

$$F_0(y, \psi) \geqslant \chi \tag{2.3}$$



Фиг. 2

известно [19] в небесной механике в случае $n = -2$ как неравенство Голубева и служит для решения вопроса об устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел.

Функция F_0 имеет глобальный минимум в точках $\mathbf{L}_{4,5}(0, \pm\pi/3)$, а также три седловые коллинеарные стационарные точки $\mathbf{L}_j$ ($j = 1, 2, 3$). Доказательство наличия только трех коллинеарных точек, характер экстремума F_0 в этих точках и сравнение значений F_0 в этих точках представляет собой весьма громоздкую задачу и здесь опущено. Укажем только, что оно основано на исследовании свойств функции $S(\xi) = \partial g/\partial\xi$ ($\xi = e^y$, $\sin\psi = 0$), а также на определении знака $\partial^2 g/\partial\psi^2$ в точках, где $S(\xi) = 0$. При этом учитывается, что в коллинеарных точках имеем равную нулю смешанную производную от функции $g(\xi, \psi)$.

В общем случае $M_0 > M_1 > M_2$ имеем

$$F_0(\mathbf{L}_2) > F_0(\mathbf{L}_3) > F_0(\mathbf{L}_1) > F_0(\mathbf{L}_4) = F_0(\mathbf{L}_5)$$

и линии уровня функции F_0 приведены на фиг. 2. Выберем в качестве параметра задачи параметр χ. Тогда при $\chi > F_0(\mathbf{L}_2)$ движение будет происходить в заштрихованных областях, и имеем устойчивость по Хиллу двух тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ (область 1) или $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_2$ (область 3), или $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ (область 2). При $F_0(\mathbf{L}_3) < \chi < F_0(\mathbf{L}_2)$ имеем устойчивость пары тел – $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$, при $\chi < F_0(\mathbf{L}_3)$ устойчивость по Хиллу ни одной из пар тел гарантировать уже нельзя.

Рассматривая теперь частные случаи, когда среди тел $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ есть тела с одинаковыми массами, можно распространить на диапазон $-3 < n < -1$ все выводы, полученные [19–22] для случая $n = -2$. Качественная сторона данного вопроса вполне ясна, если иметь в виду работы [19–22]. Соответствующие вычисления здесь опущены.

Остановимся еще на одном вопросе. Из (2.2) следует, что для диапазона $-3 < n < -1$ при $r \to \infty$ или $r \to 0$ имеем $F_0 \to \infty$. В этом случае одно тело ($\mathbf{P}_2$) всегда остается относительно удаленным от пары тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$. Отсюда немедленно следует, например, теорема Слудского (см., например, [4]) о невозможности тройных столкновений при $\beta^2 \neq 0$.

3. Обобщение одной теоремы Биркгофа. Сравнение дифференциального уравнения (1.6) и выражения (2.1) для интеграла энергии немедленно приводит к важному дифференциальному равенству

$$dF_* / dr = (n+3)r^{-n}F_2, \quad F_* = F_0 - r^{1-n}F_2 \tag{3.1}$$

При каждом r функцию $-F_*$ можно трактовать как энергию, определенную только конфигурацией треугольника $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, а не его размерами. Из (3.1) следует, что при $n > -3$ функция возрастает и убывает вместе с r, а при $n = -3$ система имеет дополнительный первый интеграл $F_* = \text{const}$. Значит, при $n > -3$, в том числе и при ньютоновском взаимодействии, закон сохранения энергии реализуется таким образом, что при росте полярного момента инерции энергия, определяемая только конфигурацией треугольника, убывает, если конфигурация при этом меняется; происходит перекачка энергии. Отметим также, что для ньютоновского взаимодействия неравенство $dF_*/dr \geqslant 0$ впервые получено Сундманом [8] и является основным при обосновании сходимости построенных им рядов.

Уравнение (1.6) можно также записать для полярного момента инерции $J = 2r^2$. Если при этом учесть интеграл энергии (2.1), то получим

$$J^{\cdot\cdot} = 2(n+3)U_* + 2h \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что при $n \leqslant -3$ каждое движение с неположительной энергией ($h \leqslant 0$) включает в себя тройное столкновение. В этом случае нет движений, на которых $r \to \infty$. Действительно, из (2.1) при $r \to \infty$ имеем $F_* \to \infty$, что невозможно в силу (3.1). При $n > -1$ энергия, как это следует из интеграла (2.1), всегда положительна; этот случай рассмотрен в разд. 2.

Результат Биркгофа [6] справедлив для более общего случая взаимодействия (1.1), если только показатель n принадлежит интервалу $-3 < n < -1$. Доказательство этого факта проводится [23] почти дословным повторением рассуждений, проведенных [6] для случая $n = -2$, и основано на неравенстве

$$\rho^{\cdot} > \sqrt{-\frac{fM}{(n+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{(n+1)/2}} \tag{3.3}$$

полученном впервые Биркгофом для случая $n = -2$. Здесь ρ – расстояние от тела $\mathbf{P}_2$ до центра масс тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ (фиг. 1).

Из интеграла энергии (2.1) следует, что $r^{n+1}F_0 + h \geqslant 0$. Поэтому наименьшее r_1 из расстояний r_1, r_2, r_3 не больше некоторого предела

$$r_1 \leqslant \left[\frac{fM\nu}{(n+1)h}\right]^{-1/(n+1)} = r_*$$

Если $\rho > 2r_*$, то $r_2 \geqslant \rho - r_1 > \rho/2$, $r_3 \geqslant \rho - r_1 > \rho/2$ и одно и то же расстояние r_1 будет наименьшим (фиг. 1). При одновременном выполнении условия (3.3) и неравенства $\rho > 2r_*$ оба эти условия будут выполняться все время, и это доказывает факт неограниченного возрастания ρ при $t \to +\infty$. Если $\rho \to +\infty$, то также $r \to +\infty$, ибо

$$2r^2 = \varkappa r_1^2 + (\mu_2 + \mu_3)\rho^2, \quad \varkappa = \frac{\mu_1}{m_0 + m_1}, \quad \lim_{\rho \to +\infty} \frac{2r^2}{\rho} = \mu_2 + \mu_3 \neq 0$$

Покажем теперь, что при $r \leqslant d$ – некоторого достаточно малого числа имеем $r \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Во-первых, из интеграла энергии следует, что $\varkappa \dot{r}_1^2 \leqslant 2U_*$. Значит,

$$\varkappa r_1^2 \dot{r}_1^2 \leqslant -\frac{2fM\nu}{n+1} r_1^{n+3} \leqslant -\frac{2fM\nu}{n+1} r_*^{n+3} \quad (n+1<0)$$

Кроме того, имеем соотношение

$$2r\dot{r} = \varkappa r_1 \dot{r}_1 + (\mu_2 + \mu_3)\rho\dot{\rho}$$

Поэтому при выполнении неравенства

$$2r\dot{r} > \varkappa\sqrt{-\frac{2fM\nu}{(n+1)\varkappa}} r_*^{(n+3)/2} + (\mu_2 + \mu_3)\sqrt{-\frac{fM}{(n+1)2^n}} \rho^{(n+3)/2} \tag{3.4}$$

