

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ ТИПА ВИЛКИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПРОСТЕЙШЕЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматриваются достаточно гладкие n -мерные динамические системы с нечетными правыми частями, в которых реализуется простейший вид симметрии. Для случая, когда матрица линеаризации имеет одно нулевое собственное значение, а действительные части остальных собственных чисел отрицательные, получено явное выражение первого ненулевого ляпуновского коэффициента и построены инвариантные многообразия Пуанкаре; для двумерных систем приведена геометрическая иллюстрация потери устойчивости, связанная с бифуркацией рождения или с бифуркацией слияния стационарных состояний при критическом значении существенного параметра.

Явные выражения первой ляпуновской величины для двумерных и четырехмерных динамических систем с квадратичными нелинейностями впервые получены в [1]. При этом вопрос устойчивости в критическом случае был связан с характером опасности границы области устойчивости в пространстве параметров. Последней проблеме посвящена также работа [2]. Локальная качественная картина поведения динамических систем вблизи критических значений параметров не только в классических случаях [3] одного нулевого корня или пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, но и в более сложных случаях принципиально известна [4–11]. С прикладной точки зрения имеют значение также и результаты конструктивного характера для вычисления определяющих величин, причем их популярность пропорциональна элементарности привлекаемого математического аппарата.

Ниже рассматриваются системы

$$\dot{x} = f(x, v), \quad x, f \in R^n, \quad v \in R_+^1 \quad (1)$$

инвариантные относительно замены $(t, x) \rightarrow (t, -x)$, т.е. системы с нечетной по переменной состояния x правой частью: $f(-x, v) = -f(x, v)$. В таких системах точка $x = 0$ с необходимостью является состоянием равновесия. Физически это означает, что система безразлична к направлению смещения от состояния $x = 0$. Примерами могут служить осцилляторы Дюффинга и Ван-дер-Поля, а также многие транспортные аппараты (автомобиль, самолет, корабль), симметрия дифференциальных уравнений курсового движения которых означает равновозможность левого и правого поворотов. Главные части нелинейностей системы (1) в окрестности состояния $x = 0$ имеют третий порядок:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + P_i(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$P_i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{klm}^{(i)} x_k x_l x_m + o(|x|^3)$$

$$a_{ij} = \text{const}, \quad a_{klm}^{(i)} = a_{kml}^{(i)} = a_{mkl}^{(i)} = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Обозначим через λ_i собственные значения матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n$, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Пусть точка $O(0, \dots, 0) \in R^n$ является негрубым состоянием равновесия, для которого $\lambda_1 = 0$, $\text{Re } \lambda_p < 0$ ($p = 2, \dots, n$). Линейная часть системы (2) допускает, как известно, линейный интеграл с постоянными коэффициентами, возьмем его в качестве одной из неизвестных функций $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Если нумерацию переменных x_i произвести таким образом, чтобы $A_{nn} \neq 0$, то $a_n \neq 0$, и можно принять x вместо x_n .

Положим $a_i = A_{in}$. Уравнения (2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \dot{x}_s &= \sum_{r=1}^{n-1} b_{sr} x_r + b_s x + P_s(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1})) \end{aligned} \quad (3)$$

$$X(x, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n a_i P_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}))$$

$$x_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}) = \left(x - \sum_{s=1}^{n-1} a_s x_s \right) a_n^{-1}$$

$$b_{sr} = a_{sr} - b_r b_s, \quad b_s = a_{sn} a_n^{-1} \quad (s=1, \dots, n-1)$$

Приравняем нулю правые части не критических уравнений и будем искать решение соответствующей системы конечных уравнений в виде $x_r = u_r(x)$, где $u_r(0) = 0$, причем функции $u_r(x)$ разлагаются в степенные ряды, сходящиеся при достаточно малых x . Такие функции существуют [3, 12]. Ограничиваясь величинами первого порядка, находим

$$u_r = \sigma_r x + \dots, \quad \sigma_r = A_{nr} \left(\sum_{i=1}^n a_i A_{ni} \right)^{-1} \quad (r=1, \dots, n-1)$$

Для суждения об устойчивости нулевого решения системы (2) необходимо составить выражение

$$X(x, u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) = gx^3 + o(x^3)$$

На основании (3) имеем

$$x_n(x, u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)) = \sigma_n x + \dots$$

$$\sigma_n = \left(1 - \sum_{r=1}^{n-1} a_r \sigma_r \right) a_n^{-1}$$

Поэтому

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{klm}^{(i)} \sigma_k \sigma_l \sigma_m$$

Если $g < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво [3], а гиперповерхность $A_n = 0$ является безопасной [1] границей области устойчивости в пространстве параметров. При $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а гиперповерхность $A_n = 0$ — опасная граница в направлении $dA_n/dv < 0$: на ней происходит срыв изображающей точки. Здесь $A_n = |A|$ — свободный член характеристического уравнения, v — характерный параметр системы такой, что $v \leq v_+ \Rightarrow A_n \geq 0$.

