13. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
14. *Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г.* Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 229 с.
15. *Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г.* Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 944–948.

Киев

Поступила в редакцию
14.II.1995

УДК 531.36:534.1

© 1996 г. Г.А. Леонов

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА МЕТОДОМ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ

Предлагается построение простых разрывных систем сравнения с нелинейными элементами типа "сухое трение". Множества замкнутых траекторий таких систем, бесконтактных по отношению к векторному полю исходной системы, позволяют просто получать оценки области диссипативности. Аналогичный подход используется также для построения кольцевых областей, из существования которых следует отсутствие свойства конвергенции у системы Льенара с периодическим аддитивным членом.

Имеется много результатов по диссипативности неавтономного уравнения Льенара [1–3]. Многие оценки области диссипативности основаны на рассмотрении интеграла энергии, который в некоторой части фазового пространства обладает свойствами функции Ляпунова. В других же частях фазового пространства оказывается необходимым проводить дополнительные специальные построения и оценки вдоль рассматриваемых траекторий. Все это затрудняет получение эффективных оценок глобальных аттракторов уравнения Льенара. Использование вместо интеграла энергии траекторий разрывных систем сравнения позволяет избежать этих трудностей и сформулировать теоремы о локализации аттракторов неавтономного уравнения Льенара.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(F(y) - E(t)) - x, \quad \frac{dx}{dt} = y \tag{1}$$

где $F(y)$, $E(t)$ – удовлетворяющие условию Липшица функции, μ – положительное число.

В дальнейшем будем полагать, что для некоторых положительных чисел α и k выполнены неравенства

$$\alpha\mu > 2, \quad \frac{F(y) - E(t)}{y} > \frac{\alpha y - k \operatorname{sign} y}{y}, \quad \forall t \in R^1, \quad \forall y \neq 0 \tag{2}$$

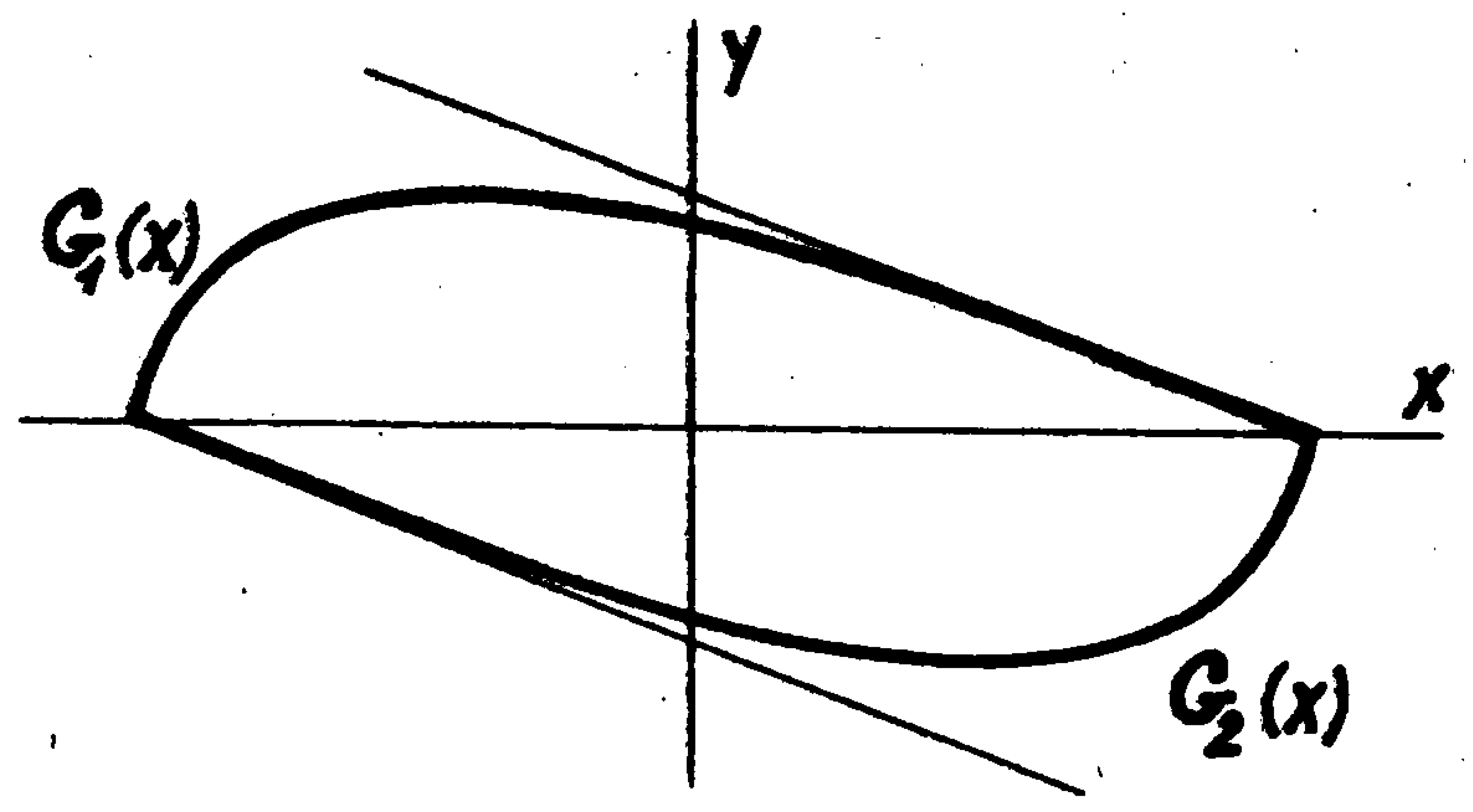
Предположение (2) достаточно естественно и традиционно для систем Льенара [1–3].

