УДК 539.4

© 1996 г. В.М. Левин

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматриваются композитные материалы матричного типа, состоящие из однородной компоненты (матрицы), в которой равномерно распределено множество частиц наполнителя (включений). Считается, что компоненты этих материалов идеально упруги и обладают пьезоэлектрическими свойствами. Один из вариантов метода самосогласования (метод эффективного поля) используется для определения эффективных электрических и упругих характеристик указанных материалов с учетом связанных электроупругих эффектов. В качестве первого этапа реализации метода решается задача связанной электроупругости для однородной среды, содержащей изолированную неоднородность. Для эллипсоидального включения и постоянного внешнего поля решение этой задачи находится в аналитической форме. Затем полученное решение используется в самосогласованной схеме для построения эффективного электроупругого оператора композита, содержащего случайное множество эллипсоидальных включений. Найдены явные выражения для электроупругих характеристик композитов, армированных сферическими включениями и непрерывными цилиндрическими волокнами.

Систематическое исследование электроупругих свойств пьезоактивных композитов различного рода с помощью метода условного осреднения содержится в цикле работ ученых киевской школы (см. [1], где даны ссылки на оригинальные работы). Предложенный в настоящей работе подход позволяет более полно учесть детали микроструктуры и взаимодействие включений.

1. Рассмотрим однородный упругий пьезоэлектрический материал, находящийся в изотермических условиях. Линейные определяющие соотношения для такого материала, которые могут быть получены из анализа термодинамических потенциалов (см., например, [1–4]), имеют вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{ijk}E_k, \quad \frac{1}{4\pi}D_i = e^t_{ikl}\varepsilon_{kl} + \beta_{ik}E_k \tag{1.1}$$

Здесь σ, ε – тензоры напряжений и деформаций, E и D – векторы напряженности электрического поля и индукции соответственно, $C = C^E$ – тензор упругих модулей при фиксированном векторе E, $\beta = \beta^\varepsilon$ – тензор коэффициентов диэлектрической проницаемости, e – тензор пьезоэлектрических констант, характеризующий связанные электроупругие эффекты, индекс t означает операцию транспонирования.

Соотношения (1.1) удобно записать в следующей краткой форме:

$$J = \mathrm{L}F, \quad J = \begin{Vmatrix} \sigma \\ \frac{1}{4\pi}D \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{L} = \begin{Vmatrix} C & -e \\ e^t & \beta \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} \varepsilon \\ E \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

где "матрицу" L следует рассматривать как линейный оператор, переводящий тензорно-векторную пару $[\sigma, D]$ в аналогичную пару $[\varepsilon, D]$ и имеющий симметрию электроупругих констант.

Соотношения, обратные (1.1), могут быть записаны в виде

$$F = \mathbf{M}J, \quad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} S & d \\ -d^t & \eta \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

$$S = S^D = (C + e\beta^{-1}e^t)^{-1}, \quad \eta = \eta^\sigma = (\beta + e^tC^{-1}e)^{-1}$$

$$d = Se\beta^{-1} = C^{-1}e\eta$$

Поскольку в основе метода эффективного поля лежит решение одночастичной задачи, рассмотрим сначала неограниченную пьезоактивную среду с электроупругими характеристиками $\mathbf{L}^0$, содержащую замкнутую область V с другими электроупругими свойствами $\mathbf{L}$. Будем исходить из следующей совместной системы уравнений теории упругости и электропроводности для среды с неоднородностью

$$\nabla\mathbf{L}\nabla f(x) = 0, \quad f(x) = \begin{Vmatrix} u_i(x) \\ -\phi(x) \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{L}(x) = \mathbf{L}^0 + \mathbf{L}^1(x), \quad \mathbf{L}^1(x) = \mathbf{L}^1V(x), \quad \mathbf{L}^1 = \mathbf{L} - \mathbf{L}^0, \quad \nabla_i = \partial/\partial x_i$$

где $u_i(x)$ – компоненты вектора смещений, $\phi(x)$ – потенциал электрического поля в произвольной точке x, $V(x)$ – характеристическая функция области V. Для дальнейшего целесообразно свести задачу определения полей $u_i(x)$ и $\phi(x)$ к системе интегральных уравнений, эквивалентной исходной системе дифференциальных уравнений (1.4). Эта система имеет вид

$$F(x) = F^0(x) + \int_V \mathbf{P}(x - x')\mathbf{L}^1F(x')dx', \quad x \in V$$

$$\mathbf{P}(x) = D\mathbf{G}(x)D, \quad D = \begin{Vmatrix} \mathrm{def} & 0 \\ 0 & \mathrm{grad} \end{Vmatrix} \tag{1.5}$$

