ЛИТЕРАТУРА

1. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
2. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Мир, 1964. 477 с.
3. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М., Л.: Наука, 1964. 367 с.
4. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
5. *Kamke E.* Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II. Acta Math. 1932. Bd 58. S. 57–85.
6. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Non-local methods for pendulum-like feedback systems // Teunbner-texte zur Mathematik. 1992. Bd. 132. 242 s.
7. *Белых В.Н.* Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения // Системы фазовой синхронизации / Под ред. *В.В. Шахгильдяна* и *Л.Н. Белюстиной*. М.: Радио и связь, 1982. С. 45–55.
8. *Cartrwrigth M.L., Littlewood J.E.* On non-linear differential equations of the second order // Ann. Math. 1947. V. 48. № 2. P. 472–494.
9. *Леонов Г.А.* Колебания в системах с нелинейным демпфированием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 183–184.
10. *Леонов Г.А.* Оценки снизу числа циклов двумерных динамических систем. Вестн. СПб. ун-та. Серия математика, механика, астрономия. 1994. № 1. С. 42–46.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
3.IV.1994

УДК (532.5 + 539.3):534.1

 А.Г. Котоусов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Представлена процедура построения интегральных оценок для волнового уравнения с нелинейностью сосредоточенной в некоторой локальной области изучаемой системы. Для получения этих оценок требуется знание решения линейного однородного дифференциального уравнения и динамики распространения волн в системе. Точность оценок существенным образом зависит от характера внешних нагрузок, их интенсивности и длительности. Такого типа оценки имеет смысл рассматривать для процессов, длительность которых соизмерима с временем распространения волн в системе, что характерно, например, для взрывных и ударных явлений, а также динамического разрушения. Рассматривается пример построения волновых оценок для простой механической системы.

1. Постановка задачи. Многие задачи механики и физики колебаний приводят к уравнению вида [1]

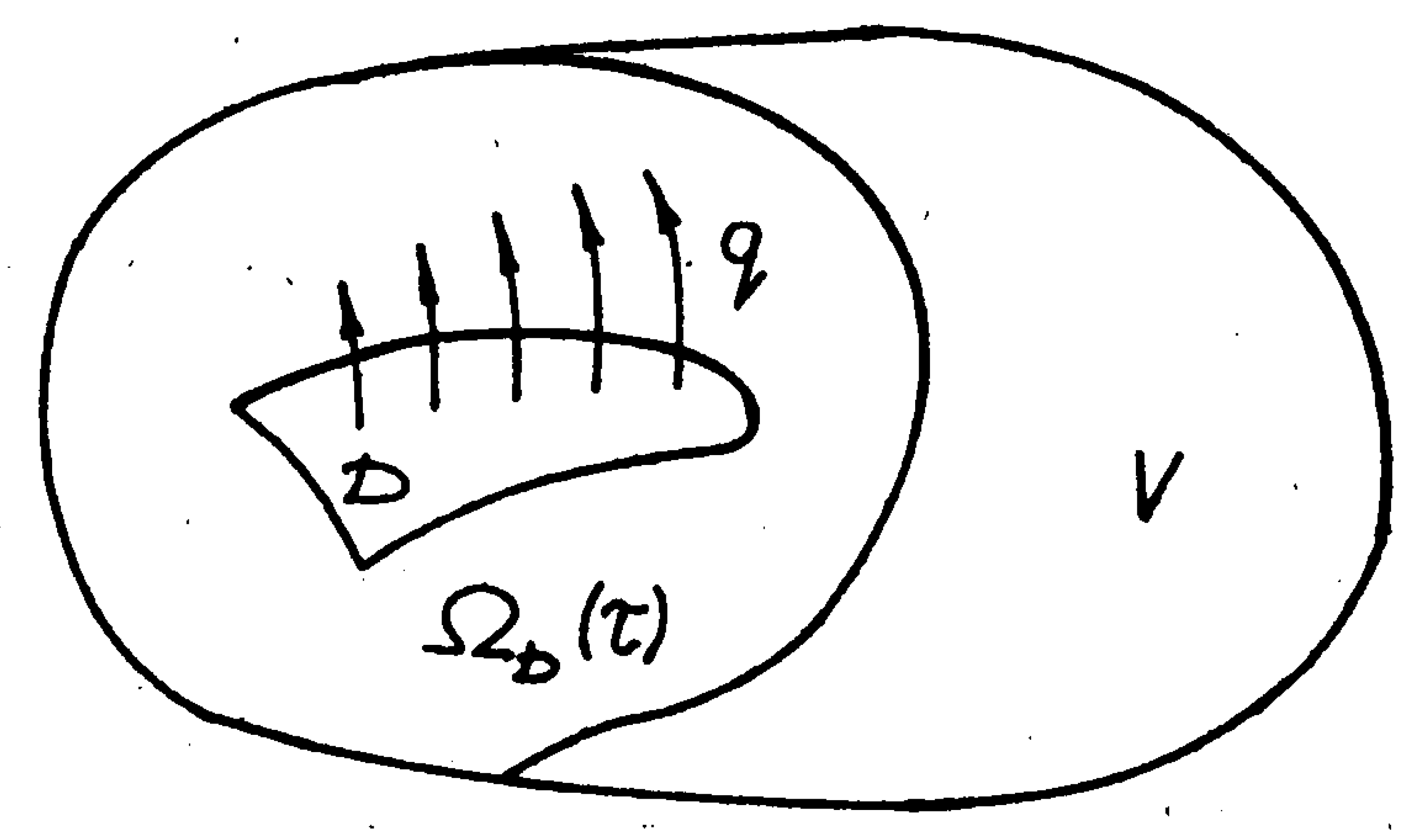
$$\rho\ddot{u} = L[u] + q, \quad L[u] = \operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = U_0(x), \quad \dot{u}\Big|_{t=0} = \dot{U}_0(x), \quad x \in V \tag{1.2}$$