Рассмотрим линейные системы

$$\frac{dy}{dt} = -\mu\alpha y - x + \mu k, \quad \frac{dx}{dt} = y \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mu\alpha y - x - \mu k, \quad \frac{dx}{dt} = y \tag{4}$$

Рассмотрим также положительную полутраекторию системы (3) с начальными данными



Фиг. 1

$y(0) = 0$, $x(0) = -\mu k$ и положительную полутраекторию системы (4) с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) = \mu k$ (фиг. 1).

Этим траекториям соответствуют решения $G_1(x, \mu k)$ и $G_2(x, \mu k)$ соответственно уравнений первого порядка

$$G\frac{dG}{dx} = -\mu\alpha G - x + \mu k, \quad G\frac{dG}{dx} = -\mu\alpha G - x - \mu k \tag{5}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\Omega(\alpha,k) = \{x \in [-\mu k, \mu k],\ G_2(x,\mu k) \leqslant y \leqslant G_1(x,\mu k)\}$$

Напомним, что аттрактором системы (1) называют инвариантное притягивающее множество. Если областью притяжения аттрактора при $t \to \infty$ является все фазовое пространство R^2, то такой аттрактор называется глобальным.

Теорема 1. Глобальный аттрактор системы (1) содержится в множестве $\Omega(\alpha, k)$.

Доказательство. Пусть неравенство (2) выполнено для $k = k_0$. Очевидно, что оно выполнено также и для всех $k \geqslant k_0$. Но тогда для любой точки (x_0, y_0) множества $R^2 \backslash \Omega(\alpha, k_0)$ существует число $k \geqslant k_0$, такое, что (x_0, y_0) принадлежит границе $\Omega(\alpha, k)$. Таким образом, имеем семейство замкнутых кривых, покрывающих множество $R^2 \backslash \Omega(\alpha, k_0)$.

