

Для сформулированного примера получим верхнюю оценку работы, которую может совершить система в зависимости от времени.

В соответствии с (2.5) оценка работы, совершаемая системой $W(\tau) = -A(\tau)$, будет иметь вид

$$W(\tau) \leq p \frac{a^2 \pi}{4l} \left(2\omega\tau + \frac{1}{2} \sin 2\omega\tau \cos 2\omega\tau \right) \quad (5.4)$$

Улучшить верхние значения (5.4) работы, совершаемой системой можно за счет нетривиальной оценки полной энергии волнового объема.

Для точки $\xi \neq 1/2l$ и момента времени τ введем в рассмотрение плотность полной энергии согласно (2.2).

Решая вариационную задачу (4.1–4.4) для рассматриваемого примера найдем нижнюю оценку полной энергии волнового объема, которую затем подставим в оценку работы внешних сил (4.6).

Результаты вычислений представлены на фиг. 3, где кривая 1 соответствует волновым оценкам (5.4) и кривая 2 – уточненным волновым оценкам верхних значений работы системы от времени.

Был рассмотрен [4] и более содержательный пример использования волновых оценок, а именно для решения задач хрупкого динамического разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 436 с.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
4. Kotousov A.G. Energy wave approach to the fast brittle fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1993. V. 64. P.R 59–64.

Московская обл.

Поступила в редакцию
9.VIII.1994

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. С.В. Захарова, В.М. Шихман

ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассматриваются установившиеся изгибные колебания упругой полуполосы со свободными от напряжений продольными гранями и заданной на торце кинематической нагрузкой. Решение сводится к представлению в рамках метода однородных решений, описывающему напряженно-деформированное состояние как во внутренней области полуполосы, так и на торце, и адекватно отражающему особенности напряженного состояния в угловых точках. Аналитически и численно показана разрешимость бесконечных алгебраических систем для определения коэффициентов разложения.

Решение подобных задач альтернативными методами ранее рассматривалось в [1–3].

Пусть в безразмерной системе координат полуполоса занимает область $0 \leq x < \infty$, $|y| \leq 1$, и на границах области выполняются условия

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0$$

$$u(0, y) = f(y) \exp(-i\omega t), \quad v(0, y) = g(y) \exp(-i\omega t)$$

$$f(-y) = -f(y), \quad g(-y) = g(y)$$

причем функции $f(y)$, $g(y)$ непрерывно-дифференцируемы.

Материал полуполосы характеризуется модулем сдвига G , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду далее опускается.

Исходная задача представляется в виде суммы двух задач, для которых $f(y)$ и $g(y)$ поочередно полагаются равными нулю.

Решение первой задачи строится суперпозицией решений для бесконечной полосы $|x| < \infty$, $|y| \leq 1$ с условием симметрии относительно оси y , и для полуплоскости $x \geq 0$, $|y| < \infty$ с граничными условиями $u(0, y) = 0$, $\tau_{xy}(0, y) = 2G\tau(y)$. При построении решения используется интегральное преобразование Фурье и учитываются условия излучения для каждого типа волн [4]. В результате имеем (интегрирование по λ и α ведется от нуля до бесконечности)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int [c_1(\lambda) \operatorname{sh} l_1 y + c_2(\lambda) \operatorname{sh} l_2 y] \sin \lambda x d\lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) (\exp k_1 x - \exp k_2 x) \sin \alpha y d\alpha \\ v(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int \left[c_1(\lambda) \frac{l_1}{\lambda} \operatorname{ch} l_1 y + c_2(\lambda) \frac{\lambda}{l_2} \operatorname{ch} l_2 y \right] \cos \lambda x d\lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) \left(\frac{\alpha}{k_1} \exp k_1 x - \frac{k_2}{\alpha} \exp k_2 x \right) \cos \alpha y d\alpha \\ \frac{\sigma_x(x, y)}{2G} &= \frac{2}{\pi} \int \left[c_1(\lambda) \frac{2l_1^2 + \kappa_2^2}{2\lambda} \operatorname{sh} l_1 y + c_2(\lambda) \lambda \operatorname{sh} l_2 y \right] \cos \lambda x d\lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) \left(\frac{\alpha^2 + k_2^2}{2k_1} \exp k_1 x - k_2 \exp k_2 x \right) \sin \alpha y d\alpha \\ \frac{\sigma_y(x, y)}{2G} &= -\frac{2}{\pi} \int \left[c_1(\lambda) \frac{\lambda^2 + l_2^2}{2\lambda} \operatorname{sh} l_1 y + c_2(\lambda) \lambda \operatorname{sh} l_2 y \right] \cos \lambda x d\lambda - \\ &- \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) \left(\frac{2k_1^2 + \kappa_2^2}{2k_1} \exp k_1 x - k_2 \exp k_2 x \right) \sin \alpha y d\alpha \\ \frac{\tau_{xy}(x, y)}{2G} &= \frac{2}{\pi} \int \left[c_1(\lambda) l_1 \operatorname{ch} l_1 y + c_2(\lambda) \frac{\lambda^2 + l_2^2}{2l_2} \operatorname{ch} l_2 y \right] \sin \lambda x d\lambda + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) \left(\alpha \exp k_1 x - \frac{\alpha^2 + k_2^2}{2\alpha} \exp k_2 x \right) \cos \alpha y d\alpha \\ l_j &= \begin{cases} i\sqrt{\kappa_j^2 - \lambda^2}, & \lambda < \kappa_j \\ -\sqrt{\lambda^2 - \kappa_j^2}, & \lambda > \kappa_j \end{cases}, \quad k_j = \begin{cases} i\sqrt{\kappa_j^2 - \alpha^2}, & \alpha < \kappa_j \\ -\sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, & \alpha > \kappa_j \end{cases}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\kappa_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \kappa_2^2, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho}{G} \omega^2$$