Рассмотрим случай систем, линейная часть которых приведена к базису из собственных векторов. Пусть известен спектр матрицы A , который при изменении параметра v меняется следующим образом: если $v < v_+$, то $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_s < 0, \lambda_{s+1} = \kappa_1 + i\omega_1, \lambda_{s+2} = \kappa_1 - i\omega_1, \dots, \lambda_{n-1} = \kappa_q + i\omega_q, \lambda_n = \kappa_q - i\omega_q, q = 1/2(n-s), \kappa_k < 0$; если же $v > v_+$, то $\lambda_1 > 0$, характер собственных значений $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ прежний. Пусть, далее, $v = v_+$, т.е. $\lambda_1 = 0$. Систему (2) приведем к виду (суммирование по k, l, m)

$$\dot{\xi}_1 = \sum A_{klm}^{(1)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots \tag{4}$$

$$\dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2 + \sum A_{klm}^{(2)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

.....

$$\dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + \sum A_{klm}^{(s)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

$$\dot{\xi}_{s+1} = \kappa_1 \xi_{s+1} - \omega_1 \xi_{s+2} + \sum A_{klm}^{(s+1)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

$$\dot{\xi}_{s+2} = \omega_1 \xi_{s+1} + \kappa_1 \xi_{s+2} + \sum A_{klm}^{(s+2)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

.....

$$\dot{\xi}_{n-1} = \kappa_q \xi_{n-1} - \omega_q \xi_n + \sum A_{klm}^{(n-1)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

$$\dot{\xi}_n = \omega_q \xi_{n-1} + \kappa_q \xi_n + \sum A_{klm}^{(n)} \xi_k \xi_l \xi_m + \dots$$

причем $A_{klm}^{(i)} = A_{kml}^{(i)} = A_{mkl}^{(i)}$. Поскольку в уравнения для некритических переменных ξ_2, \dots, ξ_n критическая переменная ξ_1 не входит линейно, то система (4) удовлетворяет известной теореме ([12], с. 93, 94). Поэтому первый ненулевой ляпуновский коэффициент $g = A_{111}^{(1)}$. Разыскивая инвариантное многообразие системы (4) в форме $\xi_j = \xi_j(\xi_1)$, $\xi_j(\xi_1) \equiv A_j \xi_1 + B_j \xi_1^3 + \dots$, можно показать, что для его нахождения следует приравнять нулю правые части некритических уравнений. Получим

$$\begin{aligned} \xi_v &= -\frac{A_{111}^{(v)}}{\lambda_v} \xi_1^3 + \dots \quad (v = 2, \dots, s) \\ \xi_{s+1} &= -\frac{A_{111}^{(s+1)} \kappa_1 + A_{111}^{(s+2)} \omega_1}{\kappa_1^2 + \omega_1^2} \xi_1^3 + \dots \\ \xi_{s+2} &= \frac{A_{111}^{(s+1)} \omega_1 - A_{111}^{(s+2)} \kappa_1}{\kappa_1^2 + \omega_1^2} \xi_1^3 + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{n-1} &= -\frac{A_{111}^{(n-1)} \kappa_q + A_{111}^{(n)} \omega_q}{\kappa_q^2 + \omega_q^2} \xi_1^3 + \dots \\ \xi_n &= \frac{A_{111}^{(n-1)} \omega_q - A_{111}^{(n)} \kappa_q}{\kappa_q^2 + \omega_q^2} \xi_1^3 + \dots \end{aligned}$$

Поведение одномерной системы, к которой приводится задача об устойчивости нулевого решения n -мерной системы (4), описывается уравнением

$$\dot{\xi}_1 = A_{111}^{(1)} \xi_1^3 + \dots \quad (5)$$

В случае двумерных систем можно выписать в явном виде все промежуточные преобразования и дать наглядную геометрическую иллюстрацию поведения системы. Инвариантное многообразие есть

$$\xi_2 = -A_{111}^{(2)} \lambda_2^{-1} \xi_1^3 + \dots \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в первое уравнение системы

$$\dot{\xi}_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 A_{klm}^{(1)} \xi_k \xi_l \xi_m + o(|\xi|^3) \quad (7)$$

$$\dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2 + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 A_{klm}^{(2)} \xi_k \xi_l \xi_m + o(|\xi|^3)$$

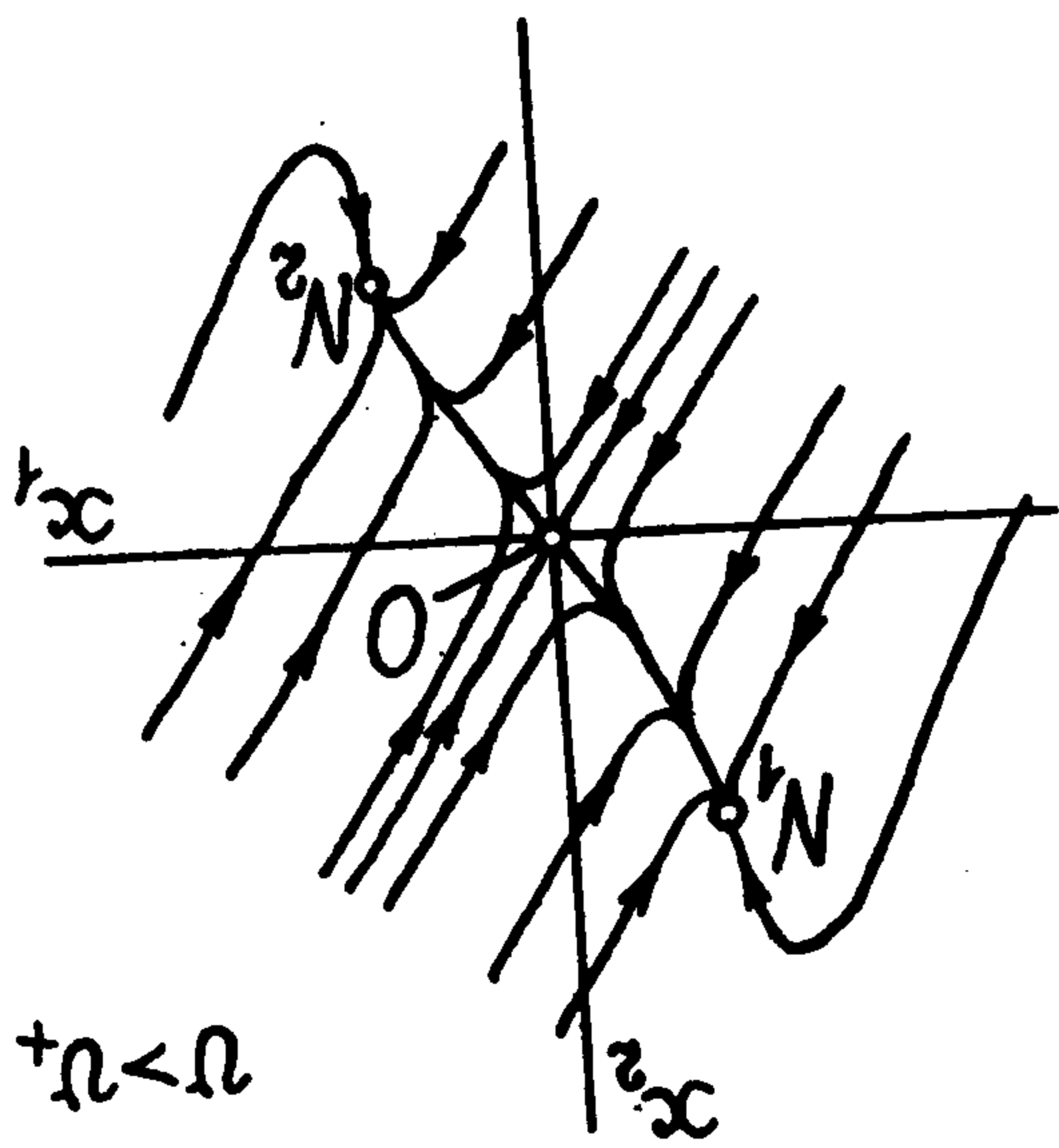
получаем уравнение (5). В некоторой конечной окрестности начала координат для вектора фазовой скорости системы (7) допустима аппроксимация $V \approx \{A_{111}^{(1)} \xi_1^3, \lambda_2, \xi_2\}$. Исходя из этого, можно построить фазовые потоки и кубическую параболу (6), притягивающую эти потоки. Число возможных ситуаций равно четырем, они отвечают случаям $A_{111}^{(1)} \geq 0, A_{111}^{(2)} \geq 0$.