Покажем, что все эти кривые почти всюду за исключением точек $\{y = 0, x \in R^1\}$ бесконтактны, и траектории системы (1) "прошивают" эти кривые снаружи внутрь. Для этого воспользуемся принципом сравнения Чаплыгина–Камке [4–7] и неравенством (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu(F(y) - E(t)) - x}{y} < \frac{-\mu(\alpha y - k\operatorname{sign} y) - x}{y}$$

$$\forall x \in R^1, \quad \forall y \neq 0, \quad \forall t \in R^1$$

Из принципа сравнения следует, что решения $G_i(x)$, которые соответствуют траекториям системы

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(\alpha y - k\operatorname{sign} y) - x, \quad \frac{dx}{dt} = y$$

и решение $y(t)$, $x(t)$ системы (1) обладает следующим свойством в точке $t = t_0$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0) = G_i(x_0)$:

$$dy/dx < dG_i/dx$$

Отсюда следует требуемая бесконтактность кривых $y = G_i(x, \mu k)$ по отношению к векторному полю системы (1). Из бесконтактности почти всюду этого семейства кривых и следует утверждение теоремы.

Заметим, что выполнены неравенства

$$G_1(x,\mu k) \leqslant R_1(x - \mu k), \quad G_2(x,\mu k) \geqslant R_1(x + \mu k)$$

$$(R_1 = -\alpha\mu/2 + [(\alpha\mu)^2/4 - 1]^{1/2})$$

Поэтому множество $\Omega(\alpha, k)$ расположено в полосе

$$\{|y| \leqslant 2k/(\alpha-\mu^{-1}),\ x \in R^1\}$$

Отсюда следует, в частности, известный результат Картрайт [1–3] о том, что глобальный аттрактор системы (1) по координате y равномерно ограничен при изменении параметра $\mu \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим множество $\Omega_0 = \bigcap\limits_{\alpha,k} \Omega(\alpha,k)$, где пересечение берется по всем параметрам α и k, удовлетворяющим условию (2).

Следствие 1. Глобальный аттрактор системы (1) содержится в множестве Ω_0.

Покажем, как можно применять это утверждение на простейшем примере, когда $E(t) \equiv 0$ и $F(y)$ – нелинейность Ван-дер-Поля

$$F(y) = y^3/3 - y \tag{6}$$

Сначала полагая $\alpha = 2/\mu + \varepsilon$, где ε – произвольно малое положительное число, получим, что условия (2) выполнены при

$$k = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\mu} + 2\varepsilon + 1\right)^{3/2}$$

Таким образом, множество Ω_0 расположено в полосе

$$\left\{|x| \leqslant \frac{2\mu}{3}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)^{3/2},\ y \in R^1\right\}$$

Далее, полагая, что $\mu > {}^2/_3$, положим $\alpha = 3$. Тогда условия (2) выполнены при любом $k > 16/3$. Таким образом, множество Ω_0 расположено в параллелограмме

$$\left\{|x| \leqslant \frac{16}{3}\mu,\ \left|y + \frac{x}{3\mu - 1}\right| \leqslant \frac{16}{3}\frac{1}{3-\mu^{-1}}\right\}$$

Окончательно получим включение

$$\Omega_0 \subset \left\{|x| \leqslant \frac{2\mu}{3}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)^{3/2},\ \left|y + \frac{x}{3\mu - 1}\right| \leqslant \frac{16}{3}\frac{1}{3-\mu^{-1}}\right\}$$

Последняя оценка асимптотически точна в том смысле, что при $\mu \to \infty$ граница этого множества сколь угодно близка к некоторой части классического релаксационного колебания уравнения Ван-дер-Поля [1] (фиг. 2).

Пусть теперь выполнены неравенства

$$\beta\mu > 2,\quad \frac{F(y) - E(t)}{y} < \frac{-\beta y + \nu \operatorname{sign} y}{y},\quad \forall t \in R^1,\quad \forall y \neq 0,\quad |y| \leqslant y_0 \tag{7}$$

(β, ν, y_0 – некоторые положительные числа). Рассмотрим решение $G_3(x, \mu\nu)$ уравнения

$$GdG/dx = \mu\beta G - x - \mu\nu$$

с начальными данными $G_3(\mu\nu, \mu\nu) = 0$ и решение $G_4(x, \mu\nu)$ уравнения

