УДК 531.011

© 1996 г. В.Ф. Журавлев

ТЕОРЕМА О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дается пополнение геометрической интерпретации Мак-Куллага движения твердого тела в случае Эйлера. Показывается, что это пополнение исчерпывается эффектами чисто кинематического и геометрического характера.

Согласно геометрической интерпретации Пуансо движение тела по инерции вокруг неподвижной точки можно представить как качение без скольжения его эллипсоида инерции по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента. При этом центр эллипсоида инерции совпадает с центром закрепления тела.

Геометрическая интерпретация Пуансо не является полной, если под полной геометрической интерпретацией понимать наглядное представление последовательности положений твердого тела в пространстве без указания моментов времени, в которые эти положения достигаются. Другими словами, полная геометрическая интерпретация есть интерпретация траектории в конфигурационном многообразии (группа $SO(3)$) без указания расписания движения по ней.

Неполнота геометрической интерпретации Пуансо связана с условием отсутствия проскальзывания и может быть проиллюстрирована на примере плоского движения овального диска. Пусть в некоторый момент времени точка A диска касается горизонтальной прямой, по которой и происходит качение без скольжения. Вопрос о том, в какой точке прямой придет с ней в соприкосновение некоторая другая точка диска B, требует дополнительной операции интегрирования, без которой последовательность положений диска в плоскости указана быть не может. При этом наглядность геометрической интерпретации Пуансо не должна вводить в заблуждение: она связана с иллюзией полной определенности качения без скольжения в обыденной жизни.

Известна еще одна геометрическая интерпретация движения тела в случае Эйлера, предложенная Мак-Куллагом [1].

Мак-Куллаг исходит из двух первых интегралов, записанных в проекциях кинетического момента на связанные с телом оси. Интеграл кинетической энергии имеет вид

$$x^2/A + y^2/B + z^2/C = 2T$$

представляющий собой уравнение эллипсоида в осях x, y, z:

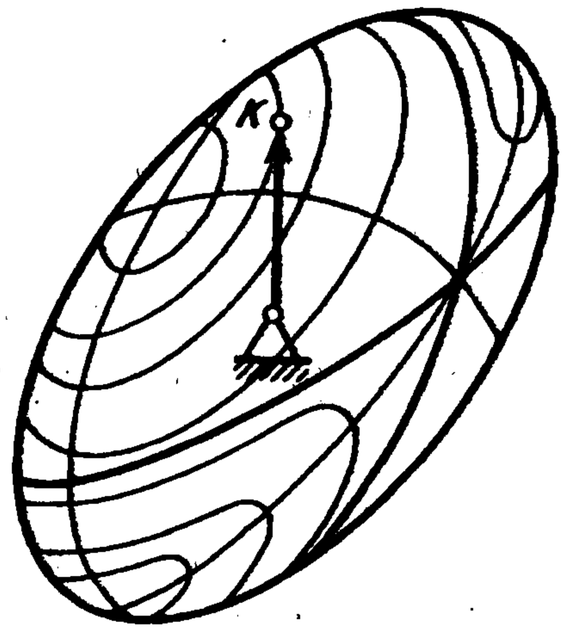
$$(x = Ap, \quad y = Bq, \quad z = Cr).$$

В этих же осях интеграл момента количества движения представляет собой уравнение сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = K^2$.

