УДК 539.3:534.1

© 1996 г. И.А. Болграбская

ОБОСНОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Дается доказательство сходимости решений уравнений конечномерной модели колебаний балки (n масс, связанных упругими шарнирами) к решению системы с распределенными параметрами при $n \to \infty$.

Ранее [1] был приведен конструктивный алгоритм нахождения собственных и резонансных частот рассматриваемой конечномерной модели. Обзор результатов по использованию и изучению системы связанных твердых тел дан в [2].

1. Упругий стержень и система связанных твердых тел. Рассмотрим стержень, имеющий постоянное поперечное сечение и неизменную жесткость (однородный стержень). Допустим, что элементы стержня при колебаниях совершают только поступательное движение, оба конца стержня свободны и отсутствуют внешние силы и моменты. Тогда уравнение малых колебаний упругого стержня и граничные условия имеют вид [3]

$$EI\partial^4 y/\partial x^4 + S\rho\partial^2 y/\partial t^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$x = 0,\ \ x = l:\ \ EI\partial^2 y/\partial x^2 = 0,\ \ EI\partial^3 y/\partial x^3 = 0 \tag{1.2}$$

где EI – жесткость стержня, l – его длина, S – площадь поперечного сечения, ρ – плотность, ось OX направлена вдоль недеформированной оси стержня.

Теперь рассмотрим движение системы связанных твердых тел (ССТТ), моделирующей малые колебания упругого стержня в изложенной выше постановке. В конечномерном случае он может быть представлен $N + 1$ материальными точками с массами m, расположенными на упругой линии, которая моделируется N невесомыми стержнями S_k, соединенными между собой цилиндрическими шарнирами. Полагаем, что движение происходит в плоскости OXY.

Введем следующие системы координат:

$OXYZ$ (орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) – неподвижная система координат, ось OX которой в начальный момент $t = t_0$ направлена вдоль оси тела S_1;

O_0XYZ – система, связанная с точкой O_0, принадлежащей телу S_1, оси которой коллинеарны соответствующим осям неподвижной системы;

$O_0X'Y'$ (орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}$) – система, в которой $O_0X' \| O_0O_N$, где O_N – точка на оси тела S_N;

$O_{k-1}X_kY_k$ – система, связанная с телом S_k, в ней $O_{k-1}X_k \| O_{k-1}O_k$ $(k = \overline{1,N})$.

Определим положение системы $O_0X'Y'$ по отношению к неподвижной углом ψ, а положение связанной системы по отношению к $O_0X'Y'$ – углом ψ_k $(k = \overline{1,N})$.

Как и в [4], при движении свободной системы [1] можно выделить движение ее как целого (большое движение) и относительные упругие колебания (малое движение). При этом большое движение определяется изменением координат точки O_0 (x_0, y_0) и угла ψ, а малое – изменением угла ψ_k. Поскольку в непрерывной постановке рассмотрены лишь малые деформации стержня, то и в ССТТ будем также изучать случай, когда углы ψ_k малы. Кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой ССТТ таковы:

$$T = \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{N} v_k^2,\quad \Pi = \frac{1}{2}\varkappa^2\left[\sum_{k=2}^{N}(\psi_k - \psi_{k-1})^2 + o(\psi_k^2)\right] \tag{1.3}$$

где $\varkappa^2$ – жесткость упругого шарнира, $v_k = v_k(x_0, y_0, \psi, \psi_k)$ – скорость полюса O_k $(k = \overline{0,N})$, $o(\psi_k^2)$ – члены порядка малости по ψ_k больше второго.