$$GdG/dx = \mu\beta G - x + \mu\nu$$

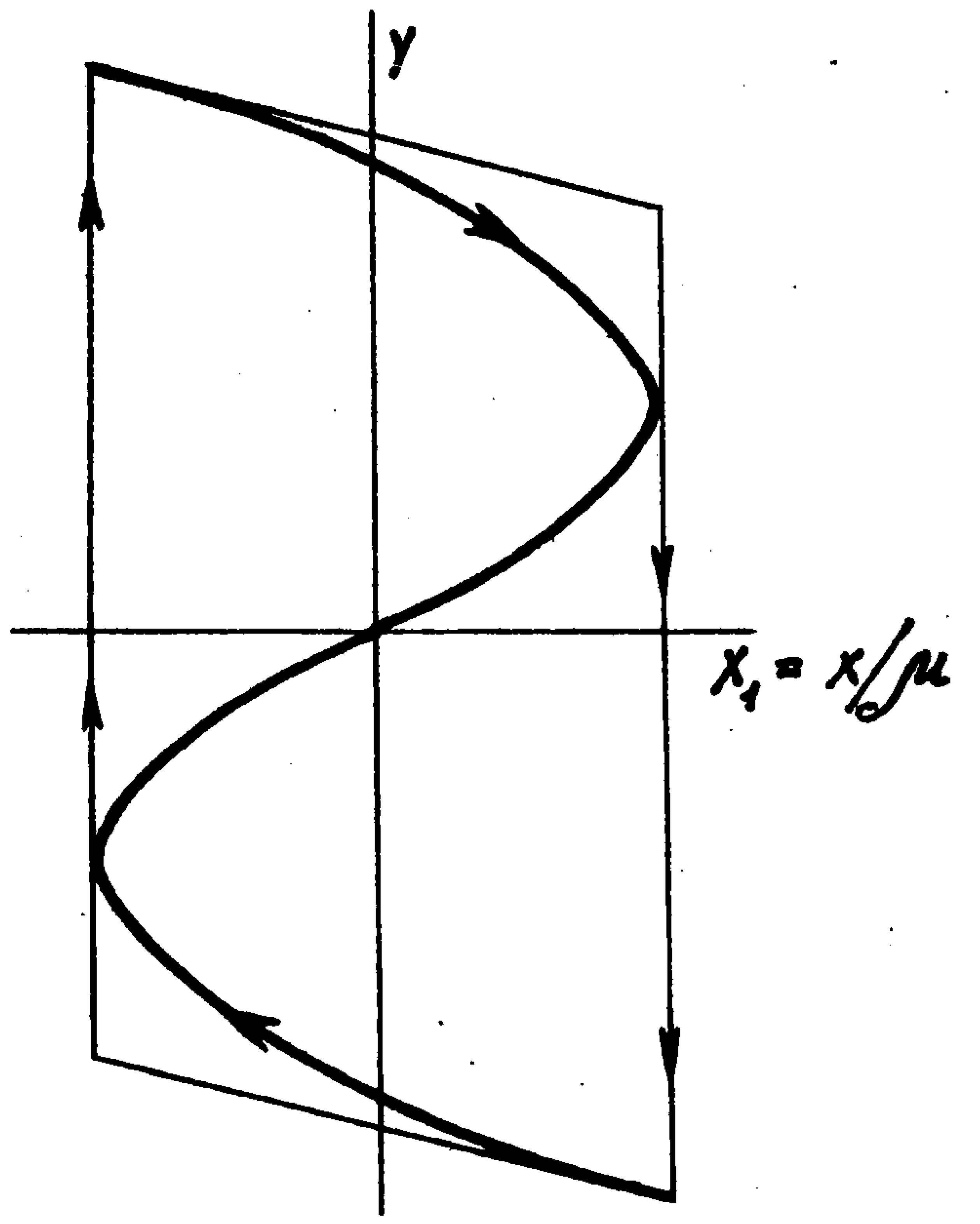
с начальными данными $G_4(-\mu\nu, \mu\nu) = 0$ (фиг. 3). Отметим, что так же как и уравнения (5), эти уравнения соответствуют линейным уравнениям второго порядка типа (3) и (4).