Здесь $F^0(x)$ – внешние упругое и электрическое поля, которые возникали бы в основной среде в отсутствие неоднородности и при заданных условиях на бесконечности, $\mathbf{G}(x)$ – функция Грина совместной системы уравнений теории упругости и электропроводности. Эта функция при произвольной анизотропии основной среды определяется выражениями

$$\mathbf{G}(x) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\xi|=1} \mathbf{G}(\xi)\delta(\xi x)dS_\xi \quad \mathbf{G}(\xi) = \begin{Vmatrix} G_{ij}(\xi) & \Gamma_i(\xi) \\ -\gamma_j(\xi) & g(\xi) \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$G_{ij} = \left(\Lambda_{ij} - \frac{1}{\lambda}H_ih_j\right)^{-1}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\lambda}h_iG_{ij}, \quad g = -(\lambda + h_i\Lambda_{ij}^{-1}H_j)^{-1}$$

$$\Gamma_i = \Lambda_{ij}^{-1}H_jg, \quad \Lambda_{ij}(\xi) = C_{ikjl}^0\xi_k\xi_l, \quad H_i(\xi) = e_{ikl}^0\xi_k\xi_l$$

$$h_j(\xi) = e_{ljk}^t\xi_k\xi_l, \quad \lambda(\xi) = \beta_{ij}\xi_i\xi_j$$

При $x \in V$ система уравнений (1.5) определяет поля $\varepsilon(x)$ и $E(x)$ внутри включения, по которым поля вне V восстанавливаются однозначно.

Допустим теперь, что включение имеет форму эллипсоида с полуосями a_1, a_2, a_3, который задается соотношением $x_i(a^{-2})_{ij}x_j \leqslant 1$, $a_{ij} = a_i\delta_{ij}$ (по i не суммировать!). Можно показать, что интегральный оператор с ядром $\mathbf{P}(x)$ для эллипсоидальной области обладает свойством "полиномиальной консервативности" [5]. В частности, пусть внешние поля однородны в области V (F^0 = const), а сама эта область представляет собой шар радиуса a. Если F = const, то задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_V \mathbf{P}(x - x')dx' = \frac{1}{8\pi^2}\int_{|\xi|=1} \mathbf{P}(\xi)dS_\xi \frac{\partial^2}{\partial p}\int_V \delta(p - \xi x')dx' \tag{1.7}$$

$$p = \xi \cdot x, \quad \mathbf{P}(\xi) = \xi\mathbf{G}(\xi)\xi$$

Интеграл по области V равен площади круга, образующегося при сечении шара плоскостью $\xi \cdot x = p$, т.е. $\pi^2(a^2 - p^2)$, если $|p| \leqslant a$ и нулю, если $p > a$. При $x \in V$ вторая производная от этого интеграла равна -2π и правая часть в (1.7) является постоянной.

Аналогичный результат получается и для эллипсоида, который с помощью преобразования координат $t_i = a_{ij}^{-1} x_j$ переводится в единичный шар. В этом случае

$$\int_V \mathbf{P}(x - x')dx' = -\mathbf{P} = \text{const} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{P} = \frac{|\det a|}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \mathbf{P}(\xi)\frac{dS_\xi}{\rho^3(\xi)}, \quad \rho(\xi) = \sqrt{\xi_i (a^2)_{ij} \xi_j}$$

Итак, для однородного в области V внешнего поля $F^0(x)$ интегральное уравнение (1.5) преобразуется в алгебраическое

$$F = F^0 - \mathbf{PL}^1 F \tag{1.9}$$

Разрешая это уравнение относительно F, выразим поля деформаций ε и напряженности электрического поля E через внешние поля ε^0 и E^0

$$F = \mathbf{A}F^0, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathbf{PL}^1)^{-1} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} I_{ijkl} & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{Vmatrix}, \quad I_{ijkl} = \delta_{i(k}\delta_{l)j}$$