Из (1.3) заключаем, что потенциальная энергия, положительно определенная по части переменных, а именно по углам ψ_k; а так как кинетическая энергия является положительно-определенной функцией, то из полученных ранее результатов [5] следует, что при условии малых ψ_k при $t = t_0$ они останутся малыми и во все время движения вследствие устойчивости движения системы по этим переменным. Обозначим координаты точек O_k ($k=\overline{0,N}$), в системе $O_0X'Y'$ через u_k, w_k. Тогда[1] при малых прогибах в линейном приближении считаем

$$\psi_k=(w_k-w_{k-1})/h, \quad u_k=kh \quad (k=\overline{1,N}) \qquad (1.4)$$
$$u_0=w_0=w_N=0, \quad u_N=Nh, \quad h=l/N$$

где h – расстояние между O_k и O_{k+1} ($k=\overline{0,N-1}$).

Скорость точки O_k равна $\mathbf{v}_k=\dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}_k=\mathbf{v}_0+\dot{\mathbf{O}}_0\mathbf{O}_k$ и может быть выражена так:

$$\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_0+(\dot{w}_k+kh\dot{\psi})\mathbf{j}-w_k\dot{\psi}\mathbf{i} \qquad (1.5)$$
$$\mathbf{v}_0=\dot{x}_0\mathbf{e}_x+\dot{y}_0\mathbf{e}_y$$

Подставим выражения (1.4), (1.5) в (1.3). Тогда кинетическая и потенциальная энергия с точностью до членов второго порядка малости таковы:

$$T=\frac{1}{2}Nm(\dot{u}_p^2+\dot{w}_p^2)+\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{N}[-2\dot{\psi}\dot{u}_p w_k+w_k^2\dot{\psi}^2+2\dot{w}_p(\dot{w}_k+kh\dot{\psi})+\dot{w}_k^2+k^2h^2\dot{\psi}^2+2kh\dot{\psi}\dot{w}_k]$$

$$\Pi=\frac{\varkappa^2}{2h^2}\left[(w_2-2w_1)^2+\sum_{k=3}^{N-1}(w_{k-1}-2w_k+w_{k+1})^2+(w_{N-2}-2w_{N-1})^2\right]$$

Здесь $\dot{u}_p=\dot{x}_0\cos\psi+\dot{y}_0\sin\psi$, $\dot{w}_p=-\dot{x}_0\sin\psi+\dot{y}_0\cos\psi$.

Система имеет три интеграла:

$$M\dot{u}_p-m\dot{\psi}\sum_{k=1}^{N-1}w_k=C_1$$
$$M\dot{w}_p+ma\dot{\psi}+m\sum_{k=1}^{N-1}\dot{w}_k=C_2 \qquad (1.6)$$
$$\dot{\psi}\left(a_1+\sum_{k=1}^{N-1}w_k^2\right)+a\dot{w}_0-\dot{u}_p\sum_{k=1}^{N-1}w_k+h\sum_{k=1}^{N-1}k\dot{w}_k=C_3$$

($M=Nm$, $a_1=h^2N(N-1)(2N-1)/6$, $a=hN(N+1)/2$)

Рассмотрим случай, когда в начальный момент количество движения и момент количества движения равны нулю. Это означает, что постоянные интегрирования равны нулю. Тогда, в частности, можем считать, что в начальный момент система (1.6) имеет нулевое решение. Полагая переменные ψ, u_p, w_p при $t=t_0$ малыми, считаем их малыми и во все время движения. В этом случае обозначим координаты точек O_k ($k=\overline{0,N}$) в неподвижном базисе x_k, y_k, считаем y_k малыми и получаем следующие уравнения малых колебаний (см. работу, цитированную в сноске):

$$\ddot{y}_0+\varkappa_1^2(y_2-2y_1+y_0)=0$$
$$\ddot{y}_1+\varkappa_1^2(y_3-4y_2+5y_1-2y_0)=0$$
$$\ddot{y}_k+\varkappa_1^2(y_{k-2}-4y_{k-1}+6y_k-4y_{k+1}+y_{k+2})=0 \quad k=\overline{2,N-2} \qquad (1.7)$$
$$\ddot{y}_{N-1}+\varkappa_1^2(y_{N-3}-4y_{N-2}+5y_{N-1}-2y_N)=0$$
$$\ddot{y}_N+\varkappa_1^2(y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N)=0, \quad \varkappa_1^2=\varkappa^2/(mh^2)$$