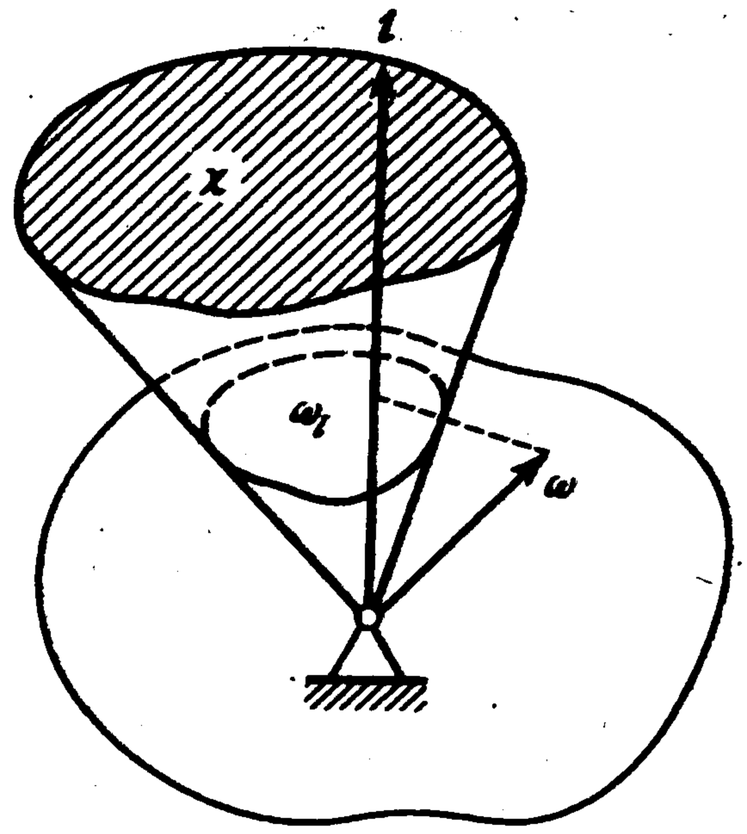
Эллипсоид кинетической энергии называется гирационным эллипсоидом. Пересечение его со сферой кинетического момента образует траектории (кинетические полодии), по которым движется конец вектора кинетического момента в теле. Поскольку вектор кинетического момента в пространстве неподвижен, то движение тела можно представить как обкатывание связанным с ним гирационным эллипсоидом этого неподвижного вектора по кинетической полодии. Кинетический момент при этом описывает в теле конус, являясь его образующей. Направляющей этого конуса и является кинетическая полодия (фиг. 1).

Геометрическая интерпретация Мак-Куллага тоже не полна. Остается неопределенным положение твердого тела вокруг оси кинетического момента.

Недавно Монтгомери [2] предпринял попытку пополнить геометрическую интерпретацию Мак-Куллага и, исходя из уравнений динамики твердого тела, вычислил угол, на



Фиг. 1



Фиг. 2

который поворачивается тело вокруг оси кинетического момента после того, как эта ось опишет в теле замкнутую коническую поверхность. Этот угол оказался равным проекции угловой скорости тела на вектор кинетического момента (эта проекция не зависит от времени), умноженной на время полного обхода, плюс телесный угол описанного конуса.

Пополнение геометрической интерпретации, данное Монтгомери, является частичным, поскольку определяет полностью положение тела только в моменты времени, кратные периоду.

Между тем результат Монтгомери может быть существенно обобщен, а геометрическую интерпретацию Мак-Куллага можно сделать исчерпывающей.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если в процессе вращения твердого тела с одной закрепленной точкой некоторая, неподвижная в пространстве прямая l, описала в теле замкнутую коническую поверхность, то угол поворота тела вокруг этой оси равен интегралу от проекции угловой скорости на эту ось минус телесный угол описанного конуса (фиг. 2):

$$\gamma = \int_0^T \omega_l(t)dt - \chi$$

То обобщение результата Монтгомери, которое имеется в виду, заключается в том, что оно не ограничивается случаем Эйлера и справедливо для любых движений твердого тела, какими бы ни были приложенные к телу моменты.

Кроме того, оно позволяет, как это будет показано в дальнейшем, дать полное описание положения твердого тела в любой момент времени (в любой точке полодии), а не только через период.