имеем также неравенство (3.3). Правую часть неравенства (3.4) можно записать в симметричном относительно μ_1, μ_2, μ_3 виде, зависящем только от r. Имеем

$$2r^2 \geqslant (\mu_2 + \mu_3)\rho^2, \quad \rho^{(n+3)/2} \leqslant (2r^2)^{(n+3)/4}(\mu_2 + \mu_3)^{-(n+3)/4}, \quad \mu_2 + \mu_3 \leqslant \nu$$

Поэтому неравенство (3.4) заведомо выполнено при

$$2r\dot{r} \geqslant \sqrt{-\frac{2fM\nu^2}{n+1}} r_*^{(n+3)/2} + \sqrt{-\frac{fM}{n+1}} 2^{(3-n)/4} \nu^{(1-n)/4} r^{(n+3)/2}$$

Далее при $r_1 < r_*$ получим

$$(\mu_2 + \mu_3)\rho^2 = 2r^2 - \varkappa r_1^2 > 2r^2 - \varkappa r_*^2$$

Поэтому $\rho > 2r_*$, если

$$2r^2 \geqslant 5\nu r_*^2 > [\varkappa + 4(\mu_2 + \mu_3)] r_*^2$$

Таким образом, если в некоторый момент времени система попадет в область

$$r \geqslant \sqrt{\frac{5\nu}{2}} r_* \qquad r\dot{r} \geqslant \sqrt{-h}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}} + \left(\frac{r}{r_*}\right)^{(n+3)/2} (2\nu)^{-(n+1)/4}\right] \tag{3.5}$$

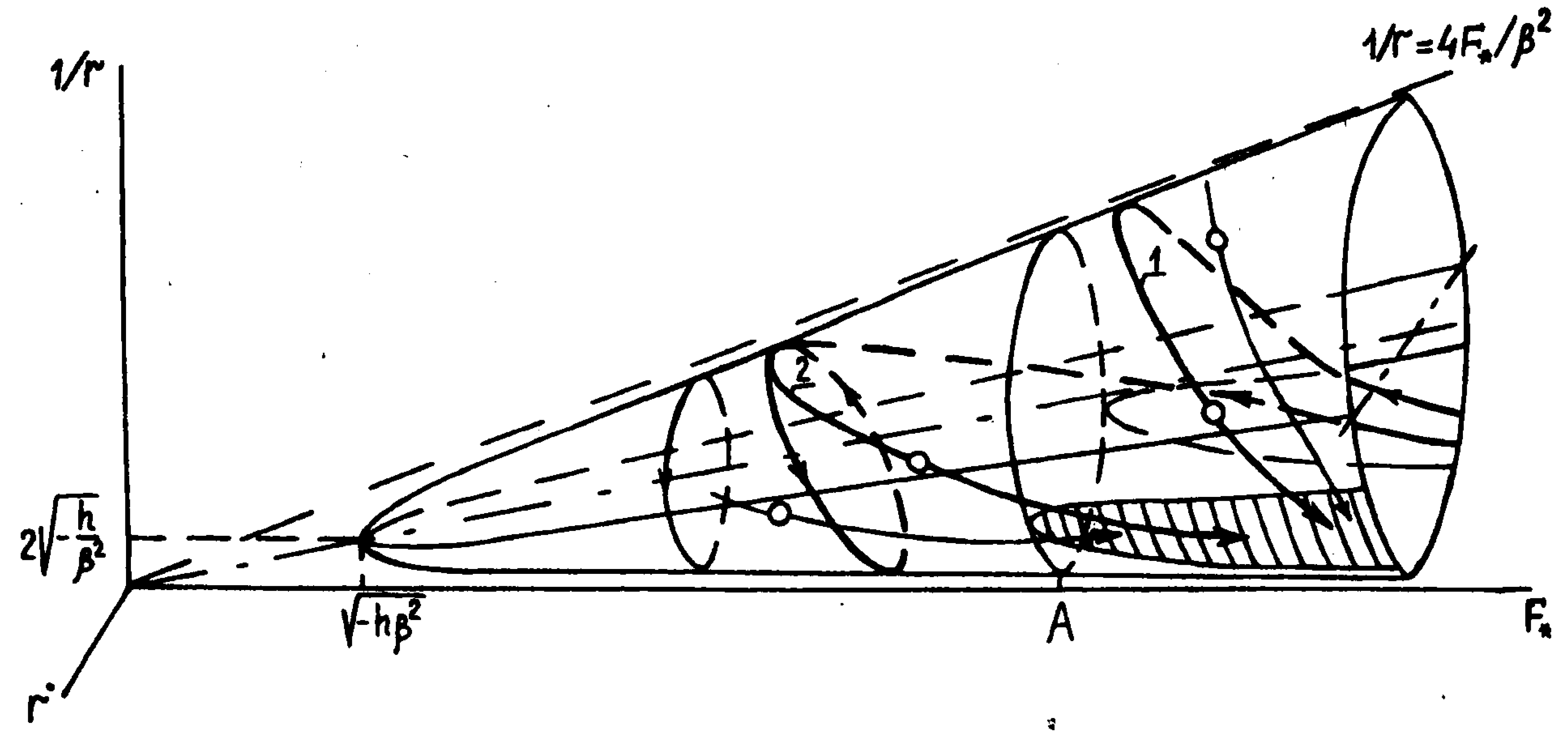
то она останется в ней, причем $r \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Перепишем теперь интеграл энергии в виде

$$F_* = \frac{\beta^2}{4} r^{-(n+3)} + (\dot{r}^2 - h) r^{-(n+1)} \tag{3.6}$$

Наименьшее значение F_*, принадлежащее границе области (3.5), определяется выражением

$$A = \left\{\frac{\beta^2}{4} - \frac{5\nu h}{2}\left(\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}} + (2\nu)^{-(n+1)/4}\right]^2 + 1\right) r_*^2\right\}\left(\sqrt{\frac{5\nu}{2}} r_*\right)^{-(n+3)} \tag{3.7}$$



Фиг. 3

Из соотношения (3.1) следует, что, если в некоторый момент времени система находилась в одной из областей

$$r \leqslant d \tag{3.8}$$

$$d \leqslant r \leqslant r_{**}, \quad r^{\cdot} \geqslant 0, \quad F_* \geqslant A \tag{3.9}$$

то через некоторое время она обязательно попадет в область (3.5) и $r \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В соответствии с (3.5), (3.6) значения d и r_{**} определяются из соотношений

$$\frac{\beta^2}{4} d^{-(n+3)} - h d^{-(n+1)} = A$$

$$\frac{\beta^2}{4} r_{**}^{-(n+3)} + (r_{**}^{\cdot 2} - h) r_{**}^{-(n+1)} = A, \quad r_{**} r_{**}^{\cdot} = \sqrt{-h}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2}} + \left(\frac{r_{**}}{r_*}\right)^{(n+3)/2} (2\nu)^{-(n+1)/4}\right]$$

где d – наименьший, а r_{**} – наибольший корень соответствующих уравнений.