2. Сравнение решений стержневой и конечномерной моделей. Нетрудно видеть, что уравнения движения (1.7) можно трактовать как конечноразностную аппроксимацию уравнений (1.1), (1.2) по пространственной переменной $x_k=kh$. Этот факт позволяет в дальнейшем для доказательства сходимости решения конечномерной задачи (ССТТ) к соответствующей по постановке непрерывной (упругий стержень) воспользоваться теоремами, доказанными в теории конечноразностных схем. Согласно результатам, полученным ранее [6], решение конечномерной задачи сходится к решению непрерывной при выполнении двух условий: уравнения конечномерной модели должны аппроксимировать урав-

---

[1] *Болграбская И.А.* Уравнения движения систем связанных твердых тел и малых колебаний упругих стержней // Динамика систем связанных твердых тел и тел с полостями, содержащими жидкость: Препринт № 90.03. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1990. С. 19–27.

нения непрерывной и, кроме того, конечноразностная схема, которой в рассматриваемом случае соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений, должна быть устойчива.

Пусть L – непрерывный дифференциальный оператор, а L_h – разностный. Тогда уравнения (1.1), (1.2) и система (1.7) могут быть соответственно записаны так:

$$Ly = 0 \tag{2.1}$$

$$L_h y_h = 0 \tag{2.2}$$

Тогда, если $y(x_k)$ – решение непрерывной задачи (2.1) при $x = x_k$, то $L(y(x_k)) = 0$, $L_h(y(x_k)) = \delta f_h$.

По определению [6] конечноразностная система (2.2) аппроксимирует непрерывную систему (2.1) на решении Y в случае $\|\delta f_h\| \to 0$ при $h \to 0$.

Положим в (1.7)

$$\varkappa^2 = EI/h, \quad m = \rho S h \tag{2.3}$$

Было доказано (см. работу, цитированную в сноске), что при условии (2.3) уравнения движения ССТТ (1.7) сходятся к уравнениям малых колебаний упругого стержня (1.1), (1.2). Отсюда следует, что уравнения движения ССТТ аппроксимируют уравнения малых колебаний упругих стержней.

Поскольку аппроксимация уже установлена, займемся доказательством устойчивости. Согласно определению [7] рассматриваемая разностная задача (2.2) устойчива, если для любого $f_h(t) \in F_h$, $\|f_h\|_{F_h} < \delta$ уравнение $L_h y_h = f_h$ имеет единственное решение, при этом $\|y_h\| \leqslant C\delta$, где C не зависит от h, $\|\cdot\|$ – любая из норм [8], введенная в пространстве функций Y.

Интегралы (1.6) при нулевых постоянных интегрирования в новых переменных имеют вид

$$\sum_{k=0}^{N} \dot{y}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} k\dot{y}_k = 0 \tag{2.4}$$

Введем в (1.7) замену переменных

$$z_k = y_k - y_{k-1} \quad (k = \overline{1,N}), \quad v_k = z_k - z_{k+1} \quad (k = \overline{1,N-1}) \tag{2.5}$$

Тогда получим следующую систему:

$$\ddot{V} + GN^4AV = 0; \quad G = EI/(\rho S l^4), \quad N = l/h \tag{2.6}$$

где G – постоянная, не зависящая от h, A – симметричная пятидиагональная матрица n-го порядка ($n = N - 1$) с элементами a_{ij}, определяемыми равенствами

$$a_{ij} = \begin{cases} 6, & j = i, \\ -4, & j = i+1, \\ 1, & j = i+2 \\ 0, & j > i+2 \end{cases} \quad i \leqslant j < n$$

элементы ниже главной диагонали ($i \geqslant j$) получаются симметричным отображением; $V = (v_1, \ldots, v_n)^T$. Система (2.4), (2.6) эквивалентна (1.7). После нахождения v_k ($k = \overline{1,n}$) из (2.6) находим y_0 и $z_1 = y_1 - y_0$ из (2.4) и остальные y_k ($k = \overline{2,n}$) из (2.5).