На фиг. 1 инвариантное многообразие (6) изображено штриховой кривой, причем $A_{111}^{(2)} > 0$ на фиг. 1, а, б; $A_{111}^{(2)} < 0$ на фиг. 1, в, г; $A_{111}^{(1)} < 0$ на фиг. 1, а, в; $A_{111}^{(1)} > 0$ на фиг. 1, б, г.

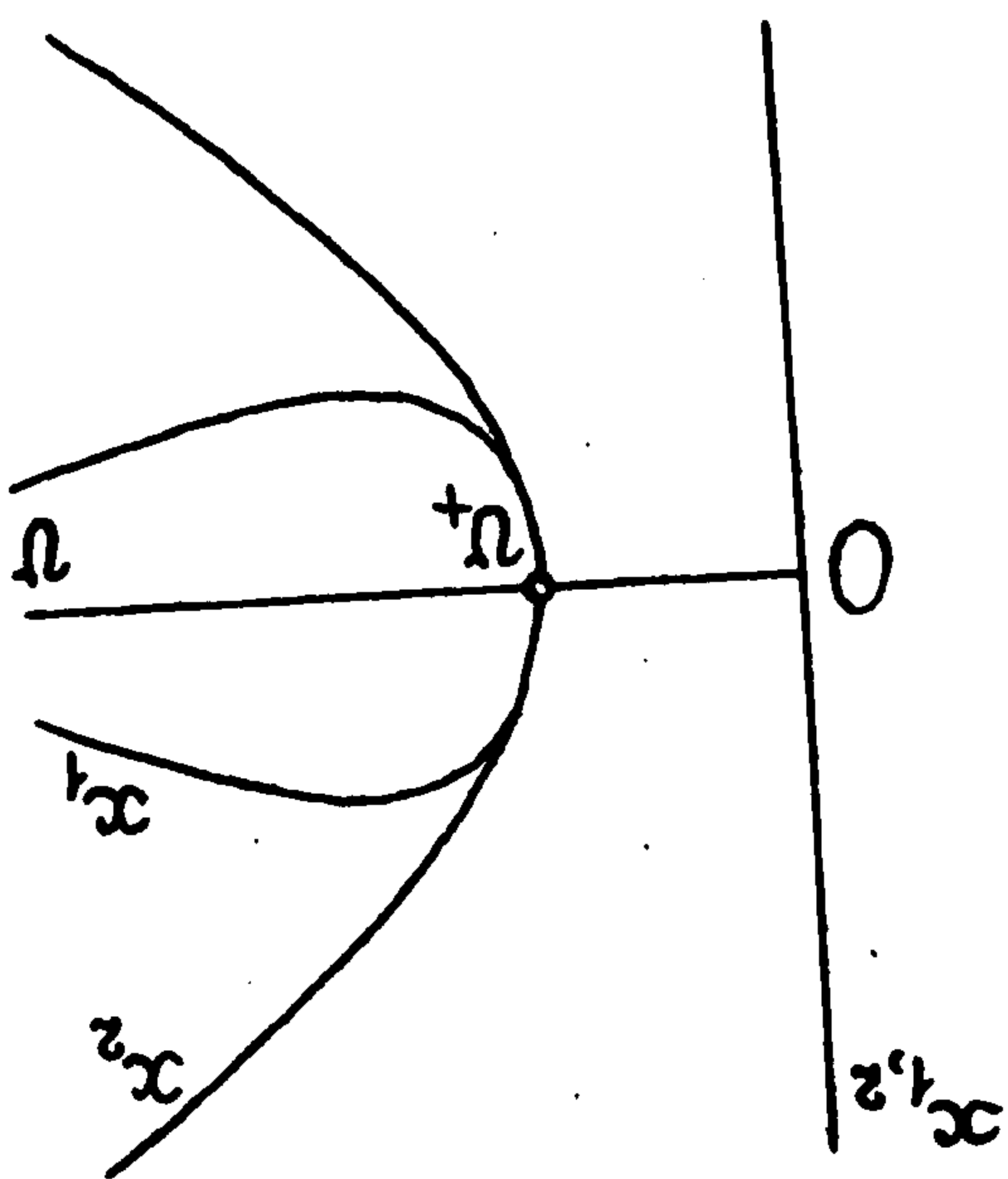
Фазовые потоки притягиваются многообразием (6), а затем вдоль него направляются в начало координат либо же уходят от последнего. В случаях фиг. 1, а, в начало координат — устойчивый узел нелинейной системы (7), в случаях фиг. 1, б, г — седло, причем кривая (6) является сепаратрисой, состоящей из усов, выходящих из начала координат.