Здесь $c_j(\lambda)$, $c(\alpha)$ – неизвестные функции, определяемые при удовлетворении граничных условий.

Построенное решение удовлетворяет условиям антисимметрии $u(x, -y) = -u(x, y)$, $v(x, -y) = v(x, y)$, а также граничному условию $u(0, y) = 0$.

Представим решение (1) в виде рядов по однородным решениям для изгибных колебаний бесконечной полосы со свободными границами и установим связь коэффициентов разложения с напряжениями на торце полуполосы.

Удовлетворим условиям $\sigma_y(x, l) = \tau_{xy}(x, l) = 0$, записав их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 + l_2^2}{2\lambda} \operatorname{sh} l_1 c_1(\lambda) + \lambda \operatorname{sh} l_2 c_2(\lambda) &= D_1(\lambda) \\ l_1 \operatorname{ch} l_1 c_1(\lambda) + \frac{\lambda^2 + l_2^2}{2l_2} \operatorname{ch} l_2 c_2(\lambda) &= D_2(\lambda) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int c(\alpha) \left[\frac{2k_1^2 + \kappa_2^2}{2(k_1^2 + \lambda^2)} - \frac{k_2^2}{k_2^2 + \lambda^2} \right] \sin \alpha d\alpha \\ D_2(\lambda) &= -\frac{2\lambda}{\pi} \int c(\alpha) \left[\frac{\alpha}{k_1^2 + \lambda^2} - \frac{\alpha^2 + k_2^2}{2\alpha(k_2^2 + \lambda^2)} \right] \cos \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (2) имеет вид

$$c_j(\lambda) = \Delta_j(\lambda) / \Delta(\lambda)$$

$$\Delta_1(\lambda) = 2\lambda \left[(\lambda^2 + l_2^2) \operatorname{ch} l_2 D_1(\lambda) - 2\lambda l_2 \operatorname{sh} l_2 D_2(\lambda) \right]$$

$$\Delta_2(\lambda) = -2l_2 \left[2\lambda l_1 \operatorname{ch} l_1 D_1(\lambda) - (\lambda^2 + l_2^2) \operatorname{sh} l_1 D_2(\lambda) \right]$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 + l_2^2)^2 \operatorname{sh} l_1 \operatorname{ch} l_2 - 4\lambda^2 l_1 l_2 \operatorname{sh} l_2 \operatorname{ch} l_1$$

Это представление при учете соотношений (3), позволяет выразить $c_j(\lambda)$ через $c(\alpha)$ и преобразовать выражения (1), разлагая по вычетам входящие в них интегралы в соответствии с принципом предельного поглощения [5]. В результате получим (суммирование по k от единицы до бесконечности)

$$u(x, y) = \sum P_k u_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad v(x, y) = \sum P_k v_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad x \geq 0$$

$$\frac{\sigma_x(x, y)}{2G} = \sum P_k \sigma_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad \frac{\tau_{xy}(x, y)}{2G} = \sum P_k \tau_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad x > 0$$

$$u_k(y) = i(\operatorname{sh} l_{1k} y + Q_k \operatorname{sh} l_{2k} y), \quad v_k(y) = \frac{l_{1k}}{\lambda_k} \operatorname{ch} l_{1k} y + \frac{\lambda_k}{l_{2k}} Q_k \operatorname{ch} l_{2k} y$$