Теорема 3. Если в некоторый момент времени система попадет в одну из областей (3.5), (3.8), (3.9), то в дальнейшем движении одно из тел уходит на бесконечность, а два других образуют устойчивую по Хиллу систему из двух тел.

Отметим, что в силу наличия областей (3.5) и (3.9) уход одного из тел на бесконечность возможен не только из положения, близкого к тройному соударению. Это подтверждают численные исследования [9, 10].

Условие (3.8) является достаточным для ухода одного из тел на бесконечность. Это возможно и в том случае, когда система тел принадлежит неподвижному множеству **M**. На таких движениях тело $\mathbf{P}_2$ приходит из бесконечности к системе двух тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$, образует с этими телами в некоторый момент времени прямолинейную конфигурацию, затем покидает систему из двух тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$, удаляясь на бесконечность.

Наглядную геометрическую интерпретацию приведенных результатов можно получить в трехмерном пространстве ($r^{\cdot}$, $1/r$, F_*). Здесь соотношение (3.6) задает при каждом (β, h) поверхность интеграла энергии (фиг. 3). Соотношение (3.1) означает, что на видимой части поверхности ($r^{\cdot} > 0$) движение происходит вправо от плоскости

$F_* = A$. Пересечение этой плоскости с кривой $r^{\cdot} = 0$ определяет d, а область (3.5) заштрихована. Понятно, что в (3.5) можно попасть, вообще говоря, из любой точки изображенной поверхности. Кривая Биркгофа обозначена цифрой 1, кривая Себехея – цифрой 2.

Стационарным решениям отвечает крайняя левая точка поверхности, периодическим решениям с неизменяемой конфигурацией треугольника – кривые, образуемые пересечением изображенной поверхности плоскостью $F_* = \mathrm{const}$.

Отметим, что фиг. 3 позволяет очень просто получить результаты [6–11], относящиеся к поведению переменной r между двумя соседними экстремальными значениями.

4. Уравнения движения. Уравнения, определяющие изменение конфигурации треугольника, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{\partial F_2}{\partial \xi^{\cdot}}+\frac{\partial F_1}{\partial \xi^{\cdot}}\right)=r^2\frac{\partial F_2}{\partial \xi}+\frac{\partial F_1}{\partial \xi}+r^{n+1}\frac{\partial F_0}{\partial \xi}$$

где через ξ обозначены переменные y и ψ. Выберем в качестве новой переменной угол θ, определяемый соотношением

$$2r^2 d\theta/dt = \beta$$

Тогда получим

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\mu}{S^2}\psi' - \frac{\mu_3\cos\psi-(\mu_2+\mu_3)e^y}{S}\right]=\frac{\mu}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial\psi}+\frac{\partial F_1^*}{\partial\psi}+\frac{r^{n+3}}{\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial\psi}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\mu}{S^2}y' - \frac{\mu_3\sin\psi}{S}\right]=\frac{\mu}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial y}+\frac{\partial F_1^*}{\partial y}+\frac{r^{n+1}}{\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial y}$$

где теперь

$$F_2^* = \frac{1}{2}(\psi'^2+y'^2)$$

$$F_1^* = -\frac{1}{S}[\mu_3(\psi'\cos\psi+y'\sin\psi)-(\mu_2+\mu_3)e^y\psi']$$

$$F_0^* = -\frac{fM}{n+1}[\mu_1 e^{-(n+1)y/2}+\mu_2 e^{(n+1)y/2}+\mu_3(e^y+e^{-y}-2\cos\psi)^{(n+1)/2}]S^{-(n+1)/2}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по θ, а через r обозначена величина $\sqrt{2r}$.

Далее после вычисления производных и необходимых преобразований имеем систему

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\psi'}{S^2}\right)=-\frac{2y'}{S^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial\psi}+\frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial\psi}$$
$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{y'}{S^2}\right)=\frac{2\psi'}{S^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial y}+\frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial y} \qquad (4.1)$$

Наконец, добавляя к системе (4.1) уравнение для переменной r

$$r^{\cdot\cdot} = rF_2+\frac{\beta^2}{r^3}+(n+1)r^n F_0^* \qquad (4.2)$$

получим компактную систему дифференциальных уравнений, описывающих плоскую неограниченную задачу трех тел.

Вычислим производные от функции F_0^*

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial \psi} = -fM\mu_3 P^{-(n+3)/2}(Pq^{(n-1)/2} - Q)e^y \sin\psi$$

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial y} = -fMP^{-(n+3)/2}[\mu_2(Pp^{(n-1)/2} - Q)e^y + \mu_3(Pq^{(n-1)/2} - Q)(e^y - \cos\psi)]e^y$$

При $m_2 \to 0$ имеем $\mu_2/\mu \to 1/m_1$, $\mu_3/\mu \to 1/m_0$, и в этом случае из уравнений (4.1), (4.2) вытекает вариант задачи, в котором тело $\mathbf{P}_2$ имеет массу, пренебрежимо малую по сравнению с массами тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$. Уравнения движения предельной задачи имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\theta}(e^{2y}\psi') = -2e^{2y}y' - \frac{fMr_1^{n+3}}{\beta_*^2}m_1[(1+e^{2y}-2e^y\cos\psi)^{(n-1)/2}-1](e^y-\cos\psi)e^y \\
\frac{d}{d\theta}(e^{2y}y') = 2e^{2y}\psi' + e^{2y}(\psi'^2+y'^2) - \frac{fMr_1^{n+3}}{\beta_*^2}\times \\
\times\{m_0(e^{ny}-e^y)e^y + m_1[(1+e^{2y}-2e^y\cos\psi)^{(n-1)/2}-1](e^y-\cos\psi)e^y\} \\
\ddot{r}_1 = \frac{\beta_*^2}{r_1^2} - fMr_1^n, \quad \beta_* = \beta/\mu_1
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Видно, что тело $\mathbf{P}_2$ нулевой массы не оказывает влияния на движение тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ конечной массы. Следовательно, в пределе $m_2 \to 0$ из уравнений (4.1), (4.2) неограниченной задачи трех тел выводятся уравнения (4.3) ограниченной задачи трех тел. Последняя описывается уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_2 = \frac{1}{2}e^{2y}(\psi'^2 + y'^2), \quad L_1 = e^{2y}\psi'$$

$$L_0 = -\frac{fMr_1^{n+3}}{(n+1)\beta_*^2}\left\{m_0\left(p^{(n+1)/2} - \frac{n+1}{2}p\right) + m_1\left(q^{(n+1)/2} - \frac{n+1}{2}q\right)\right\}$$

$$p = e^{2y}, \quad q = 1 + e^{2y} - 2e^y\cos\psi$$

и в случае круговой ограниченной задачи ($r_1 = \text{const}$) имеет интеграл энергии

$$L_2 - L_0 = \text{const}$$

Таким образом, ограниченная задача описывает только изменение конфигурации треугольника $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, но не его размеров.