и смешанными граничными условиями

$$\alpha u+\beta\, \partial u/\partial n\big|_{\partial V}=0, \quad t>0 \qquad (1.3)$$



Фиг. 1

где неизвестная функция $u(x, t)$ зависит от n пространственных координат $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ (обычно n = 1, 2 или 3) и времени t; коэффициенты ρ и p, определяются свойствами среды и не зависят от времени. В соответствии с их физическим смыслом будем считать, что $\rho(x) > 0$ и $p(x) > 0$; $V \subset R^n$ – область, где происходит процесс, и ∂V – ее граница, которая предполагается кусочно-гладкой поверхностью; α и β не зависят от t; а ∂V_0 – та часть поверхности ∂V, где $\alpha(x) > 0$ и $\beta(x) > 0$ одновременно.

Свободный член q выражает интенсивность внешнего воздействия на систему. Если он зависит только от пространственных координат и времени, решение поставленной задачи можно найти, используя известные подходы [1].

Поиск решения значительно усложняется, если интенсивность внешних воздействий q нелинейно зависит от самого решения и частных производных этого решения по времени и пространственным координатам. Актуальность здесь приобретают приближенные решения и оценки.

Ниже представлена процедура построения таких оценок при условии, что функция $q = q(x, t, u,\ldots)$ сосредоточена в некоторой области $D \subset V$ (фиг. 1), а вне этой области $q = 0$.

Оценка строится на основе решения $u_0(x, t)$ линейного гиперболического однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.1) при $q = 0$, с теми же начальными (1.2) и граничными (1.3) условиями, которое далее будем считать известным. Будем также полагать, что для всех коэффициентов и функций, рассматриваемых в данной работе, выполнены все необходимые условия гладкости.

2. Интегральные оценки. Предположим, что рассматриваемая нелинейная задача корректно поставлена и $u(x, t)$ – ее решение. Введем интеграл энергии системы [1]

$$I(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_V i_x(\tau)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial V_0} p\frac{\alpha}{\beta}u^2 ds \qquad (2.1)$$

$$i_x(\tau)=\rho\dot{u}^2+p|\operatorname{grad} u|^2 \qquad (2.2)$$

представляющий собой сумму кинетической и потенциальной энергии системы в момент времени $t = \tau$, $I(\tau) \geqslant 0$. Тогда справедливо соотношение [1]

$$A(\tau)=I(\tau)-I(0) \quad \left(A(\tau)=\int\limits_0^\tau \int\limits_D q\dot{u}\,dx\,dt\right) \qquad (2.3)$$

имеющее ясный физический смысл.

Для момента времени τ введем в рассмотрение волновой объем внешних воздействий $\Omega_D(\tau)$ как множество всех точек x ($x \in V$), охваченных возмущением от действия внешних сил (которые по условию локализованы в области D) в промежутке времени от $t = 0$ до $t = \tau$. Это можно сделать, поскольку скорость распространения возмущений в системе (вне области D) $C = (p/\rho)^{1/2}$ конечна.