Таким образом, для оценки решения системы (1.7) и доказательства устойчивости необходимо оценить решение системы (2.6) и показать, что малые возмущения ее правой части приводят к малым возмущениям решения, не зависящим от h. Установление этого факта и будет свидетельствовать об устойчивости системы (2.6), а вместе с ней при учете (2.4), (2.5) и системы (1.7).

Итак, рассмотрим систему

$$\ddot{V} + GN^4AV = f(t), \quad \|f(t)\| < \delta$$

Поскольку A – действительная симметричная матрица, то всегда существует ортогональная матрица B, приводящая ее к диагональному виду. Получим

$$\ddot{U} + \Lambda U = B^{-1}f(t) \tag{2.7}$$

$$U = B^{-1}V, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,..., \lambda_n)$$

где $\lambda = (\lambda_1,..., \lambda_n)$ – вектор собственных чисел матрицы $C = \{c_{ij}\} = \{GN^4 a_{ij}\}$.

Общее решение уравнения (2.7) таково:

$$U = U_0 \cos\sqrt{\lambda}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\dot{U}_0 \sin\sqrt{\lambda}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^T B^{-1} f(\tau)\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau)d\tau \tag{2.8}$$

Положим в начальный момент $\|V_0\| \leqslant \varphi_0$, $\|\dot{V}_0\| \leqslant \psi_0$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Поскольку B – ортогональное преобразование $\|U\| = \|B^{-1}V\| = \|V\|$, оценивая норму (2.8), приходим к неравенству

$$\|V\| = \|U\| \leqslant \varphi_0 + (\psi_0 + \delta T) / \min_k |\sqrt{\lambda_k}| \tag{2.9}$$

Итак, для доказательства устойчивости необходимо показать, что существует постоянная d, не зависящая от h, такая, что $1/\min_k |\lambda_k| < d$, где λ_k – собственные числа матрицы C.

Обозначим $\lambda(M)$ – собственные числа матрицы M, тогда, учитывая (2.7), имеем [9]

$$\lambda(C) = GN^4\lambda(A) = G(n+1)^4\lambda(A)$$

Все угловые миноры матрицы A могут быть вычислены в явном виде:

$$\Delta_i = (i+1)(i+2)^2(i+3)/12 > 0 \quad (i = \overline{1,n})$$

и из критерия Сильвестра следует, что действительная матрица A положительно определена и все ее собственные числа действительны и положительны [8, 9]. Пусть A^i – матрица i-го порядка ($i \leqslant n$), полученная из первых i строк и i столбцов матрицы A. Обозначим собственные числа $\lambda(A^i) = (\overset{i}{\mu}_1,..., \overset{i}{\mu}_i)$, полагая, что они пронумерованы в порядке возрастания. Тогда

$$\min_k |\lambda_k| = GN^4\mu_1^n \tag{2.10}$$

Рассмотрим матрицу B^i, в которой $b_{11} = b_{ii} = 5$, а остальные $b_{ij} = a_{ij}$. Видно, что выполнено равенство

$$B^i = (D^i)^2 \quad i \geqslant 2 \tag{2.11}$$

где D^i – симметричная матрица i-го порядка, элементы которой

$$d_{km}^i = \begin{cases} 2, & m = k, \\ -1, & m = k+1, \quad k < m \leqslant i \\ 0, & m > k+1; \end{cases}$$

Собственные числа матрицы D^i известны [7]. Тогда из (2.11) следует [9]

$$\lambda_k(B^i) = \lambda_k^2(D^i) = 16\sin^4\frac{k\pi}{2(i+1)} \quad (k = \overline{1,i}) \tag{2.12}$$