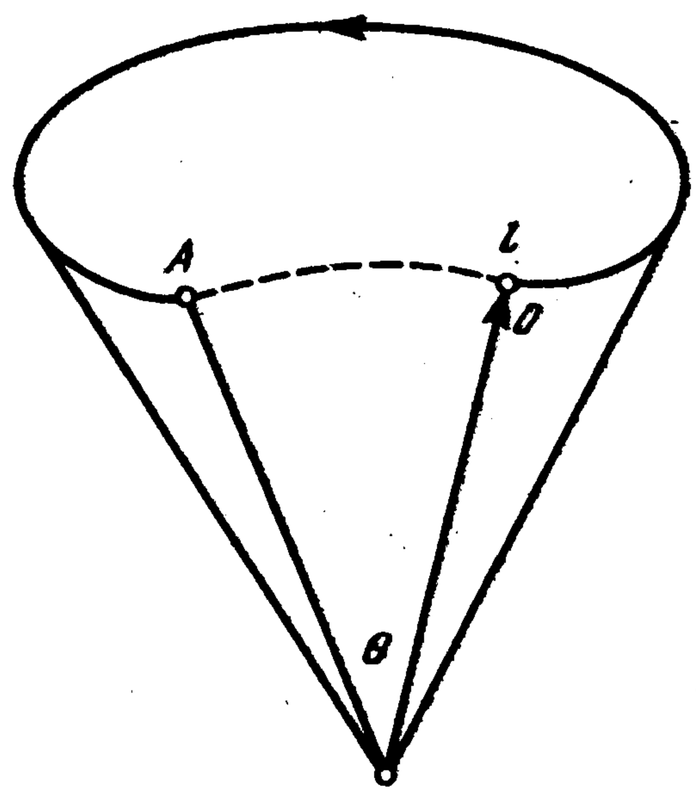
Перед тем как доказывать эту теорему, заметим, что теорема, сопряженная теореме 1, была сформулирована и доказана в 1952 г. А.Ю. Ишлинским.

Теорема 2 (теорема А.Ю. Ишлинского). Если в процессе вращения тела с одной закрепленной точкой некоторая неподвижная в теле прямая l описала в пространстве замкнутую коническую поверхность, то угол поворота тела вокруг этой оси равен интегралу от проекции угловой скорости тела на эту ось плюс телесный угол описанного конуса:

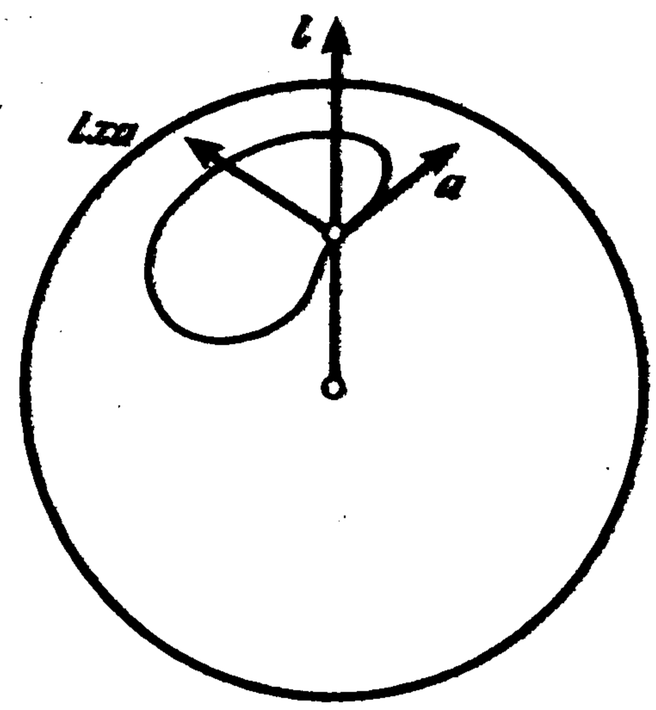
$$\gamma = \int_0^T \omega_l(t)dt + \chi$$

Сформулированные теоремы являются сопряженными, потому что в первой речь идет об угловой скорости тела в проекции на неподвижную в пространстве ось, во второй – в проекции на неподвижную в теле ось.

Теорема 2 не имеет прямого отношения к обсуждаемой проблеме геометрической интерпретации случая Эйлера, однако из нее легко следует теорема 1. Доказательство теоремы 2 в отличие от очень сложно доказываемого результата Монтгомери вполне элементарно.