В ограниченной задаче трех тел исследуется движение точки нулевой массы в поле притяжения двух тел конечной массы, причем тело $\mathbf{P}_2$ нулевой массы не влияет на движение тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$.

Однако малое изменение в движении тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ может существенно влиять на движение тела $\mathbf{P}_2$. Так, переход тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ с круговой на близкую эллиптическую орбиту может привести к параметрическому резонансу и неустойчивости треугольных точек либрации [24]. Если же тело имеет относительно малую, но не равную нулю массу, то тело $\mathbf{P}_2$ влияет на движение тел $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$, и это может привести к новым качественным выводам [25] по сравнению с ограниченной постановкой задачи. И наконец, "почти отделимость" системы (4.1) от уравнения (4.2) должна привести к новым качественным результатам в задаче трех тел, по крайней мере, при малых m_2.

5. Окрестности точек либрации. Стационарным точкам функции $F_0^*(\psi, y)$ отвечают движения системы тел $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ с неизменяемой конфигурацией треугольника. При этом тело $\mathbf{P}_2$ располагается в одной из классических точек либрации $\mathbf{L}_j$, а переменная r изменяется согласно уравнению

$$r^{\cdot\cdot} = \frac{\beta^2}{r^3} + (n+1) r^n F_0^*(\mathbf{L}_j) \tag{5.1}$$

где функция $\overset{*}{F_0}$ вычислена в точке $\mathbf{L}_j$. Это уравнение при любом $n > -3$ имеет периодическое, в частности постоянное, решение.

Составим уравнения в вариациях в окрестности рассматриваемого постоянного решения, отвечающего какой-либо точке $\mathbf{L}_j$. Оказывается, уравнение для переменной r имеет такой же вид, как если бы было составлено для уравнения (5.1)

$$\delta r^{\cdot\cdot} = -\frac{\beta^2}{r^4}(n+3)\delta r \tag{5.2}$$

Отсюда видно, что постоянным решениям отвечают при $n > -3$ пара чисто мнимых корней характеристического уравнения. Вне зависимости от значений других корней система (4.1), (4.2) в окрестности рассматриваемого периодического решения имеет ляпуновское семейство локальных периодических движений. Это и понятно, так как уравнение (5.1), наряду с постоянным решением, имеет близкое к нему периодическое решение. Более того, ляпуновское семейство имеется и в окрестности любого периодического решения с неизменяемой конфигурацией треугольника, и это семейство продолжается глобально до тех пор, пока постоянная интеграла энергии не становится равной нулю.

Обратимся к постоянным коллинеарным точкам либрации. Эти точки являются седловыми для функции $\overset{*}{F_0}$, поэтому уравнения в вариациях для переменных y, ψ, которые легко получить из (4.1), имеют пару чисто мнимых корней и пару корней с ненулевыми действительными частями противоположного знака. Паре чисто мнимых корней отвечает второе семейство ляпуновских периодических движений, окружающих точку либрации (фиг. 4) и симметричных относительно неподвижного множества **M**.

В указанные два ляпуновских семейства периодических движений вырождаются на соответствующих многообразиях двумерные торы. Эти торы – "усатые"; паре корней с ненулевыми действительными частями отвечают два семейства асимптотических к торам при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ движений.

В окрестности треугольных точек либрации уравнения (4.1) приобретают вид

$$\begin{aligned} x'' + 2y' &= u\left[\frac{3}{4}(m_1+m_2)x + \frac{\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)y\right] + \ldots \\ y'' - 2x' &= u\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)x + \left[1 - \frac{3}{4}(m_1+m_2)\right]y\right\} + \ldots \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$x = \psi - \pi/3, \quad u = fM(1-n)\rho^{n+3}/\beta_*^2, \quad \beta_* = \beta/\nu$$

а зависимость ρ от θ задается уравнением

$$\rho^{\cdot\cdot} = \beta_*^2\rho^{-3} - fM\rho^n, \quad \rho^2\frac{d\theta}{dt} = \beta_*, \quad r = \sqrt{\nu}\rho \tag{5.4}$$

Преобразованием Ляпунова [3]

$$X = y + sx, \quad Y = x - sy$$

$$s = \left[\frac{3}{4}(m_1+m_2) - \lambda\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)\right]^{-1}, \quad \lambda^2 - \lambda + \frac{3}{4}\nu = 0$$

система (5.3) приводится к виду

$$X'' - 2Y' = (1-\lambda)uX + \ldots, \quad Y'' + 2X' = \lambda u Y + \ldots \tag{5.5}$$

и в линейном приближении получим линейную обратимую систему. В случае постоянных треугольных решений имеем

$$fM\rho^{n+3} = \beta_*^2, \quad u = (1-n)$$

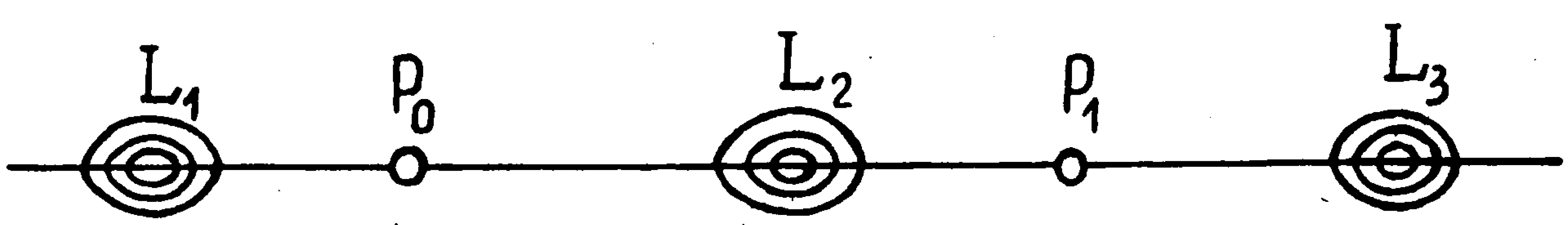
и корни характеристического уравнения таковы:

$$\varkappa^2 = \frac{-(n+3) \pm \sqrt{(n+3)^2 - 3(n-1)^2 \nu}}{2}$$

Поэтому необходимые условия Рауса – Жуковского гироскопической стабилизации имеют вид

$$\nu < \frac{1}{3}\left(\frac{3+n}{1-n}\right)^2 \tag{5.6}$$

При выполнении этих условий окрестность треугольных точек либрации заполнена трехмерными торами, которые могут вырождаться в двумерные торы или в ляпуновские семейства периодических движений. В случае строгого нарушения условия (5.6) окрестность состоит из периодических треугольных решений (ляпуновское семейство, отвечающее постоянной конфигурации) и асимптотических к ним при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ движений.