Представим $I(\tau)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$I(\tau)=I_I(\tau)+I_N(\tau) \qquad (2.4)$$

где $I_I(\tau)$ – полная энергия волнового объема $\Omega_D(\tau)$ и $I_N(\tau)$ – полная энергия оставшегося невозмущенного внешними воздействиями объема рассматриваемой системы. Принимая во внимание, что $I_I(\tau) \geqslant 0$ и полагая $I_I(\tau) = 0$, получим следующую оценку:

$$A(\tau)\geqslant I_N(\tau)-I(0) \qquad (2.5)$$

Особенность последнего неравенства состоит в том, что его правую часть можно записать через решение $u_0(x, t)$ однородного дифференциального уравнения, поскольку это решение совпадает с решением нелинейной задачи вне волнового объема внешних воздействий (более точно, вне области влияния D) [1], где точки системы "не знают" о нелинейном внешнем воздействии в промежутке времени от $t = 0$ до $t = \tau$.

Таким образом, неравенство (2.5) представляет собой нижнюю оценку работы внешних сил для нелинейной системы в интервале времени от нуля до τ, или другими словами, максимальное значение работы, которое может совершить система за этот промежуток времени.

3. Волновой объем внешних воздействий. Для интегральной оценки (2.5) помимо решения однородного дифференциального уравнения необходимо знать волновой объем внешних воздействий.

В однородной среде (ρ и p не зависят от пространственных координат x) задача о нахождении волнового объема (точно также как и для областей влияния и зависимости) сводится к геометрической – построению внешней огибающей сфер $S(\xi, C\tau)$ когда ξ пробегает ∂D (принцип Гюйгенса). Эта внешняя огибающая будет границей волнового объема $\partial\Omega_D(\tau)$. Другой способ заключается в построении волновых лучей.

Зависимость характеристик среды от пространственных координат изменяет форму волновых лучей, но они остаются перпендикулярными волновому фронту. Здесь также можно воспользоваться принципом Гюйгенса для нахождения волнового объема, либо непосредственно интегрировать систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для определения траектории волнового луча [2]. При этом необходимо проявлять некоторую осторожность так как зависимость характеристик среды от пространственных координат может привести к различным волновым эффектам, которые должны учитываться при построении волнового объема (образование зон теней, волноводов, каустик и т.д.).

4. Уточненные интегральные оценки. Получить более точные верхние значения работы системы $W(\tau) = -A(\tau)$ можно за счет нетривиальной оценки полной энергии волнового объема $I_l(\tau)$ (напомним, что вначале она была принята равной нулю). Рассмотрим одну из возможных схем построения таких оценок.

Для произвольной точки ξ волнового объема внешних воздействий $\Omega_D(\tau)$, лежащей вне области D, рассмотрим плотность полной энергии $i_\xi(\tau)$ в момент времени $t = \tau$, определяемой формулой (2.2). Функцию $u = u(\xi, \tau)$ представим как решение однородного дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями

$$u\Big|_{t=\eta} = U_\eta(x), \quad \dot{u}\Big|_{t=\eta} = \dot{U}_\eta(x); \quad x \in \Omega_\xi(\chi), \quad \chi = \tau - \eta \tag{4.1}$$

При этом $\Omega_\xi(\chi)$ – область зависимости ξ не должна иметь пересечений с областью D, что всегда можно достичь за счет соответствующего выбора момента времени η ($0 < \eta < \tau$). При необходимости (если $\Omega_\xi(\chi)$ выходит на границу системы) постановку задачи замыкают граничные условия на границе ∂V (1.3). В случае однородной среды при n = 1, 2, 3 такие представления задаются формулами Даламбера, Пуассона и Кирхгофа соответственно.

Граница волнового объема внешних воздействий $\partial\Omega_D(\eta)$ в момент времени $t = \eta$ делит $\Omega_\xi(\chi)$ на две области (фиг. 2): в первой $U_\eta(x) = u_0(x, \eta)$ и $\dot{U}_\eta(x) = \dot{u}_0(x, \eta)$ совпадают с известным решением рассматриваемого однородного дифференциального уравнения с начальными (1.2) и граничными (1.3) условиями; во второй начальные условия $U_\eta(x) = u_n(x, \eta)$ и $\dot{U}_\eta(x) = \dot{u}_n(x, \eta)$ возмущены внешними нелинейными воздействиями.