2. Рассмотрим теперь неограниченную упругую пьезоэлектрическую среду, содержащую однородное в пространстве случайное множество эллипсоидальных включений, которые занимают систему изолированных областей V_k с характеристическими функциями $V_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Система уравнений для определения полей деформаций $\varepsilon(x)$ и напряженности электрического поля $E(x)$ в среде с неоднородностями имеет вид, аналогичный (1.5)

$$F(x) = F^0(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\mathbf{L}^1(x')V(x')F(x')dx' \tag{2.1}$$

Здесь $V(x)$ – характеристическая функция области $V = \sum_k V_k$, занятой включениями, $\mathbf{L}^1(x)$ – функция, совпадающая с постоянной величиной $\mathbf{L}(\omega_k)$ при $x \in V_k$ (ω_k – набор геометрических параметров, характеризующих ориентацию главных осей анизотропии k-го включения).

Для решения с помощью системы уравнений (2.1) задачи гомогенизации и построения макроскопической системы уравнений теории связанной упругости и электропроводности воспользуемся самосогласованной схемой [6–8], суть которой заключается в следующем. Зафиксируем одну из типичных реализаций случайного множества включений и рассмотрим произвольное k-е включение, занимающее объем V_k. Введем для этого включения локальное внешнее поле $\overset{*}{F}_{(k)}(x)$. Это поле определено в V_k и складывается из внешнего поля $F^0(x)$ и полей возмущений от всех остальных включений.

Введем теперь поле $F^*(x)$, совпадающее с $\overset{*}{F}_{(k)}(x)$ при $x \in V_k$, и функцию $V(x; x')$, определенную следующим образом:

$$V(x; x') = \sum_{i \neq k} V_i(x'), \quad x \in V_k \tag{2.2}$$

Это позволяет записать для произвольной точки x в области V

$$F^*(x) = F^0(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\mathbf{L}^1(x')V(x; x')F(x')dx' \tag{2.3}$$

Предположим, что поле $F^*(x)$ имеет одинаковую структуру в любой из областей, занятых включениями (гипотеза H_1 метода эффективного поля). В частности, если считать, что это поле постоянно в каждой из областей V_k (но может быть различным для разных включений), то поле $F(x)$ ($x \in V$) связано с локальным внешним полем $F^*(x)$ соотношением, полученным выше при решении одночастичной задачи для эллипсоидальной неоднородности

$$F(x) = \mathbf{A}(x)F^*(x) \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{A}(x)$ – функция, совпадающая при $x \in V_k$ с постоянным оператором $\mathbf{A}(\omega_k)$, определенным формулой (1.10).

Подстановка выражения (2.4) в правые части уравнений (2.1) и (2.3) позволяет выразить электроупругие поля в произвольной точке среды через локальное внешнее поле

$$F(x) = F^*(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')F^*(x')V(x')dx' \tag{2.5}$$

а также получить самосогласованное уравнение для определения этого поля

$$F^*(x) = F^0(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')F^*(x')V(x;\, x')dx' \tag{2.6}$$

Если множество включений случайное, то $F(x)$ и $F^*(x)$ – случайные функции. Осреднив обе стороны уравнения (2.5) по ансамблю реализаций случайного множества включений, можем записать

$$\langle F(x)\rangle = F^0(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\langle \mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')F^*(x')V(x')|x'\rangle dx' \tag{2.7}$$

Символом $\langle \cdot|x'\rangle$ обозначено ансамблевое среднее при условии, что точка x' находится в области V, занятой включениями.

Предположим теперь, что значение случайной функции $F^*(x)$ в точках области V_i статистически не зависит от свойств включения и геометрических характеристик этой области (гипотеза H_2 метода эффективного поля). Это позволяет представить среднее под знаком интеграла в (2.7) в виде следующего произведения:

$$\langle \mathbf{L}^1(x)\mathbf{A}(x)F^*(x)V(x)|x\rangle = \langle \mathbf{L}^1(x)\mathbf{A}(x)V(x)\rangle\langle F^*(x)|x\rangle \tag{2.8}$$

Для пространственно однородного множества включений $\mathbf{L}^1(x)$ и $\mathbf{A}(x)$ – однородные случайные функции, обладающие свойствами эргодичности. Используя это свойство, получим

$$\langle \mathbf{L}^1(x)\mathbf{A}(x)V(x)\rangle = n_0\langle v\mathbf{L}^A\rangle, \quad \mathbf{L}^A = \mathbf{L}^1\mathbf{A} \tag{2.9}$$

Здесь n_0 – числовая концентрация включений, v – объем типичного включения, а осреднение в правой части формулы (2.9) предполагается по случайным размерам и ориентациям эллипсоидальных неоднородностей.