Фиг. 4

Пусть постоянным треугольным решениям отвечает значение постоянной интеграла энергии, равное h_*. Тогда при малых $h-h_*$ существуют периодические треугольные решения, близкие к постоянным. Период этих движений по θ зависит от величины $h-h_*$ и совпадает с 2π только при $h = h_*$.

Исследуем устойчивость линейной системы (5.5) в этом случае. Функция $u(\theta)$ будет складываться из постоянной $(1-n)$ и периодической по θ части, обращающейся в нуль при $h = h_*$. Поэтому имеем задачу об исследовании квазиавтономной обратимой системы; последняя детально изучена [26].

Пусть условие (5.6) выполнено. Тогда $\varkappa_j = \pm i k_j$ $(k_j > 0, j = 1, 2)$, причем

$$k_{1,2}^2 = \frac{n+3 \pm \sqrt{(n+3)^2 - 3(n-1)^2 \nu}}{2}$$

Согласно [26] при отсутствии параметрического резонанса

$$2k_1 = N, \quad 2k_2 = N, \quad k_1 + k_2 = N, \quad k_1 - k_2 = N \quad (N \in \mathbf{N})$$

характеристические показатели линейной системы при достаточно малом $|h - h_*|$ чисто мнимы. Имеем

$$k_1^2 + k_2^2 = n + 3, \quad 2k_1 k_2 = |n-1|\sqrt{3\nu}$$

Поэтому

$$(k_1 \pm k_2)^2 = n+3 \pm |n-1|\sqrt{3\nu} < 2(n+3)$$

и в случае $-3 < n < -1$ возможны только два двухчастотных резонанса $k_1 \pm k_2 = 1$. Это происходит при $\nu = {}^1/_3(n+2)^2/(n-1)^2$. Причем плюс реализуется при $-3 < n < -2$, минус – при $-2 < n < -1$. Далее имеем

$$(n+3)/2 < k_1^2 < (n+3), \quad 0 < k_2^2 < k_1^2$$

и в рассматриваемом диапазоне изменения n возможны следующие одночастотные резонансы

$$2k_1 = 1 \ (-2{,}75 < n \leqslant -2{,}5), \quad 2k_2 = 1 \ (-2{,}5 \leqslant n < -1) \quad \text{при} \quad \nu = \frac{4n+11}{12(n-1)^2}$$

$$k_1 = 1 \ (-2 < n - 1) \quad \text{при} \quad \nu = \frac{4}{3}\frac{n+2}{(n-1)^2}$$

Следовательно, из полученных ранее результатов [26] выводим.

Теорема 3. Треугольные периодические движения неограниченной задачи трех тел, достаточно близкие к постоянным движениям, устойчивы в линейном приближении, если

$$\nu < \frac{1}{3}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^2; \quad \nu \neq \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^2, \quad \frac{4n+11}{12(n-1)^2}, \quad \frac{4}{3}\frac{(n+2)}{(n-1)^2} \quad (-3 < n < -1)$$

Замечание. Результат, сформулированный в этой теореме, принадлежит Ляпунову [3]. Здесь он выводится как следствие обратимости системы (5.5) и уточнен в смысле исключения резонансных значений ν.

Рассмотрим теперь случай произвольных эксцентриситетов. Уравнение (5.1) при любом $n > -3$ имеет только периодические решения. Это, в частности, означает, что при $n > -3$ уравнение (5.2) имеет чисто мнимые характеристические показатели. Следовательно, при $n > -3$ задача об устойчивости треугольных решений (круговых и эллиптических) решается в линейном приближении системой (5.5), описывающей изменение конфигурации треугольника $P_0P_1P_2$. С другой стороны (разд. 4), изменение конфигурации можно исследовать в рамках ограниченной задачи трех тел.

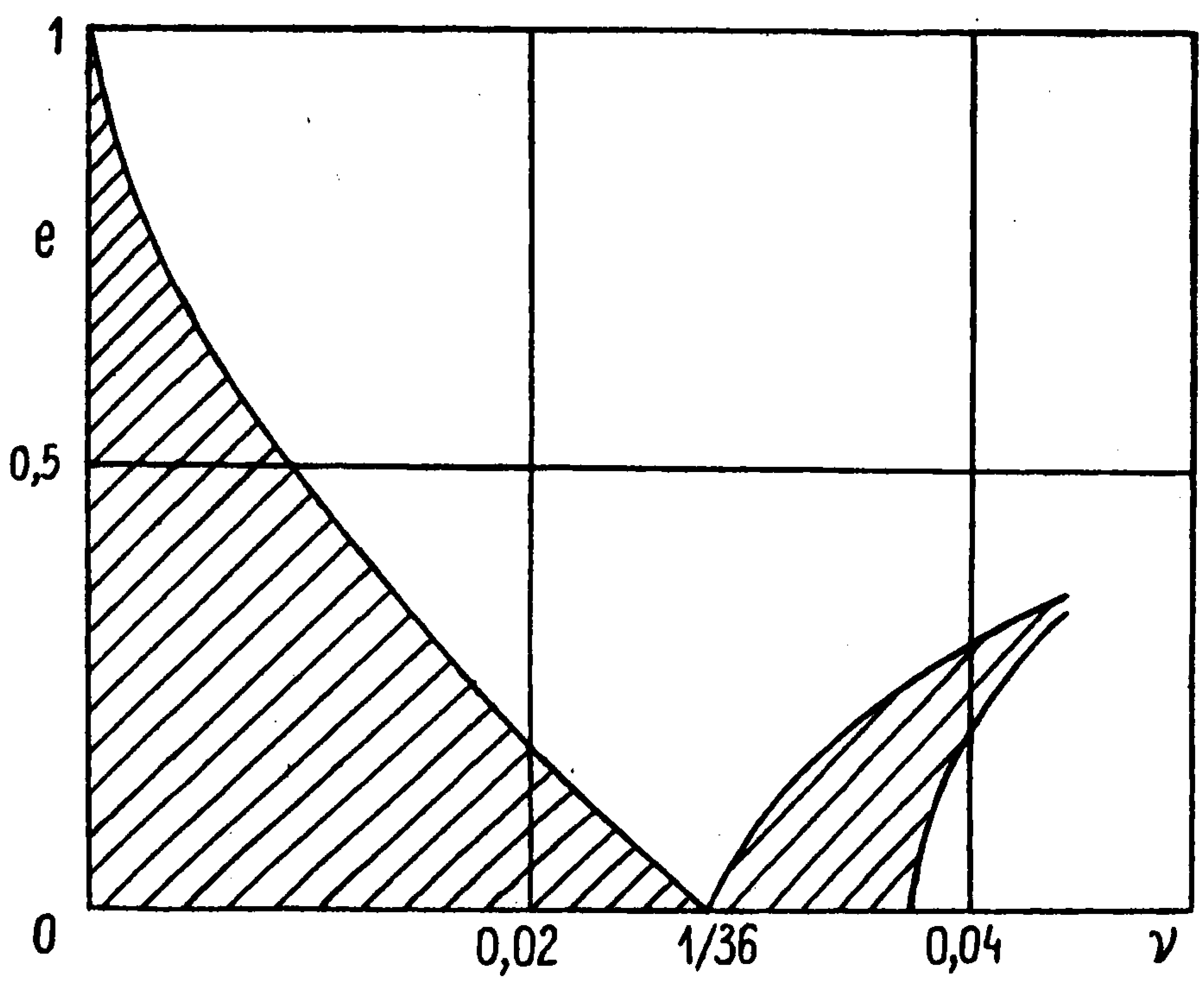
Таким образом, справедлива

Теорема 4. При $n > -3$ задача об устойчивости в линейном приближении треугольных решений задачи трех тел в рамках общей (неограниченной) постановки эквивалентна этой задаче в рамках ограниченной постановки.