Так как $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ при $v < v_+$, то начало координат фазовой плоскости $x_1 x_2$ является

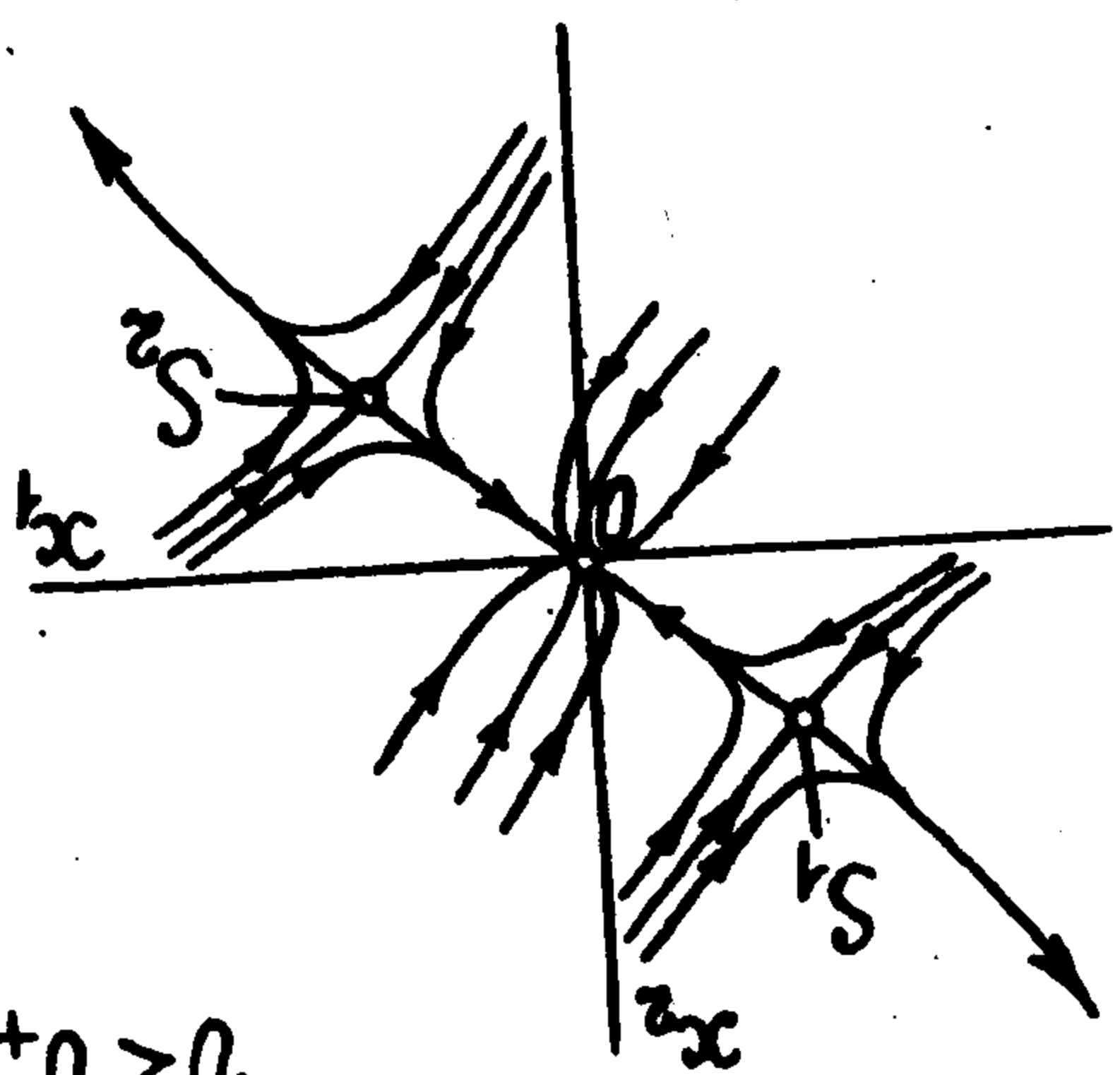
Фиг. 2



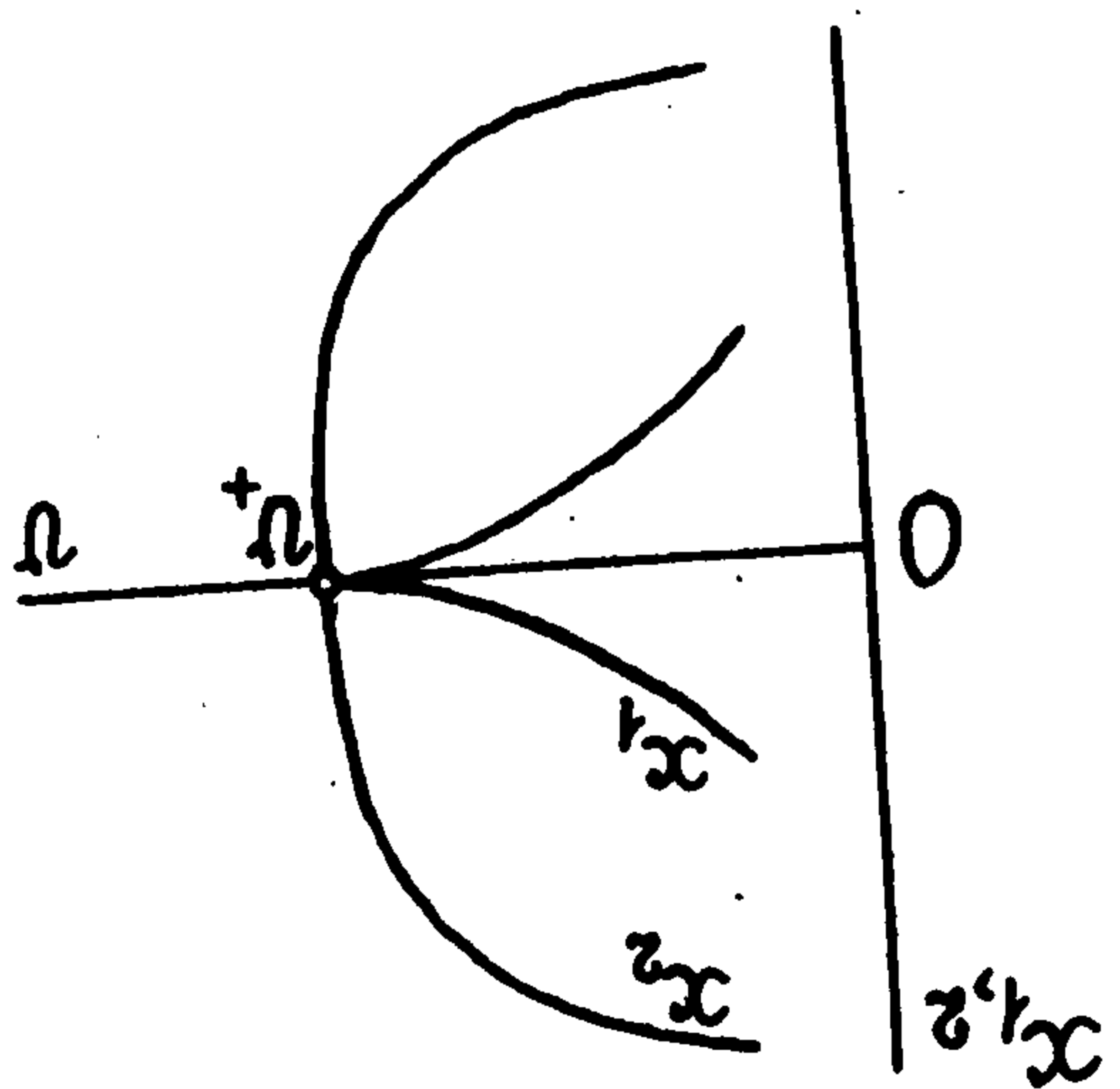