Введем в рассмотрение множество

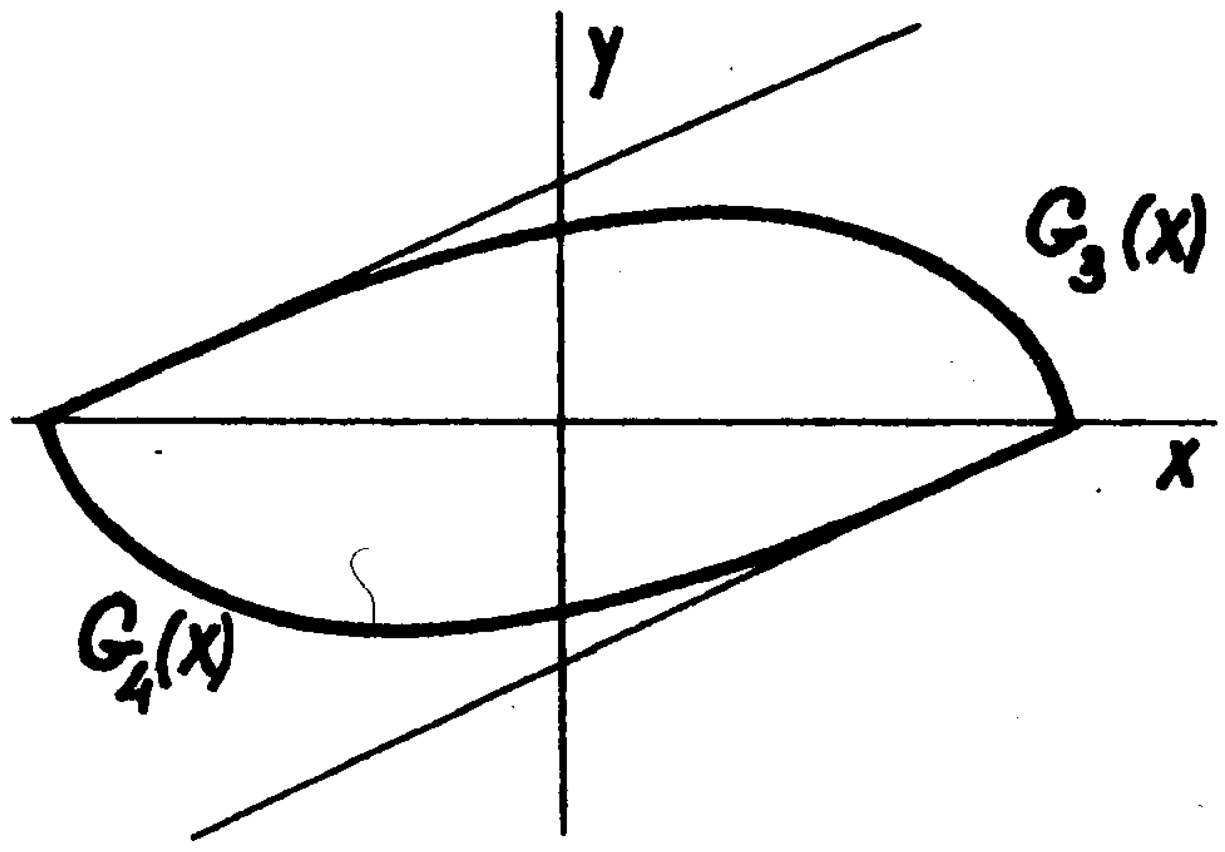
$$\Phi(\nu) = \{x \in [-\mu\nu, \mu\nu],\ G_4(x,\mu\nu) \leqslant y \leqslant G_3(x,\mu\nu)\}$$

Теорема 2. Пусть выполнены неравенства (2), (7) и

$$|G_3(x,\mu\nu)| \leqslant y_0,\quad |G_4(x,\mu\nu)| \leqslant y_0,\quad \forall x[-\mu\nu,\mu\nu]$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда множество $\Omega(k)\backslash\Phi(\nu)$ положительно инвариантно для решений системы (1).

Доказательство этой теоремы повторяет рассуждения теоремы (1). Бесконтактность при $y \neq 0$ границы множества Φ здесь также следует из принципа Чаплыгина–Камке и из неравенства (7).