Величина $\langle F^*(x)|x\rangle = F'(x)$ в (2.8) представляет собой ансамблевое среднее при условии, что точка x находится в области V. Такое среднее в дальнейшем будем называть эффективным полем.

С учетом (2.8) и (2.9) равенство (2.7) запишем в виде

$$\langle F(x)\rangle = F^0(x) + n_0\int \mathbf{P}(x - x')\langle v\mathbf{L}^A\rangle F'(x')dx' \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что среднее поле $\langle F(x)\rangle$ в произвольной точке x композитного материала выражается через эффективное поле $F'(x)$. Уравнение (2.6) является отправным для его определения. Осреднив обе его стороны при условии $x \in V$, можем записать

$$F'(x) = F^0(x) + \int \mathbf{P}(x - x')\langle \mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')F^*(x')V(x;\, x')|x'\rangle dx' \tag{2.11}$$

Гипотеза H_2 позволяет представить среднее под знаком интеграла в этом выражении следующим образом:

$$\langle \mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')F^*(x')V(x;\, x')|x'\rangle = \langle \mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')V(x;\, x')|x'\rangle\langle F^*(x')|x';\, x\rangle \tag{2.12}$$

Символ $\langle \cdot | x'; x \rangle$ означает операцию осреднения при условии $x, x' \in V$. В общем случае среднее $\langle \cdot | x'; x \rangle$ отличается от $\langle \cdot | x \rangle$.

Предполагая статистическую независимость свойств включений от их положения в пространстве, первый сомножитель в правой части (2.12) представим в форме

$$\langle \mathbf{L}^1(x')\mathbf{A}(x')V(x; x')|x' \rangle = n_0 \langle v\mathbf{L}^A \rangle \Psi(x, x') \tag{2.13}$$

$$\Psi(x, x') = \langle V(x; x')|x \rangle / \langle V(x) \rangle$$

Для пространственно однородного множества включений функция $\Psi(x, x')$ зависит только от разности аргументов ($\Psi(x, x') = \Psi(x - x')$). Эта функция характеризует плотность распределения неоднородностей, окружающих типичное включение, центр которого расположен в начале координат. Иногда говорят, что эта функция определяет вид "корреляционной ямы", в которой находится типичное включение в композите.

Уравнение (2.11) принимает вид

$$F'(x) = F^0(x) + n_0 \int \mathbf{P}(x - x') \langle v\mathbf{L}^A \rangle \Psi(x - x') \langle F^*(x')|x'; x \rangle dx' \tag{2.14}$$

Как уже отмечалось, условное среднее под знаком интеграла в этом выражении отличается от $F'(x)$. Получить выражение для указанного среднего можно вновь с помощью уравнения (2.6), осреднив обе его стороны при условии $x, x' \in V$. Но тогда его правая часть оказывается зависящей от более сложного условного среднего. Повторение этой процедуры приводит к бесконечной цепочке связанных статистических уравнений относительно условных средних все более сложной структуры. Поэтому возникает обычная в задачах такого рода проблема замыкания, которую можно решить лишь приближенно. В частности, замкнуть указанную цепочку уже на первом шаге позволяет предложенная Лаксом [9] так называемая "квазикристаллическая аппроксимация", в силу которой средние $\langle \cdot | x'; x \rangle$ и $\langle \cdot | x \rangle$ совпадают. В результате получим

$$F'(x) = F^0(x) + n_0 \int \mathbf{P}(x - x') \langle v\mathbf{L}^A \rangle \Psi(x - x') F'(x') dx' \tag{2.15}$$

Исключив внешнее поле $F^0(x)$ из уравнений (2.10) и (2.15), придем к уравнению, связывающему эффективное поле $F'(x)$ со средним полем $\langle F(x) \rangle$ в композите

$$F'(x) = \langle F(x) \rangle - n_0 \int \mathbf{P}(x - x') \Phi(x - x') \langle v\mathbf{L}^A \rangle F'(x') dx' \tag{2.16}$$

$$\Phi(x) = 1 - \Psi(x)$$

Если множество включений обладает некоторой симметрией (в статистическом смысле), то это сказывается на симметрии функции $\Phi(x)$. В частности, если множество включений изотропно, то эта функция сферически симметрична, т.е. $\Phi(x) = \Phi(|x|)$.