Система (5.5) решает вопрос об устойчивости как для неограниченной, так и в частном ее случае – для ограниченной задачи. При этом во всех случаях существенным параметром является ν, который в ограниченной задаче определяется по формуле $\nu = \mu(1-\mu)$, где $\mu = m_1$. В случае ньютоновского взаимодействия ($n = -2$) для ограниченной задачи трех тел область устойчивости определена Дэнби в [27] и задана на плоскости (μ, e). Значит, для общего случая область устойчивости получится из области Дэнби, только заданной на плоскости (ν, e). Эта область изображена на фиг. 5. Резонансные кривые, построенные [24] в области Дэнби, также сохраняются.

Теорема 5. При $n = -2$ и произвольных эксцентриситетах $0 \leqslant e < 1$ устойчивость треугольных лапласовых решений общей (неограниченной) задачи трех тел имеет место всюду в области устойчивости Дэнби, изображенной на плоскости (ν, e), где $\nu = \mu(1-\mu)$, а μ – относительная масса в ограниченной задаче трех тел.

6. О влиянии тела P_2 на движение тел P_0 и P_1. Резонансная неустойчивость. Из уравнений движения (4.1), (4.2) следует, что при малой относительной массе m_2 тела



Фиг. 5

P_2 влияние P_2 на движение системы из двух тел P_0 и P_1 будет слабым. В свою очередь тела P_0 и P_1 в общем случае влияют на движение тела P_2 сильно. Однако это влияние ограничивается коэффициентом r^{n+3} в выражении для силы, и при малом изменении r, казалось бы, должны мало меняться решения уравнений для ψ и y.

Рассмотрим два случая сильного взаимовлияния размера треугольника на его конфигурацию. В первом случае тела P_0 и P_1 переходят с круговой орбиты на близкую к ней эллиптическую орбиту, и этот переход оказывается "роковым" для движения P_2 в окрестности треугольной точки либрации. Во втором случае происходит нелинейное взаимодействие, и не только P_0 и P_1 "сильно" влияют на P_2, но и P_2 "сильно" влияет на движение системы тел P_0 и P_1. Оба случая относятся к резонансным. Ниже, имея в виду качественный вывод, ограничимся случаем ньютоновского взаимодействия ($n = -2$).

Пусть $\nu = 1/36$. Тогда в эллиптической задаче возникает параметрический резонанс $2k_2 = 1$. Вместе с тем, как это следует из (5.2), в круговой задаче частота $k_0 = \sqrt{n+3}$, и при $n = -2$ здесь возникает [28, 29] внутренний резонанс $k_0 = 2k_2$. Как это видно из системы (4.3), резонанс $k_0 = 2k_2$ не приводит к резонансной неустойчивости при $m_2 = 0$, в то же время при резонансе $2k_2 = 1$ треугольные точки либрации ограниченной задачи трех тел являются [24] неустойчивыми.

1°. Рассмотрим задачу об устойчивости лагранжевых решений при параметрическом резонансе $2k_2 = 1$. При $n = -2$ уравнения (5.4) представляют собой уравнения кеплеровского движения точки единичной массы, притягиваемой к началу координат точкой с массой M. В случае движения по эллипсу с большей полуосью a имеем

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \quad u = \frac{3}{1+e\cos\theta}$$

(e – эксцентриситет). Поэтому рассматриваемая задача сводится к исследованию линейной периодической системы

$$X'' - 2Y' = (1-\lambda)uX, \quad Y'' + 2X' = \lambda uY \quad (\lambda^2 - \lambda + 1/48 = 0) \tag{6.1}$$

при малых e.

Разложим функцию $u(\theta)$ в ряд Фурье

$$u = 3(1-e^2)^{-1/2}[1 - e_1\cos\theta + e_1^2\cos 2\theta + \ldots], \quad e_1 = e/(1+\sqrt{1-e^2})$$

Поэтому корни характеристического уравнения усредненной системы таковы:

$$\varkappa_{1,2}^2(e) = \frac{-(4-\bar{u}) \pm \sqrt{(4-\bar{u})^2 - 3\nu\bar{u}^2}}{2}, \quad \bar{u} = 3/\sqrt{1-e^2}$$

и числа $\varkappa(e)$ чисто мнимы при

$$\nu \leqslant (4-\bar{u})^2/(3\bar{u}^2) \tag{6.2}$$

Следовательно, при выполнении условия (6.2) лагранжевы периодические решения устойчивы [26] в линейном приближении, если только нет резонансов второго порядка. Отметим, что в (6.2) заведомо $\nu \leqslant 1/27$.

При малых e в области (6.2) реализуется единственный резонанс второго порядка $2\varkappa_2 = i$. В этом случае

$$\nu = (5\sqrt{1-e^2} - 4)\sqrt{1-e^2}/36$$

и система (6.1) приводится к виду

$$z_1' = \varkappa_1(e)z_1 + \ldots, \quad z_2' = \varkappa_2(e)z_2 + eR(e)\exp(i\theta)\bar{z}_2 + \ldots$$

где z, $\bar{z}$ – комплексно-сопряженные переменные. Если $R(e) \neq 0$, то имеет место неустойчивость, вызванная параметрическим резонансом.