Следствие 2. Если функция $E(t)$ периодична и выполнены условия теоремы 2, то система (1) не обладает свойством конвергентности, т.е. устойчивости в целом периодического решения.

В самом деле, множество Φ отрицательно инвариантно, и по теореме Брауэра в Φ существует периодическое решение. Ясно, что существование этого решения в множестве Φ и положительная инвариантность кольца $\Omega\backslash\Phi$ противоречат свойству конвергентности. Отметим, что для проверки условий теоремы 2 иногда полезны следующие простые неравенства:

$$R_2(x-\mu\nu) \leqslant G_4(x,\mu\nu) \leqslant G_3(x,\mu\nu) \leqslant R_2(x+\mu\nu), \quad \forall x \in [-\mu\nu, \mu\nu]$$

$$(R_2 = \beta\mu/2 - [(\beta\mu)^2/4 - 1]^{1/2})$$

Рассмотрим теперь нелинейность Ван-дер-Поля (6) и $E(t) = b \sin \omega t$. Здесь b и ω – положительные числа.

Положив $\nu = b$, получим простые достаточные условия отсутствия конвергентности системы (1)

$$\beta\mu > 2, \quad 2b/(\beta - \mu^{-1}) \leqslant [3(1-\beta)]^{1/2} \tag{8}$$

При больших μ, полагая $\beta = 2/3$, отсюда получим оценку $b \leqslant 1/3$.

Отметим, что при больших μ известна следующая оценка границы области конвергенции [8, 3] $b = b_0$: $b_0 \in (2/3 - 0.01, 2/3)$.

Для непрерывной нелинейности Левинсона [3] $F(y)$:

$$\frac{dF}{dy} = \begin{cases} 1, & |y| > 1 \\ -1, & |y| < 1 \end{cases}$$

вместо неравенств (8) получим условие

$$\mu > 2, \quad b \leqslant (1 - \mu^{-1})/2$$

Необходимый аппарат для распространения предложенных здесь оценок на случай $\mu\alpha < 2$ и $\mu\beta < 2$ развит в [9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
2. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Мир, 1964. 477 с.
3. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М., Л.: Наука, 1964. 367 с.
4. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
5. *Kamke E.* Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II. Acta Math. 1932. Bd 58. S. 57–85.
6. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Non-local methods for pendulum-like feedback systems // Teunbner-texte zur Mathematik. 1992. Bd. 132. 242 s.
7. *Белых В.Н.* Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения // Системы фазовой синхронизации / Под ред. *В.В. Шахгильдяна* и *Л.Н. Белюстиной*. М.: Радио и связь, 1982. С. 45–55.
8. *Cartrwrigth M.L., Littlewood J.E.* On non-linear differential equations of the second order // Ann. Math. 1947. V. 48. № 2. P. 472–494.
9. *Леонов Г.А.* Колебания в системах с нелинейным демпфированием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 183–184.
10. *Леонов Г.А.* Оценки снизу числа циклов двумерных динамических систем. Вестн. СПб. ун-та. Серия математика, механика, астрономия. 1994. № 1. С. 42–46.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
3.IV.1994

УДК (532.5 + 539.3):534.1

© 1996 г. **А.Г. Котоусов**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Представлена процедура построения интегральных оценок для волнового уравнения с нелинейностью сосредоточенной в некоторой локальной области изучаемой системы. Для получения этих оценок требуется знание решения линейного однородного дифференциального уравнения и динамики распространения волн в системе. Точность оценок существенным образом зависит от характера внешних нагрузок, их интенсивности и длительности. Такого типа оценки имеет смысл рассматривать для процессов, длительность которых соизмерима с временем распространения волн в системе, что характерно, например, для взрывных и ударных явлений, а также динамического разрушения. Рассматривается пример построения волновых оценок для простой механической системы.

1. Постановка задачи. Многие задачи механики и физики колебаний приводят к уравнению вида [1]

$$\rho\ddot{u} = L[u]+q, \quad L[u] = \operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = U_0(x), \quad \dot{u}\big|_{t=0} = \dot{U}_0(x), \quad x\in V \tag{1.2}$$