$$\sigma_k(y) = - \left[\frac{2l_{1k}^2 + \kappa_2^2}{2\lambda_k} \operatorname{sh} l_{1k} y + \lambda_k Q_k \operatorname{sh} l_{2k} y \right] \quad (4)$$

$$\tau_k(y) = i \left[l_{1k} \operatorname{ch} l_{1k} y + \frac{\lambda_k^2 + l_{2k}^2}{2l_{2k}} Q_k \operatorname{ch} l_{2k} y \right]$$

$$P_k = -2i \frac{\Delta_1(\lambda_k)}{\Delta'(\lambda_k)}, \quad Q_k = \frac{-2l_{1k} l_{2k} \operatorname{ch} l_{1k}}{\lambda_k^2 + l_{2k}^2 \operatorname{ch} l_{2k}}$$

Здесь λ_k – корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости либо на положительной части действительной оси.

Функции $u_k(y), v_k(y), \sigma_k(y), \tau_k(y)$ являются однородными решениями для изгибных колебаний бесконечной полосы со свободными границами.

Найдем связь коэффициентов P_k с касательным напряжением на торце $\tau(y)$.

Обратив интеграл в выражении для $\tau_{xy}(0, y)$ из (1), получим (интегрирование по t ведется от нуля до единицы)

$$c(\alpha) = \frac{2\alpha}{\kappa_2^2} \int \tau(t) \cos \alpha t dt$$

Тогда

$$D_1(\lambda) = -\frac{1}{\kappa_2^2} \int \left[(\lambda^2 + l_2^2) \exp l_1 \operatorname{ch} l_1 t - 2\lambda^2 \exp l_2 \operatorname{ch} l_2 t \right] \tau(t) dt$$

$$D_2(\lambda) = -\frac{\lambda}{\kappa_2^2} \int \left(2l_1 \exp l_1 \operatorname{ch} l_1 t - \frac{\lambda^2 + l_2^2}{l_2} \exp l_2 \operatorname{ch} l_2 t \right) \tau(t) dt$$

Используя полученные выражения и свойства корней λ_k , преобразуем функции $\Delta_1(\lambda_k)$ и приведем коэффициенты P_k к окончательному виду

$$P_k = -2w_k^{-1} \int \tau(t) v_k(t) dt, \quad w_k = i\kappa_2^2 \frac{\Delta'(\lambda_k) \operatorname{sh} l_{1k}}{8\lambda_k^4 l_{2k} \operatorname{sh} l_{2k}} \quad (5)$$

Это представление по форме аналогично представлению, полученному в [6] для задачи о вынужденных колебаниях полуполосы с перекрестными граничными условиями на торце.

Приведенные в (4) выражения для перемещений представляют собой сходящиеся ряды и справедливы как внутри полуполосы, так и на всем торце. Представление же напряжений в виде рядов справедливо при $x > 0$, так как при $x = 0$ эти ряды расходятся в конечной окрестности угловых точек $y = \pm 1$ [1].

Следуя методу, описанному ранее [7, 8], будем отыскивать напряжения на торце полуполосы в классе функций вида

$$S(y) = \frac{H(y)}{(1-y)^\gamma (1+y)^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1$$

$H(y)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера для $|y| \leq 1$. Тогда при учете свойств четности и нечетности напряжений τ_{xy} и σ_x , получим представление

$$\tau(y) = \frac{C_1}{(1-y^2)^\gamma} + \tau_1(y), \quad \sigma(y) = \frac{C_2 y}{(1-y^2)^\gamma} + \sigma_1(y), \quad \sigma(y) = \frac{\sigma_x(0, y)}{2G} \quad (6)$$

$\tau_1(y)$ и $\sigma_1(y)$ – непрерывные функции при $|y| \leq 1$, C_1, C_2 – неизвестные постоянные, величина γ определяется уравнением

$$(3 - 4\nu) \sin^2(\pi\gamma/2) = (1 - \gamma)^2 - (1 - 2\nu)^2, \quad 0 < \gamma < 1/2$$

Подстановка выражения для $\tau(y)$ из (6) в (5) приводит к соотношению

$$C_1 b_k + B_k = P_k, \quad b_k = -2w_k^{-1} \int v_k(t) (1-t^2)^{-\gamma} dt, \quad B_k = -2w_k^{-1} \int \tau_1(t) v_k(t) dt \quad (7)$$

которое используется для нахождения связи между полями напряжений во внутренней области полуполосы и на торце.