Для определения резонансного коэффициента $R(e)$ выполним замену

$$z_1 = \alpha\bar{u}[(2i+\varkappa_1)p + p' + (\varkappa_1 - 2i)q] + (\varkappa_1^2 - 2i\varkappa_1 - \bar{u}/2)q'$$

$$z_2 = \alpha\bar{u}[(2i+\varkappa_2)p + p' + (\varkappa_2 - 2i)q] + (\varkappa_2^2 - 2i\varkappa_2 - \bar{u}/2)q'$$

$$p = X + iY, \quad q = X - iY, \quad \alpha = 1/2 - \lambda$$

Тогда уравнения (6.1) приобретают вид

$$z_j' = \varkappa_j z_j + \left[\alpha\bar{u}\left(\frac{p}{2} + \alpha q\right) + \left(\varkappa_j^2 - 2i\varkappa_j - \frac{\bar{u}}{2}\right)\left(\frac{q}{2} + \alpha p\right)\right](u - \bar{u}), \quad j = 1,2 \tag{6.3}$$

Здесь в правые части вместо p и q необходимо подставить выражения

$$p = i\alpha\bar{u}(z_1 + z_2) - i\left(\varkappa_1^2 + 2i\varkappa_1 - \frac{\bar{u}}{2}\right)\bar{z}_1 - i\left(\varkappa_2^2 + 2i\varkappa_2 - \frac{\bar{u}}{2}\right)\bar{z}_2 \tag{6.4}$$

$$q = -i\alpha\bar{u}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + i\left(\varkappa_1^2 - 2i\varkappa_1 - \frac{\bar{u}}{2}\right)z_1 + i\left(\varkappa_2^2 - 2i\varkappa_2 - \frac{\bar{u}}{2}\right)z_2$$

Согласно приведенным выражениям (6.3), (6.4) функция $R(e)$ задается формулой

$$R(e) = \frac{3\alpha\bar{u}i}{2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\varkappa_2^2 + \alpha^2\bar{u} - \frac{1+3\nu}{4}\bar{u}\right)$$

Учитывая, что

$$\varkappa_2 = i/2, \quad \alpha^2 = 11/48, \quad \bar{u} = 3 + \ldots, \quad \nu = 1/36 + \ldots$$

получим $R(e) \neq 0$, причем $R(0) \neq 0$.

Следовательно, резонанс $2\varkappa_2 = i$ приводит к неустойчивости. Этот вывод получен из анализа линейных по e членов. Поэтому если условие резонансности выполняется с точностью до членов порядка e^2, то все полученные выше выводы сохраняются. При этом характеристические показатели системы (6.1) равны $\pm eR(0) \pm i/2 + O(e^2)$. На плоскости (ν, e) в окрестности точки $(1/36, 0)$ появляется область неустойчивости. В случае ограниченной постановки задачи этот результат известен [24].

Теорема 6. Эллиптическое лагранжево решение, близкое к круговому, неустойчиво при $\nu = 1/36$.

2°. Исследуем задачу об устойчивости постоянных лагранжевых решений при резонансе $k_0 = 2k_2$. Как это следует из [30, 31], резонансная неустойчивость здесь выводится из нормализованной до членов второго порядка включительно системы, имеющей в комплексно-сопряженных переменных z, $\bar{z}$ вид

$$\dot{z}_0 = iz_0 + iB_0\bar{z}_2^2 + \ldots$$

$$\dot{z}_1 = ik_1 z_1 + \ldots, \quad \dot{z}_2 = -iz_2 / 2 + iB_2\bar{z}_0\bar{z}_2 + \ldots$$

где B_0, B_2 – действительные постоянные. Эта система получена линейным преобразованием уравнений в вариациях к нормальным координатам и последующим обращением в нуль всех коэффициентов при членах второго порядка, кроме резонансных [32]. Кроме того, переменные z_0, $\bar{z}_0$ отвечают уравнению для r, тогда как z_1, $\bar{z}_1$, z_2, $\bar{z}_2$ – уравнениям для ψ и y. Теперь из вида резонансных членов ясно, что слагаемое $iB_0\bar{z}_2^{-2}$ может быть получено только из rF_2 в (4.2), а слагаемое $iB_2\bar{z}_0\bar{z}_2$ определяется только слагаемым с множителем r^{n+3} в (4.1).

Указанные соображения существенно упрощают вычисление коэффициентов B_0 и B_2. Так, B_2 уже содержится в выписанной части системы (5.3), если положить $u = 3(1 + \xi)$; в невозмущенном движении $r = \sqrt{\nu\rho}, fM\rho = \beta_*^2$.

Выведем сначала из (4.2) с учетом соотношения (5.2) уравнение для z_0. Имеем

$$\xi'' + \xi = \frac{\mu}{S^2}(\psi'^2 + y'^2) + \ldots$$

где явно выписаны только те квадратичные члены, которые вносят вклад в B_0. Тогда в переменных

$$z_0 = \xi - i\xi', \quad \bar{z}_0 = \xi + i\xi'$$

получим

$$z_0' = iz_0 - \frac{\mu i}{S^2}(\psi'^2 + y'^2) + \ldots$$

Далее посредством линейного преобразования

$$\begin{aligned} z_j &= -\frac{2(1-\lambda)u}{\lambda u - \lambda_j^2} X + \frac{\lambda u}{\lambda_j} Y - \frac{2\lambda_1}{\lambda u - \lambda_j^2} X' + Y' \\ \bar{z}_j &= -\frac{2(1-\lambda)u}{\lambda u - \lambda_j^2} X - \frac{\lambda u}{\lambda_j} Y + \frac{2\lambda_1}{\lambda u - \lambda_j^2} X' + Y', \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\lambda_1 = -i\sqrt{3}/2$, $\lambda_2 = -i/2$ – корни характеристического уравнения, $u = 3$, приведем линейную часть системы (5.5) к нормальным координатам. Тогда система (5.5) примет вид

$$z_j' = \lambda_j z_j - \frac{2\lambda_j}{\lambda u - \lambda_j^2}(1-\lambda)u\xi X + \lambda u \xi Y + \ldots, \quad j = 1, 2 \tag{6.6}$$

Найдем обратное преобразование

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{(\lambda u-\lambda_1^2)(\lambda u-\lambda_2^2)}{4(1-\lambda)u(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}[(z_1+\bar z_1)-(z_2+\bar z_2)] \\
Y &= \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{2\lambda^2u^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left[\frac{\lambda u-\lambda_1^2}{\lambda_1}(z_1-\bar z_1)-\frac{\lambda u-\lambda_2^2}{\lambda_2}(z_2-\bar z_2)\right] \\
X' &= \frac{(\lambda u-\lambda_1^2)(\lambda u-\lambda_2^2)}{4\lambda u(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}[\lambda_1(z_1-\bar z_1)-\lambda_2(z_2-\bar z_2)] \\
Y' &= \frac{1}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}[(\lambda u-\lambda_1^2)(z_1+\bar z_1)-(\lambda u-\lambda_2^2)(z_2+\bar z_2)]
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Теперь с учетом соотношений

$$\psi'^2+y'^2=x'^2+y'^2=(X'^2+Y'^2)/(1+s^2)$$

вычислим коэффициент B_0

$$B_0=-\frac{\mu(\lambda u-\lambda_2^2)}{16\nu^2(1+s^2)\lambda^2u^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}[(\lambda u-\lambda_1^2)^2\lambda_2^2+4\lambda^2u^2]$$

Далее, подставляя в правые части (6.6) вместо ξ выражение $(z_0+\bar z_0)/2$, а вместо X, X', Y, Y' – правые части (6.7), получим

$$B_2=-\frac{\lambda_2 i}{4\lambda u(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}[\lambda^2u^2-\lambda_1^2\lambda_2^2]$$

В рассматриваемом случае

$$u=3,\quad 2\lambda=1\pm\sqrt{11/12},\quad \lambda_1^2=-3/4,\quad \lambda_2^2=-1/4\quad (\lambda_2=-i/2)$$

Поэтому $B_0B_2>0$, и имеет место неустойчивость.