Обозначим $\lambda_k(B^i) = \overset{i}{\nu}_k$. Тогда из (2.12) получим

$$\nu_k^i < \nu_l^i, \quad k < l \leqslant i; \quad \nu_k^i > \nu_k^s, \quad i < s \leqslant n \tag{2.13}$$

Поскольку собственные числа матрицы являются корнями ее характеристического многочлена, то $\overset{s}{\mu}_k$, $\overset{s}{\nu}_k$ – соответственно корни уравнений

$$\Delta_k(\lambda) = A^k - \lambda E^k, \quad \delta_k(\lambda) = B^k - \lambda E^k$$

где E^k – единичная матрица k-го порядка ($k \leqslant n$).

Представим Δ_k следующим образом:

$$\Delta_k(\lambda) = \Delta_{k-1}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} \delta_i(\lambda), \quad k = \overline{2,n} \tag{2.14}$$

$$\Delta_1 = = -\lambda + 6$$

Учитывая далее, что все корни матриц A^k, B^k действительны, равенство (2.14) можно записать так:

$$\Delta_k(\lambda)=\prod_{i=1}^{k}(-\lambda+\mu_i^k)=\prod_{i=1}^{k-1}(-\lambda+\mu_i^{k-1})+\sum_{i=1}^{k}\prod_{l=1}^{i}(-\lambda+\nu_l^i),\quad k=\overline{2,n} \qquad (2.15)$$

При $k=1$ имеем $\mu_1^1=6$, $\nu_1^1=5$.

Рассматривая (2.15) для $k=2,\ldots,n$, при выполнении условий (2.13) последовательно находим, что $\Delta_k(\lambda)>0$ при $\lambda>\nu_1^k$, откуда следует, что

$$\mu_1^k>\nu_1^k,\quad k=\overline{2,n} \qquad (2.16)$$

Окончательно из (2.10), (2.16) при учете (2.12) имеем

$$\left(\min_k|\lambda_k|\right)^{-1}<\left[16G(n+1)^4\sin^4\frac{\pi}{2(n+1)}\right]^{-1} \qquad (2.17)$$

Используя соотношение

$$\lim_{n\to\infty}16(n+1)^4\sin^4\frac{\pi}{2(n+1)}=\pi$$

заключаем, что при достаточно больших n (либо малых h) из (2.17) следует, что $\left(\min_k|\lambda_k|\right)^{-1}<d$, где постоянная d не зависит от h.

Итак, получена оценка минимального собственного числа $\lambda(C)$ не зависящая от h, что дает возможность оценить решение (2.8) при учете (2.9) следующим образом:

$$\|V\|\leqslant\varphi_0+(\psi_0+\delta T)/\sqrt{d}=C\delta \qquad (2.18)$$

Соотношение (2.1) дает оценку решения системы (2.6), не зависящую от h, вследствие чего из (2.4), (2.5) следует, что и решение системы (1.7) при малых возмущениях правой части также изменяется на величину, не зависящую от h, т.е. система (1.7) устойчива.

Учитывая далее, что система (1.7) аппроксимирует (1.1), (1.2), заключаем, что ее решение сходится к решению непрерывной системы.

Автор благодарит А.Я. Савченко за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. Киев: Наук. думка, 1991. 166 с.
2. *Болграбская И.А., Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1989. Вып. 21. С. 62–73.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. *Cochran J.E., Batson J.L., Christensen D.E.* Dynamic coupling of gross and find motions of a flexible spinning free rocket // AIAA: Atmos. Flight Mech. Conf. Holywood. 1977. P. 182–194.
5. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. *Рябенький В.С., Филиппов А.Ф.* Об устойчивости разностных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 171 с.
7. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
9. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.

Донецк

Поступила в редакцию
23.V.1995