Фиг. 3



Фиг. 4

Доказательство теоремы 2. Связав с телом жестко трехгранник так, чтобы третья ось была направлена по вектору l, в углах Крылова–Булгакова имеем $\omega_l = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta$, откуда

$$\gamma = -\oint \sin\beta d\alpha + \int_0^T \omega_l(t)dt$$

Используя теорему Грина для криволинейного интеграла, получаем поверхностный интеграл от элемента площади на единичной сфере, что и доказывает утверждаемый факт.

Доказательство теоремы 1. Поменяем точку зрения: вращающееся в пространстве тело будем считать неподвижным, а неподвижное пространство – вращающимся относительно тела. Тогда по отношению к пространству может быть применена теорема 2. Учитывая, что угол поворота тела относительно пространства отличается от угла поворота пространства относительно тела знаком, получаем нужный результат.

Обе сформулированные теоремы являются частным случаем следующей теоремы 3 [4].

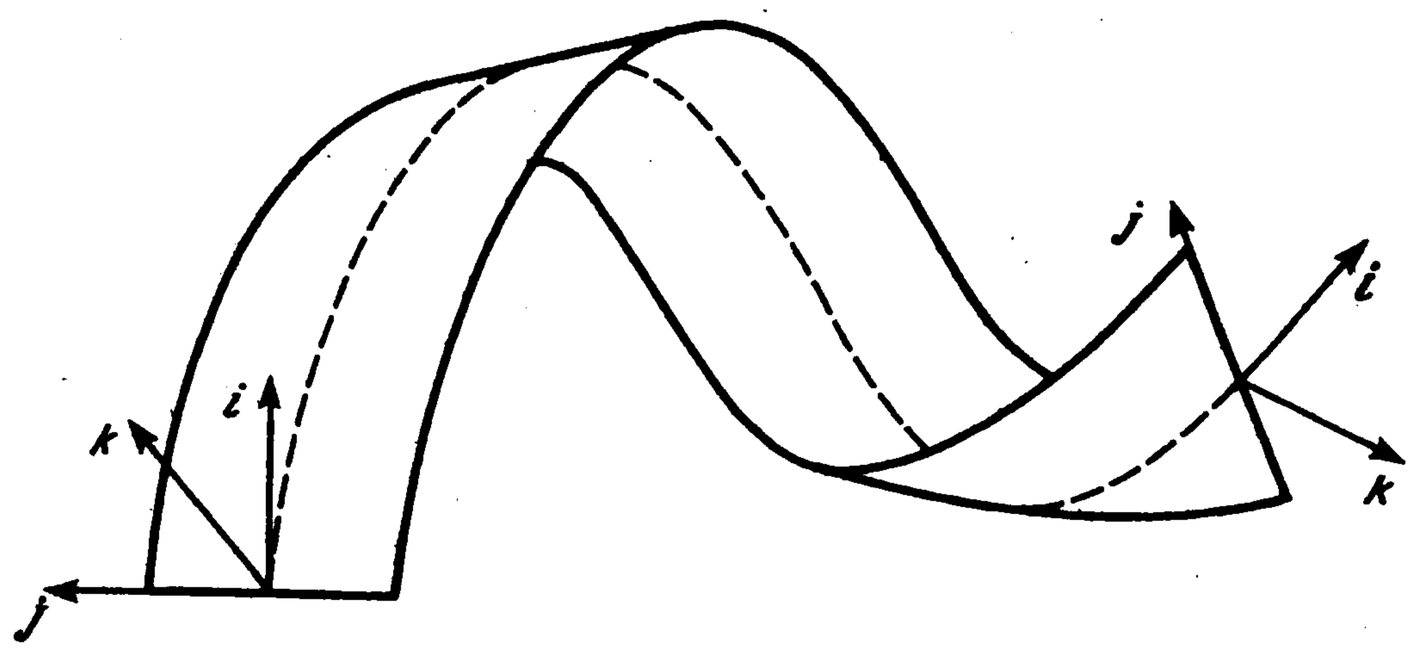
Теорема 3. Если в процессе вращения твердого тела с одной закрепленной точкой некоторая прямая описала замкнутую коническую поверхность как в теле, так и в пространстве, то угол поворота тела вокруг этой оси равен интегралу от проекции угловой скорости на эту ось плюс разность телесных углов, описанных этой осью в теле и в пространстве.