Теорема 7. Постоянные лагранжевы решения неустойчивы при
$\nu=m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2=1/36$

Замечание. Неустойчивость при резонансе $k_0=2k_2$ имеет место при произвольном $-3<n<-1$ [29]. Аналитическое доказательство данного факта проводится также, как и при ньютоновском взаимодействии. Формулы преобразования (6.5), (6.7) справедливы для произвольного n.

7. О симметричных периодических движениях при малых m_1 и m_2. Обратимся к системе (4.1), (4.2) и исследуем случай, когда масса тела $\mathbf{P}_0$ значительно превосходит массы тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Устремляя параметры m_1 и m_2 к нулю, получим предельную задачу

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}(e^{2y}\psi')=-2e^{2y}y' \\
&\frac{d}{d\theta}(e^{2y}y')=2e^{2y}\psi'+e^{2y}(\psi'^2+y'^2)-\frac{fMr^{n+3}}{\beta_*^2}(e^{ny}-e^y)e^y \\
&r^{\cdot\cdot}-\frac{\beta_*^2}{r^3}+fMr^n=0,\quad r^2\frac{d\theta}{dt}=\beta_*
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Эта система имеет симметричное относительно неподвижного множества **M** периодическое решение

$$y=y_0(\text{const}),\quad \psi=\omega\theta,\quad r=r_0(\text{const}),\quad y'=0,\quad \psi'=\omega,\quad r'=0 \tag{7.2}$$

причем

$$\omega^2+2\omega+1-e^{(n-1)y_0}=0,\quad \beta_*^2=fMr_0^{n+3} \tag{7.3}$$

В рассматриваемом решении тела $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ движутся по окружностям вокруг $\mathbf{P}_0$ с угловыми скоростями соответственно β_*/r_0^2 и $(\omega+1)\beta_*/r_0^2$. В зависимости от знака $\omega+1$ движения происходят в одном или противоположном направлениях.

Исследуем вопрос о продолжимости движений (7.2) по малым параметрам m_1 и m_2. Для этого согласно предыдущим результатам [33] составим уравнения в вариациях для (7.1). Получим

$$\begin{aligned}&\delta\psi''=-2\delta y'/\omega\\&\delta y''=2(1+\omega)\delta\psi'/\omega-[e^{(n-1)y_0}(n-1)\delta y-(n+3)\delta\xi]/\omega^2\\&\delta\xi''+(n+3)\delta\xi/\omega^2=0,\quad r=r_0(1+\xi)\end{aligned} \tag{7.4}$$

где теперь штрих означает дифференцирование по переменной $\omega\theta$.

Характеристическое уравнение этой системы имеет пару нулевых корней с одной группой решений. Эти корни допускают [33] продолжение по параметрам. Поэтому вопрос о продолжимости решается оставшимися корнями, которые имеют вид

$$\varkappa_{1,2}=\pm i\sqrt{n+3}/\omega,\quad \varkappa_{3,4}=\pm\sqrt{(1-n)\exp\{(n-1)y_0\}-3}/\omega$$

Тогда [33] при

$$n+3\neq N^2\omega^2,\quad 3+(n-1)\exp\{(n-1)y_0\}\neq N^2\omega^2\quad (N\in\mathbf{N})$$

симметричные периодические движения, близкие к (7.2), (7.3), существуют и при достаточно малых $m_1\neq0$, $m_2\neq0$.

Отметим, что вопрос о существовании при ньютоновском взаимодействии других типов симметричных периодических орбит был рассмотрен [34] в рамках задачи многих тел.

Автор благодарит участников семинара под руководством В.В. Румянцева и А.В. Карапетяна за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94–010–1674а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laplace P.* Explosition du systéme du monde. Paris: Bachelier, 1824. 418 p.
2. *Routh E.J.* On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion // Proc. London Math. Soc. 1875. V. 6. P. 86–97.
3. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 327–401.
4. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.
5. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 523 с.
6. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
7. *Marchal C., Bozis G.* Hill stability and distance curves for the general three-body problem // Celest. Mech. 1982. V. 26. N 3. P. 311–333.
8. *Sundman K.F.* Mémoire sur le probléme des trois corps // Acta Math. 1912. 36. P. 105–179.
9. *Szebehely V.* Analysis of a one-parameter family of a triple close approaches occurring in stellar systems // Astron. J. 1974. V. 79. N 9. P. 981–986.
10. *Szebehely V.* Numerical investigation of a one-parameter family of triple close approaches occurring in stellar systems // Astron. J. 1974. V. 79. N 12. P. 1449–1454.
11. *Zare K.* Properties of the moment of inertia in the problem of three bodies // Celest. Mech. 1981. V. 24. N 4. P. 345–354.

12. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
13. *Lagrange J.L.* Eassais sur le probléme des trois corps // Qeuress. 1772. T. 6. P. 233–240.
14. *Routh E.J.* A treatise of the stability of a given state of motion. London: McMilland and Co, 1877. 108 p.
15. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 276–319.
16. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
17. *Gascheau G.* Examen d'une classe d'equations differentielles application á un cas particulier du problem des trois corps // C.r. 1843. V. 16. № 7. P. 393.
18. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения. Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 67–160.
19. *Голубев В.Г.* Об устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 2. С. 308–311.
20. *Голубев В.Г.* Об областях невозможных движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1968. Т. 174. № 4. С. 767–770.
21. *Голубев В.Г.* Об оценках сверху расстояний между телами в неограниченной задаче трех тел // Письма в Астрон. журн. 1977. Т. 3. № 2. С. 82–85.
22. *Голубев В.Г., Гребенников Е.А.* Проблема трех тел в небесной механике. М.: Изд-во МГУ, 1985. 240 с.
23. *Тхай В.Н.* Плоская неограниченная задача трех тел // Астрон. журн. 1987. Т. 64. № 4. С. 860–864.
24. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
25. *Тхай В.Н.* Об устойчивости постоянных лапласовых решений неограниченной задачи трех тел // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 1026–1032.
26. *Тхай В.Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
27. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J. 1964. V. 69. № 2. P. 165–172.
28. *Kunitsyn A.L.* On the stability of Laplace's solutions of the unrestricted three body problem // Celest. Mech. 1974. V. 9. N 4. P. 471–481.
29. *Куницын А.Л., Тхай В.Н.* О неустойчивости лапласовых решений неограниченной задачи трех тел // Письма в Астрон. журн. 1977. Т. 3. № 8. С. 376–380.
30. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
31. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
32. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
33. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
34. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–365.

Москва

Поступила в редакцию
24.V.1995