$u < \nu^+$



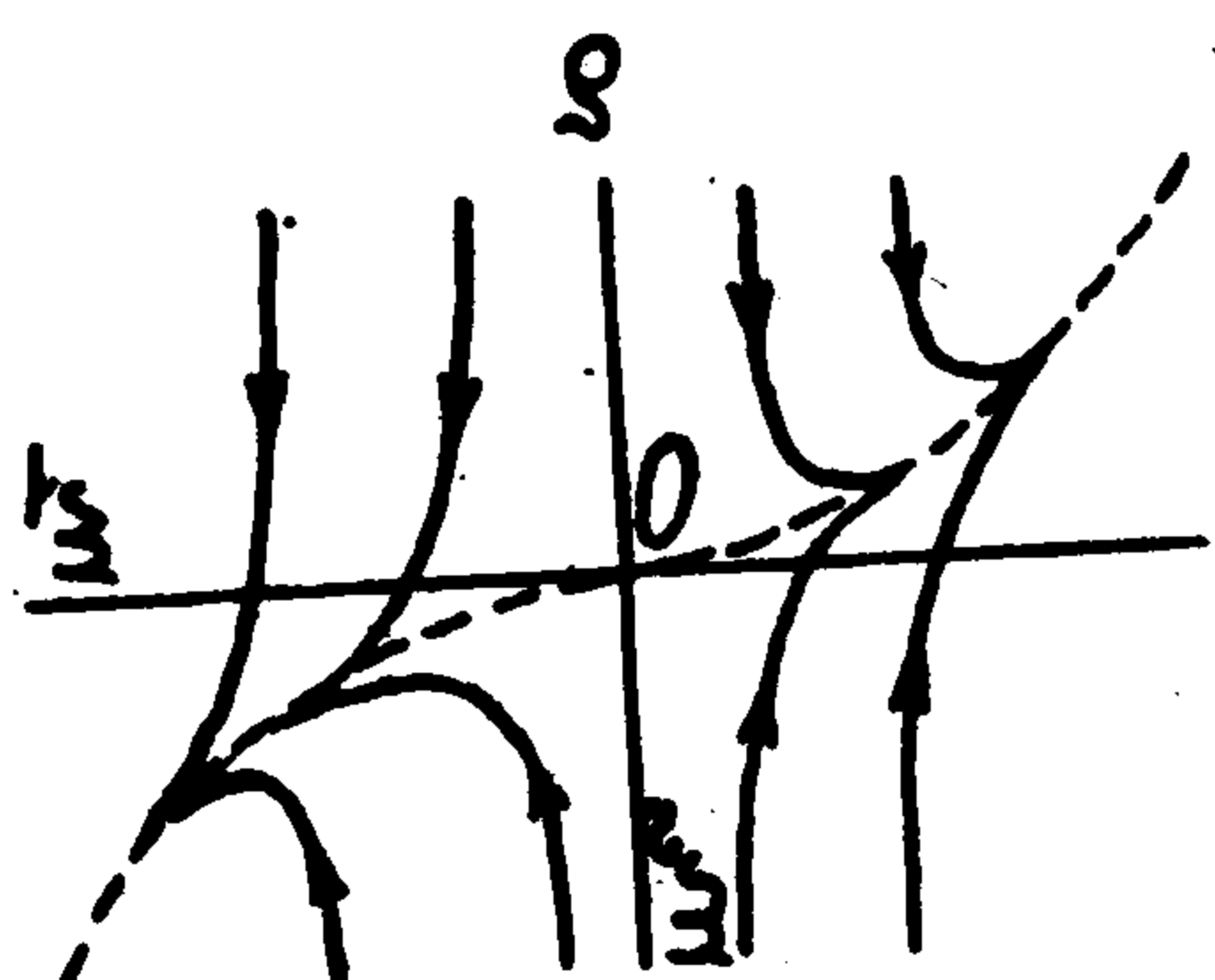
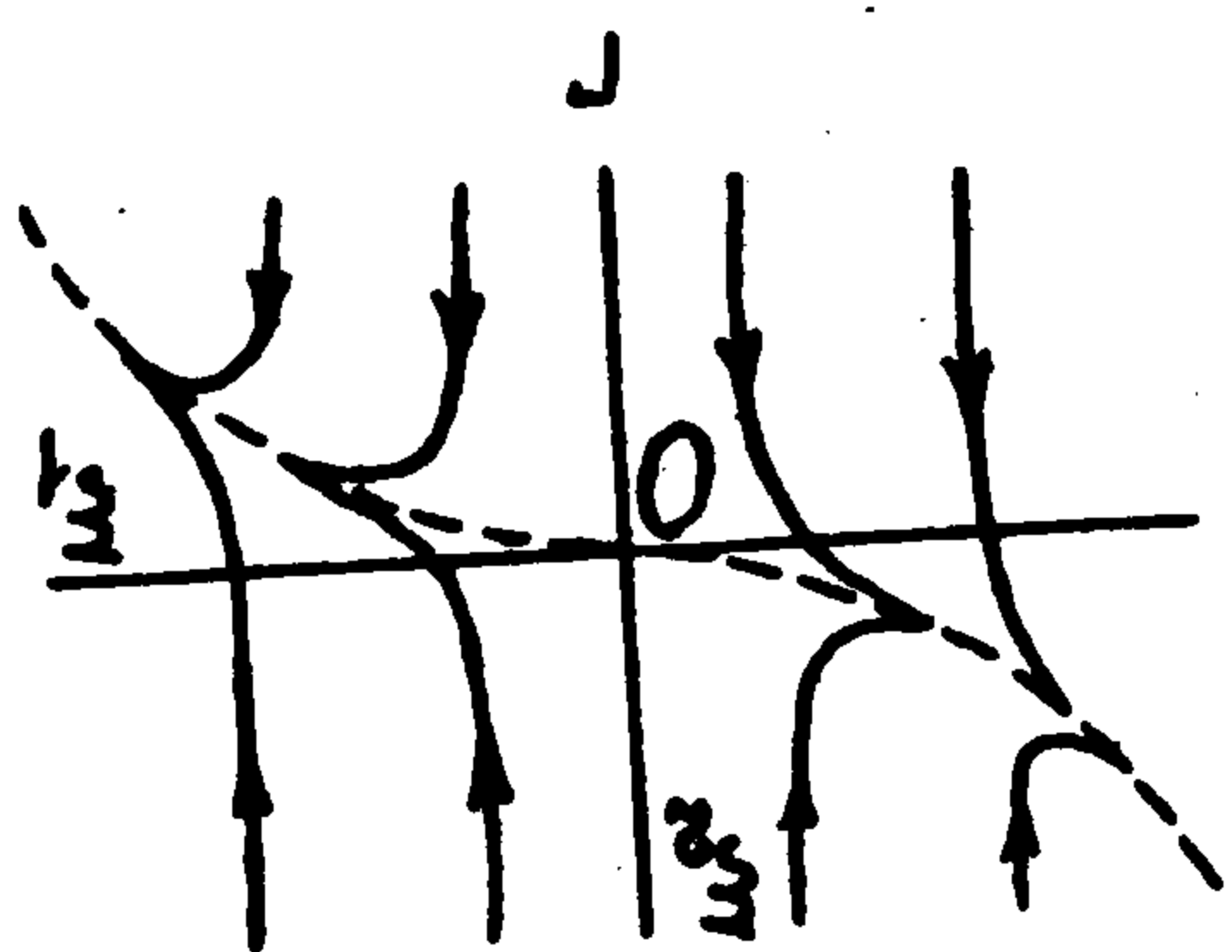