Рассмотрим теперь вопрос о пополнении геометрической интерпретации Мак-Куллага, основанном на использовании теоремы 1.

Пусть вертикальная и неподвижная в пространстве ось l описала в теле незамкнутую поверхность, начав движение по кинетической полодии из точки O и закончив его в точке A (фиг. 3). Дополним конус до замкнутого плоским поворотом на угол θ. Тогда положение трехгранника, жестко связанного с телом, в момент прохождения оси l через точку A (текущее положение твердого тела), относительно начального положения этого трехгранника, связанного с точкой O, может быть определено двумя углами: углом поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости, содержащей начальное и текущее положения оси l в теле, и углом γ поворота тела вокруг оси l. Последний равен углу, определяемому теоремой 1 для достроенного описанным способом замкнутого конуса.

Заметим, что в конструкции доказательства Монтгомери такой прием невозможен, поскольку плоский поворот вокруг произвольной в теле оси в общем случае не является движением по инерции.

Нетрудно видеть, что во всех трех обсуждаемых теоремах интересующий нас угол поворота тела состоит из двух существенно различных по своему смыслу слагаемых. Первое слагаемое – интеграл от проекции угловой скорости на ось l – это чисто кинематическая составляющая поворота. Второе слагаемое, равное телесному углу, имеет чисто геометрическое происхождение. Оно представляет собой эффект параллельного переноса вектора по замкнутому контуру на единичной римановой сфере. Пусть ось, жестко связанная с телом, вычерчивает на единичной сфере замкнутую кривую (фиг. 4).



Фиг. 5

Тогда условие равенства нулю проекции угловой скорости трехгранника, **l**, **a**, **l**×**a** на ось **l** и есть условие параллельного переноса вектора **a**. Из римановой геометрии известно, что угол поворота вектора **a** определяется гауссовой кривизной многообразия, и в случае единичной сферы равен площади сферического сегмента, заключенного внутри кривой.

В связи с этим представляло бы интерес выяснить механический смысл эффекта параллельного переноса вектора вдоль замкнутого контура на многообразии положений твердого тела с одной закрепленной точкой (группа $SO(3)$).

В заключение заметим, что приложение сформулированных теорем о телесном угле выходит за рамки не только случая Эйлера, но и динамики твердого тела вообще. Эти теоремы могут использоваться во всех случаях, когда задача сведена к анализу взаимного углового положения двух трехгранников.

Например, пусть средняя линия тонкой нерастяжимой ленты, абсолютно гибкой в одном направлении и абсолютно жесткой в другом, изогнута по некоторой пространственной кривой (фиг. 5). Ориентация начального сечения ленты по отношению к конечному может быть определена как ориентация связанных с этими сечениями трехгранников. Если начальный трехгранник перемещать вдоль средней линии так, чтобы вектор **i** был касателен к средней линии, а вектор **k** был расположен по нормали к ленте, то проекция угловой скорости трехгранника на ось **k** равна нулю (условие абсолютной жесткости ленты в плоскости **i**, **j**) и ответ на поставленный вопрос дается теоремой 2, в которой $\omega_l(t) \equiv 0$.

Еще один пример дает задача о прохождении поляризованного пучка света по изогнутому в пространстве световоду. Вопрос о повороте плоскости поляризации также сводится к теореме о телесном угле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *MacCullagh J.* On the rotation of a solid body // Proc. Roy. Irish Acad. Dublin, 1840–1844. V. 2. P. 520–525, 542–545; 1845–1847. V. 3. P. 370–371.
2. *Montgomery R.* How much does the rigid body rotate? // Amer. J. Phys. 1991. V. 59. № 5. P. 394–398.
3. *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.
4. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1995