Из (1) и (6) следует представление касательного напряжения на торце

$$\tau_{xy}(0, y) / (2G) = C_1 (1-y^2)^{-\gamma} + \sum B_k \tau_k(y) \quad (8)$$

Для того чтобы получить выражение для нормального напряжения, используем теорему Бетти и представим (5) в виде

$$P_k = 2w_k^{-1} \int [\sigma(t) u_k(t) - g(t) \tau_k(t)] dt$$

Тогда, аналогично (8)

$$\sigma_x(0, y) / (2G) = C_2 y(1 - y^2)^{-\gamma} + \sum (B_k + C_1 b_k - C_2 a_k) \sigma_k(y) \quad (9)$$

$$a_k = 2w_k^{-1} \int t u_k(t) (1 - t^2)^{-\gamma} dt$$

Используя асимптотические оценки при $k \rightarrow \infty$, установим, что ряды в (8), (9) сходятся на всем торце полуполосы [2].

Таким образом, задача сводится к определению неизвестных постоянных P_k, B_k, C_1, C_2 .

Для нахождения неизвестных P_k используем вариационный принцип Рейсснера, что приводит к следующей бесконечной алгебраической системе:

$$\sum a_{nk} P_k = (g, \tau_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_{nk} = (\sigma_n, u_k) + (\tau_n, v_k), \quad (f_1, f_2) = \int f_1(t) f_2(t) dt$$

Анализ асимптотического поведения коэффициентов системы на основе известных критериев [9] показывает, что ее решение существует и может быть найдено методом редукции.

Для определения неизвестных постоянных C_1, C_2 используются условия

$$\sum (B_k + C_1 b_k - C_2 a_k) v'_k(y) = g'(y), \quad \sum B_k u'_k(y) = 0, \quad |y| \leq 1$$

Неизвестные B_k находятся из соотношения (7).

Решение второй краевой задачи для полуполосы с граничными условиями на торце

$$u(0, y) = f(y), \quad v(0, y) = 0$$

строится аналогично и может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \sum T_k u_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad v(x, y) = \sum T_k v_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad x \geq 0$$

$$\frac{\sigma_x(x, y)}{2G} = \begin{cases} \sum T_k \sigma_k(y) \exp(i\lambda_k x), & x > 0 \\ K_1 y(1 - y^2)^{-\gamma} + \sum A_k \sigma_k(y), & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\tau_{xy}(x, y)}{2G} = \begin{cases} \sum T_k \tau_k(y) \exp(i\lambda_k x), & x > 0 \\ K_2 (1 - y^2)^{-\gamma} + \sum (A_k + K_1 a_k - K_2 b_k) \tau_k(y), & x = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты T_k находятся из системы

$$\sum a_{nk} T_k = (f, \sigma_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

T_k и A_k связаны соотношением $T_k = K_1 a_k + A_k$ причем K_1 и K_2 определяются из условий