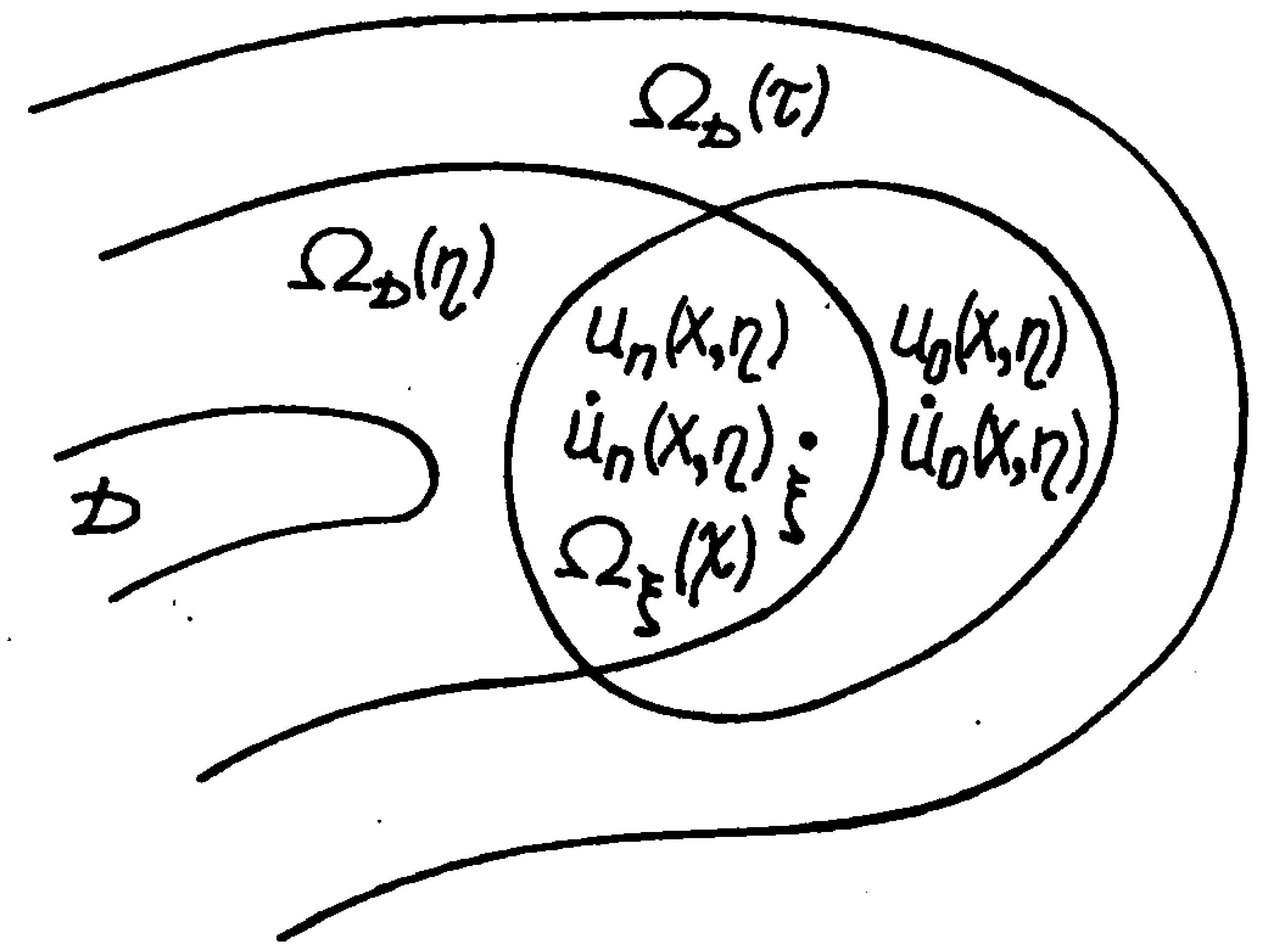
Будем искать нижнее значение функционала плотности полной энергии, используя соответствующее представление решения $u = u(\xi, \tau)$,