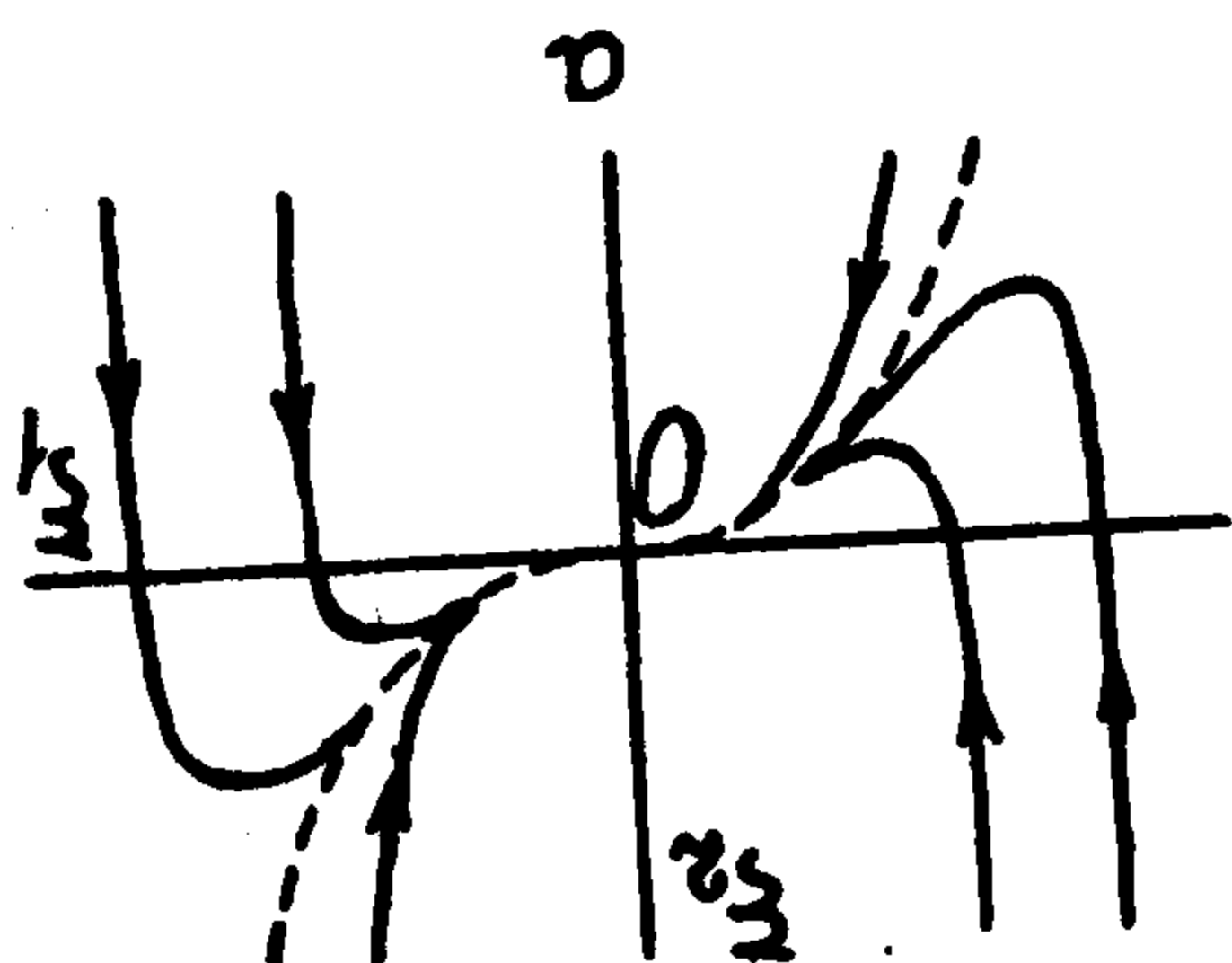
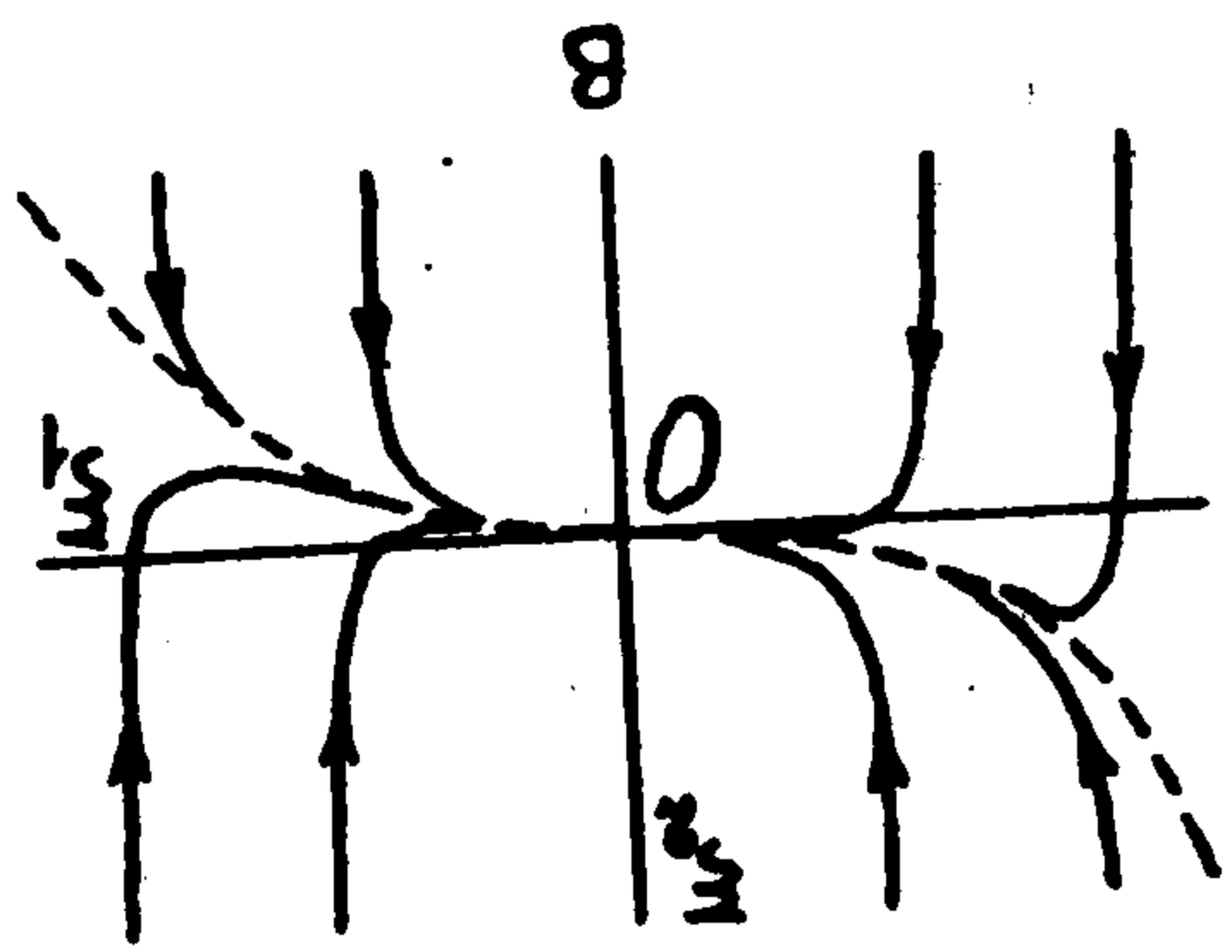
Фиг. 3