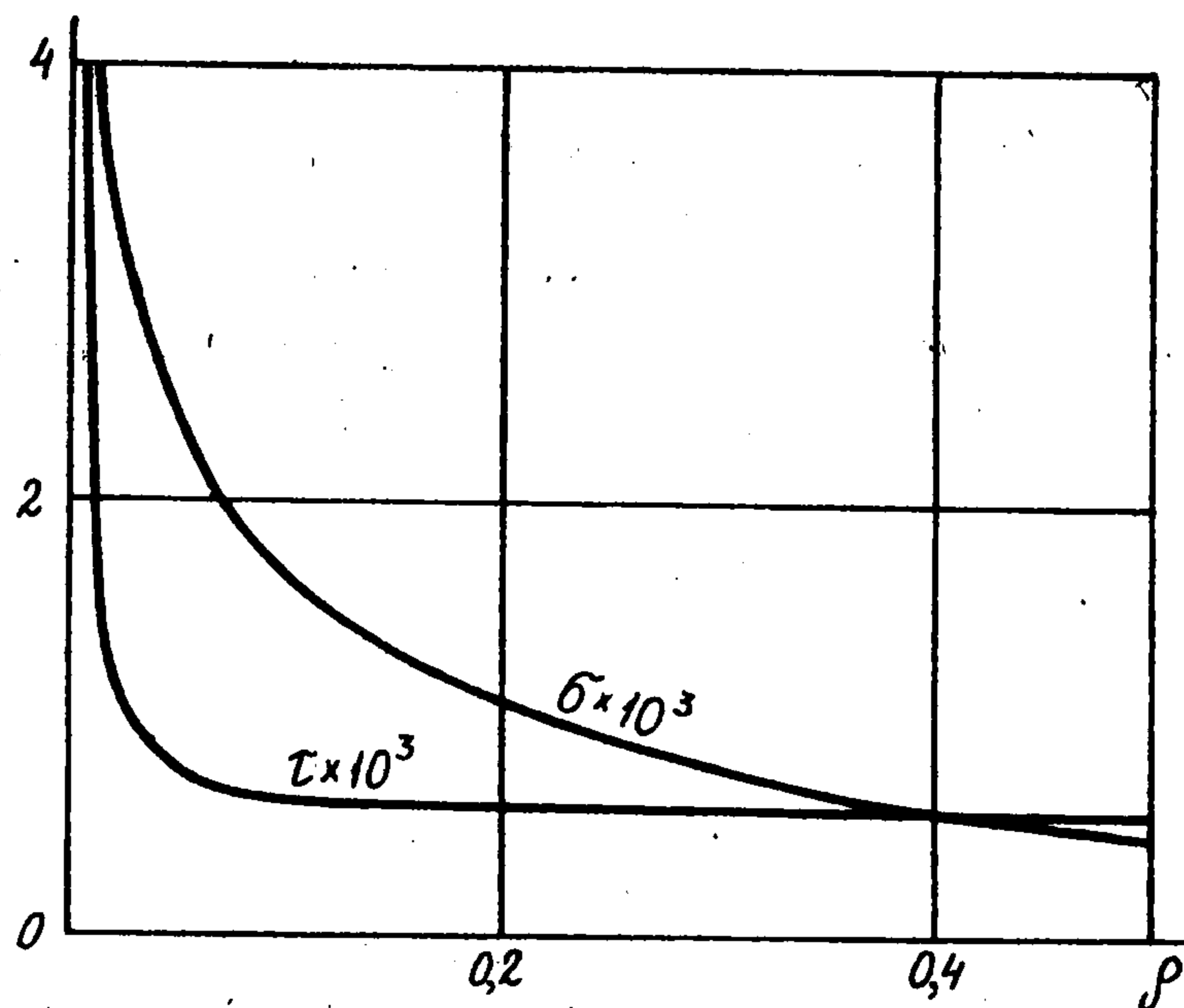
$$\sum (A_k + K_1 a_k - K_2 b_k) u'_k(y) = f'(y), \quad \sum A_k v'_k(y) = 0, \quad |y| \leq 1$$

Решение исходной краевой задачи является суммой полученных решений.

Численный анализ проведен для полуполосы из материала с $\nu = 0,29$. На торце задана кинематическая нагрузка $f(y) = \epsilon y$, $g(y) = \epsilon$, где $\epsilon = 10^{-3}$. Исследованы две частоты возбуждающей нагрузки: $\Omega = 0,5$ и $\Omega = 4$, где $\Omega = 2\kappa_2/\pi$.

Точность выполнения граничных условий δ зависит от порядка урезанной системы N и частоты Ω . В исследованном частотном диапазоне достаточная для практических целей точность ($\delta \leq 1,3\%$) достигается при относительно небольших значениях N ($N = 38$).

На частоте $\Omega = 0,5$ имеется одна бегущая волна, модуль амплитуды которой $|R| = 0,813$, при $\Omega = 4$ имеют место четыре бегущие волны с $|R_i|$, соответственно равными 0,011, 0,009, 0,848, 0,120. Резкое возрастание эффективности возбуждения третьей моды на частоте $\Omega = 4$ объясняется близостью заданной нагрузки к характеру волнового поля указанной моды.



Характер роста модулей напряжений $\sigma = |\sigma_x|/(2G)$ и $\tau = |\tau_{xy}|/(2G)$ при подходе к угловой точке изнутри области под углом 45° к торцевой поверхности показан на фигуре для частоты $\Omega = 0,5$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00220).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gregory R.D., Gladwell I. The reflection of a symmetric Rayleigh – Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. Elast. 1983. V. 13. N 2. P. 185–206.
2. Пельц С.П., Шихман В.М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. N 4. С. 821–824.
3. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мартыненко О.Н. Краевой резонанс в полубесконечном упругом жестко заземленном волноводе // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 982–988.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
5. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. N 2. С. 333–335.
7. Гупта Г.Д. Решение задачи о полубесконечной полосе с помощью интегральных уравнений. // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1973. Т. 40. N 4. С. 123–129.
8. Захарова С.В., Пельц С.П. Решение смешанной задачи теории упругости для полуполосы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. N 5. С. 1077–1081.
9. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.