Нарушение изотропии случайного множества включений может привести к появлению текстуры. Под текстурой здесь понимается отличие симметрии тензоров электроупругих характеристик неоднородной среды. Во многих практически важных случаях симметрию текстуры можно описать с помощью двухвалентного тензора h_{ij}, определяющего линейное преобразование пространства, которым функция $\Phi(x)$ переводится в сферически-симметричную

$$\Phi(h \cdot x) = \Phi(|x|) \tag{2.17}$$

При этом форму корреляционной ямы будет характеризовать эллипсоид, заданный уравнением $(h \cdot x)^2 = 1$. Разумеется, в общем случае такое преобразование подобрать нельзя.

Для случайного множества включений $\Phi(x)$ – гладкая функция, быстро стремящаяся к нулю вне области с размерами порядка размеров корреляционной ямы. Если пренебречь изменением поля $\langle F^*(x)|x \rangle$ в этой области, уравнение (2.16) превращается в алгебраическое

$$F'(x) = \langle F(x) \rangle - n_0 \mathbf{\Pi} \langle v\mathbf{L}^A \rangle F'(x), \quad \mathbf{\Pi} = \int \mathbf{P}(x) \Phi(x) dx \tag{2.18}$$

Разрешая это уравнение относительно $F'(x)$ и подставляя результат в правую часть (2.10), получим

$$\langle F(x)\rangle = F^0(x) + n_0\int \mathbf{P}(x-x')\langle v\mathbf{L}^A\rangle D^0\langle F(x')\rangle dx' \tag{2.19}$$

$$D^0 = (I + n_0\Pi\langle v\mathbf{L}^A\rangle)^{-1}$$

Подействуем на обе стороны этого уравнения оператором $\nabla\mathbf{L}^0$. Учитывая соотношения

$$\nabla\mathbf{L}^0F^0(x) = 0, \quad \nabla\mathbf{L}^0\nabla\mathbf{G}(x) = -\mathbf{I}\delta(x)$$

получим, что средние упругое и электрическое поля в композитном материале удовлетворяют уравнению

$$\nabla\mathbf{L}^*\langle F(x)\rangle = 0, \quad \mathbf{L}^* = \mathbf{L}^0 + n_0\langle v\mathbf{L}^A\rangle D^0 \tag{2.20}$$

которое по виду совпадает с уравнением равновесия теории связанной электроупругости для некоторой однородной среды, реакция которой на внешние воздействия в среднем (макроскопически) совпадает с реакцией микронеоднородного материала. Величина $\mathbf{L}^*$ в (2.20) представляет собой оператор эффективных электроупругих характеристик пьезоактивного композитного материала.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Матрица в композитном материале изотропна, а включения представляют собой шары одинакового радиуса. В этом случае оператор $\mathbf{P}$ в (1.8) принимает вид

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} P_{ijkl} & 0 \\ 0 & p_{ik} \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

$$P_{ijkl} = \frac{1}{9k_P}E^1_{ijkl} + \frac{1}{2\mu_P}E^2_{ijkl}, \quad E^1_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad E^2_{ijkl} = I_{ijkl} - \frac{1}{3}E^1_{ijkl}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{3\beta_0}\delta_{ij}, \quad k_P = k_0 + \frac{4}{3}\mu_0, \quad \mu_P = \frac{5\mu_0(3k_0 + 4\mu_0)}{6(k_0 + 2\mu_0)}$$

где k_0 и μ_0 – объемный и сдвиговой модули матрицы.

Допустим, что электроупругие свойства сферических включений характеризуются кубической сингонией классов $\bar{4}3m$ и 23. В этом случае тензоры C, e и β можно представить в виде

$$C = k\mathbf{E}^1 + 2\mu\mathbf{E}^2 + 2(m-\mu)\mathbf{E}^3$$

$$E^3_{ijkl} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ir}\alpha_{jr}\alpha_{kr}\alpha_{lr} - \frac{1}{3}E^1_{ijkl}$$

$$\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad \mathbf{e} = e\mathbf{U} \tag{3.2}$$

$$U_{ijk} = \alpha_{i1}\alpha_{j2}\alpha_{k3} + \alpha_{i2}\alpha_{j1}\alpha_{k3} + \alpha_{i3}\alpha_{j1}\alpha_{k2} + \alpha_{i1}\alpha_{j3}\alpha_{k2} + \alpha_{i2}\alpha_{j3}\alpha_{k1} + \alpha_{i3}\alpha_{j2}\alpha_{k1}$$

где α_{ir} – матрица преобразования от кристаллической к лабораторной системе координат.