$$\mathrm{i}_\xi(\tau, \eta) = \inf_{u_n, \dot{u}_n} i_\xi(\tau) \tag{4.2}$$

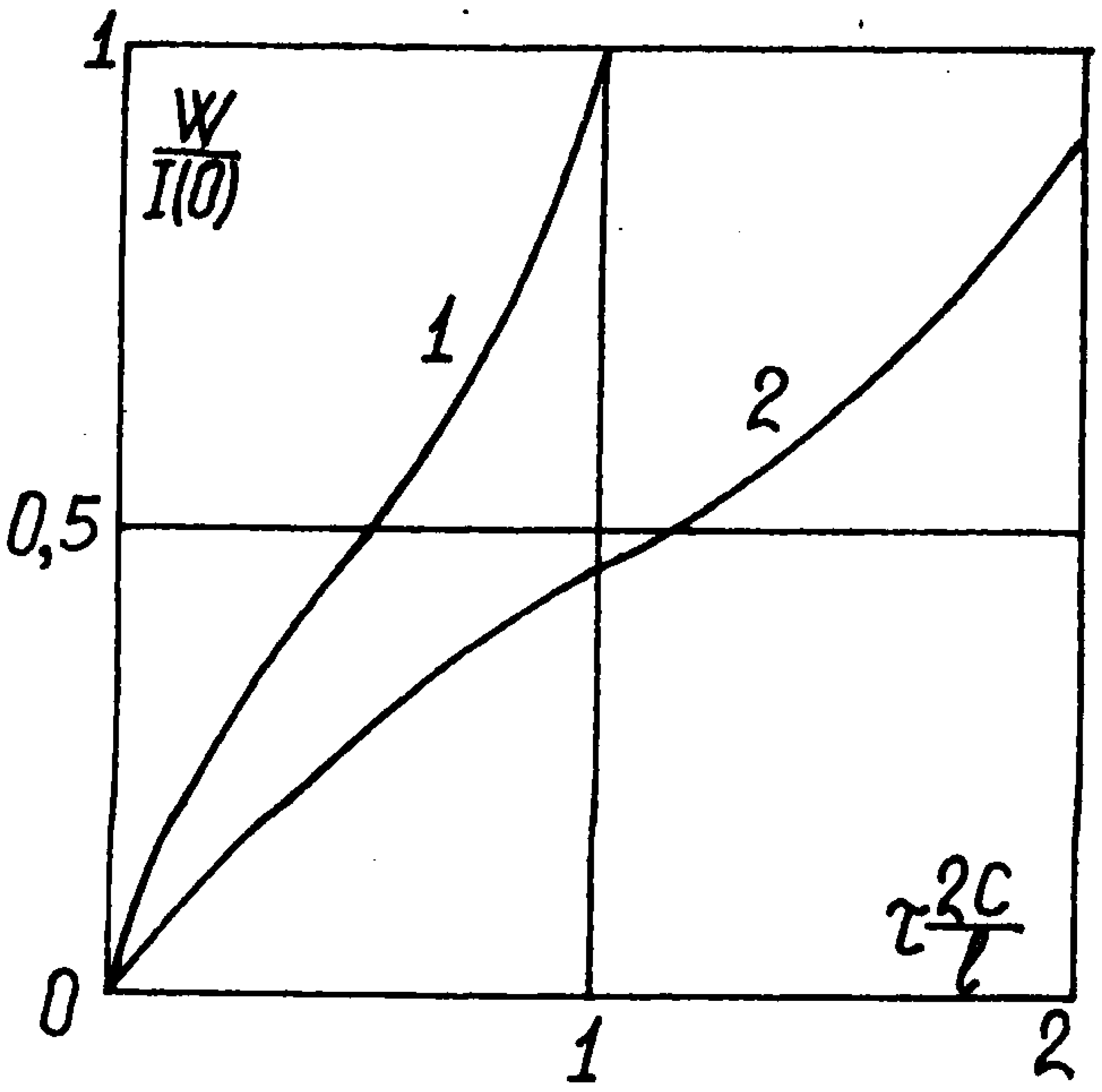
при условии, что начальные условия заданы в некоторой области известным решением $u_0(x, t)$, а вне этой области произвольны. Дополнительным условием является непрерывность функции $u(x, t)$ на границе волнового объема $\partial\Omega_D(\eta)$:

$$u_n(\partial\Omega_D(\eta), \eta) = u_0(\partial\Omega_D(\eta), \eta) \tag{4.3}$$

которое следует из физических соображений.