$u > \nu^+$



Фиг. 1



устойчивым узлом, а его индекс Пуанкаре $j = 1$. При $\nu > \nu_+$ имеем $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, j = -1$, т.е. точка $(0, 0)$ – седло.

Изменение знака индекса Пуанкаре начала координат как особой точки уравнений (2) при $n = 2$ или уравнений

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 A_{klm}^{(i)} \xi_k \xi_l \xi_m + o(|\xi|^3) \quad (i = 1, 2)$$

может быть объяснено или бифуркацией рождения, или бифуркацией слияния особых точек в начале координат при изменении параметра ν . Первый случай иллюстрирует фиг. 2, второй – фиг. 3.

В случае бифуркации рождения (генерации) при $\nu < \nu_+$ в конечной окрестности начала координат фазовой плоскости есть лишь одна особая точка – точка $O(0, 0)$. При $\nu = \nu_+$ в точке O рождаются две новые особые точки, так что при $\nu > \nu_+$, кроме особой точки O , имеются особые точки N_1 и N_2 , являющиеся устойчивыми узлами. Последующие возмущения для $\nu > \nu_+$ ограничены, а граница $A_2 = 0$ области устойчивости в пространстве параметров системы (2) безопасна.

В случае бифуркации слияния (аннигиляции) при $\nu < \nu_+$ в окрестности начала координат имеется пара седловых точек S_1 и S_2 (фиг. 3), расположенных симметрично относительно точки O (в этом, в частности, проявляется свойство динамических систем с симметрией). С увеличением значений параметра ν точки S_1 и S_2 приближаются к началу координат, сливаясь с ним при $\nu = \nu_+$. Граница $A_2 = 0$ в этом случае опасна, на ней происходит срыв изображающей точки.

Конфигурация кривых на фиг. 2 и 3 отвечает задаче о плоскопараллельном движении автомобиля в рамках аксиоматики [13], причем ν – продольная скорость центра масс, $x_1 = \omega$ – угловая скорость рысканья, $x_2 = u$ – боковая скорость центра масс [14]. Эти кривые синтезируют механизм потери устойчивости прямолинейного движения (которому соответствует точка $(0, 0)$ плоскости $x_1 x_2$) автомобиля с избыточной поворачиваемостью, описанный в [15].

Автор благодарит рецензента за обсуждение предмета и содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
2. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830–1832.
3. Ляпунов А.М. Собр. соч. в 3 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
4. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
5. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.
6. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
7. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
8. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 365 с.
9. Troger H., Steindl A. Nonlinear stability and bifurcation theory. Wien, New York: Springer-Verlag, 1991. 407 p.
10. Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. Пущино: Науч. центр биол. исследований АН СССР, 1985. 56 с.
11. Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Портреты бифуркаций. М.: Знание, 1989. 45 с.
12. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

13. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
14. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 229 с.
15. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 944–948.

Киев

Поступила в редакцию
14.II.1995

УДК 531.36:534.1

© 1996 г. Г.А. Леонов

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА МЕТОДОМ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ

Предлагается построение простых разрывных систем сравнения с нелинейными элементами типа "сухое трение". Множества замкнутых траекторий таких систем, бесконтактных по отношению к векторному полю исходной системы, позволяют просто получать оценки области диссипативности. Аналогичный подход используется также для построения кольцевых областей, из существования которых следует отсутствие свойства конвергенции у системы Льенара с периодическим аддитивным членом.

Имеется много результатов по диссипативности неавтономного уравнения Льенара [1–3]. Многие оценки области диссипативности основаны на рассмотрении интеграла энергии, который в некоторой части фазового пространства обладает свойствами функции Ляпунова. В других же частях фазового пространства оказывается необходимым проводить дополнительные специальные построения и оценки вдоль рассматриваемых траекторий. Все это затрудняет получение эффективных оценок глобальных аттракторов уравнения Льенара. Использование вместо интеграла энергии траекторий разрывных систем сравнения позволяет избежать этих трудностей и сформулировать теоремы о локализации аттракторов неавтономного уравнения Льенара.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = -\mu(F(y) - E(t)) - x, \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (1)$$

где $F(y)$, $E(t)$ – удовлетворяющие условию Липшица функции, μ – положительное число.

В дальнейшем будем полагать, что для некоторых положительных чисел α и k выполнены неравенства

$$\alpha\mu > 2, \quad \frac{F(y) - E(t)}{y} > \frac{\alpha y - k \operatorname{sign} y}{y}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad \forall y \neq 0 \quad (2)$$

Предположение (2) достаточно естественно и традиционно для систем Льенара [1–3].

Рассмотрим линейные системы

$$\frac{dy}{dt} = -\mu\alpha y - x + \mu k, \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\mu\alpha y - x - \mu k, \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (4)$$

Рассмотрим также положительную полутраекторию системы (3) с начальными данными