Фиг. 2



Фиг. 3

Некорректность сформулированной экстремальной задачи может быть связана с двумя причинами [3]: либо функционал $i_\xi(\tau)$ неограничен снизу на некоторых множествах M_u и $M_{\dot u}$, $u_n \in M_u$, $\dot u_n \in M_{\dot u}$ (обычно M_u и $M_{\dot u}$ – множества дифференцируемых функций), либо он ограничен снизу, но его нижняя грань не достигается на M. Очевидно, что функционал $i_\xi(\tau)$ ограничен снизу (например, нулевым значением $i_\xi(\tau) \geqslant 0$) и поскольку знание минимального элемента для сформулированной экстремальной задачи не требуется, то она является корректно поставленной и ее решение можно найти, используя хорошо известные подходы [3].

Это решение также зависит от параметра η, и поэтому из полученного параметрического множества нижних оценок логично выбрать наибольшую, так как она будет наиболее близкой к реальной, т.е.

$$\mathbf{i}_\xi(\tau) = \max_\eta \mathbf{i}_\xi(\tau,\eta) \tag{4.4}$$

Если удастся получить нетривиальное решение для $\mathbf{i}_\xi(\tau)$, то интегрируя по всему волновому объему (кроме области D) получим нетривиальную оценку полной энергии волнового объема

$$I_l(\tau) \geqslant I_l(\tau) = \int\limits_{\Omega_D(\tau)-D} \mathbf{i}_\xi(\tau)d\xi \tag{4.5}$$

и волновую оценку можно будет записать следующим образом:

$$A(\tau) \geqslant I_l(\tau) + I_N(\tau) - I(0) \tag{4.6}$$

5. Пример. Рассмотрим неоднородное одномерное волновое уравнение

$$\rho\ddot u - p\partial^2 u/\partial x^2 = q \tag{5.1}$$

описывающее, например, колебания однородной струны (ρ и p – постоянны) с закрепленными концами

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{5.2}$$

где l – длина струны.

Для определенности зададим следующие начальные условия

$$u\big|_{t=0} = U_0(x) = a\sin x \quad \text{и} \quad \dot u\big|_{t=0} = \dot U_0(x) = 0 \tag{5.3}$$

Внешние силы q, действующие на систему при $t > 0$, сосредоточены в одной точке $x = l/2$ середине струны и нелинейным образом зависят от параметров системы.

Решение соответствующего (5.1) линейного однородного дифференциального уравнения с теми же граничными (5.2) и начальными (5.3) условиями описывает стоячую волну с частотой колебаний $\omega = \frac{\pi}{l}(p/\rho)^{1/2}$.

Для сформулированного примера получим верхнюю оценку работы, которую может совершить система в зависимости от времени.

В соответствии с (2.5) оценка работы, совершаемая системой $W(\tau) = -A(\tau)$, будет иметь вид

$$W(\tau) \leq p\frac{a^2\pi}{4l}\left(2\omega\tau + \frac{1}{2}\sin 2\omega\tau \cos 2\omega\tau\right) \tag{5.4}$$

Улучшить верхние значения (5.4) работы, совершаемой системой можно за счет нетривиальной оценки полной энергии волнового объема.

Для точки $\xi \neq {}^1/2l$ и момента времени τ введем в рассмотрение плотность полной энергии согласно (2.2).

Решая вариационную задачу (4.1–4.4) для рассматриваемого примера найдем нижнюю оценку полной энергии волнового объема, которую затем подставим в оценку работы внешних сил (4.6).

Результаты вычислений представлены на фиг. 3, где кривая *1* соответствует волновым оценкам (5.4) и кривая *2* – уточненным волновым оценкам верхних значений работы системы от времени.

Был рассмотрен [4] и более содержательный пример использования волновых оценок, а именно для решения задач хрупкого динамического разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 436 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
4. *Kotousov A.G.* Energy wave approach to the fast brittle fracture mechanics // Intern. J. Fract. 1993. V. 64. P.R 59–64.

Московская обл.

Поступила в редакцию
9.VIII.1994

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. С.В. Захарова, В.М. Шихман

ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассматриваются установившиеся изгибные колебания упругой полуполосы со свободными от напряжений продольными гранями и заданной на торце кинематической нагрузкой. Решение сводится к представлению в рамках метода однородных решений, описывающему напряженно-деформированное состояние как во внутренней области полуполосы, так и на торце, и адекватно отражающему особенности напряженного состояния в угловых точках. Аналитически и численно показана разрешимость бесконечных алгебраических систем для определения коэффициентов разложения.

Решение подобных задач альтернативными методами ранее рассматривалось в [1–3].

Пусть в безразмерной системе координат полуполоса занимает область $0 \leq x < \infty$, $|y| \leq 1$, и на границах области выполняются условия

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0$$