Будем считать, что включения в композите распределены в матрице однородно и изотропно. Тогда корреляционная яма имеет форму шара и оператор $\mathbf{\Pi}$ в (2.18) совпадает с оператором $\mathbf{P}$, определенным формулами (3.1).

Рассмотрим теперь два предельных случая.

1°. Пусть ориентация главных осей анизотропии включений хаотична. При этом композит в целом изотропен (совместные электроупругие эффекты в нем отсутствуют) и характеризуется двумя эффективными упругими модулями k^* и μ^*, а также коэффициентом диэлектрической проницаемости β^*. Эти величины могут быть представлены в форме

$$k^* = k_0 + p\left(\frac{1}{k_A} - \frac{p}{k_P}\right)^{-1}, \quad \mu^* = \mu_0 + p\left(\frac{5}{2m_A + 3\mu_A} - \frac{p}{\mu_P}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

$$\beta^* = \beta_0 + p\left(\frac{1}{\beta_A} - \frac{p}{3\beta_0}\right)^{-1}$$

где

$$k_A = k_1\left(1 + \frac{k_1}{k_P}\right)^{-1}, \quad \mu_A = \mu'\left(1 + \frac{\mu'}{\mu_P}\right)^{-1}, \quad m_A = m_1\left(1 + \frac{m_1}{\mu_P}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

$$\beta_A = \beta'\left(1 + \frac{\beta'}{3\beta_0}\right)^{-1}, \quad \mu' = \mu_1 + \frac{e^2}{\beta_1 + 3\beta_0}, \quad \beta' = \beta_1 + \frac{e^2}{\mu_1 + \mu_P}$$

$p = n_0 v$ – объемная концентрация включений, а $k_1, \mu_1,...$ здесь и далее означает разность между соответствующими характеристиками включений и матрицы.

Если материал включений изотропен (т.е. $e = 0$, $m = \mu$), то формулы (3.3) переходят в известные выражения для электроупругих констант композита, содержащего случайное множество изотропных сферических включений [6–8].

2°. Допустим, что главные оси анизотропии включений ориентированы одинаково. В этом случае композит в целом обладает кубической симметрией того же класса, что и включения. Его электроупругие свойства характеризуются при этом следующими эффективными упругими модулями:

$$k^* = k_0 + p\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1-p}{k_P}\right)^{-1}, \quad m^* = \mu_0 + p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1-p}{\mu_P}\right)^{-1}$$

$$\mu^* = \mu_0 + p\left[\frac{3\beta_0 + (1-p)\beta_1}{3\beta_0\mu_1 + (1-p)(\mu_1\beta_1 + e^2)} + \frac{1-p}{\mu_P}\right]^{-1} \tag{3.5}$$

коэффициентом диэлектрической проницаемости

$$\beta^* = \beta_0 + p\left[\frac{\mu_P + (1-p)\mu_1}{\beta_1\mu_P + (1-p)(\beta_1\mu_1 + e^2)} + \frac{1-p}{3\beta_0}\right]^{-1} \tag{3.6}$$

и пьезоупругой константой

$$e^* = 3p\beta_0\mu_P e[(\mu_P + (1-p)\mu_1)(3\beta_0 + (1-p)\beta_1) + (1-p)^2 e^2] \tag{3.7}$$

Заметим, что формальный предельный переход при $p \to 1$ в этих формулах приводит к физически непротиворечивым результатам: $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$, хотя гипотезы эффективного поля при этом теряют смысл.

Композит, матрица которого трансверсально изотропна. Тензоры C^0, e^0 и β^0 для такой среды могут быть представлены в форме

$$C^0 = k_0\mathbf{T}^2 + 2m_0\left(\mathbf{T}^1 - \frac{1}{2}\mathbf{T}^2\right) + l_0(\mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^4) + 4\mu_0\mathbf{T}^5 + n_0\mathbf{T}^6$$

$$\mathbf{e} = e_1^0\mathbf{U}^1 + e_2^0\mathbf{U}^2 + e_3^0\mathbf{U}^3, \quad \beta = \beta_1^0\mathbf{t}^1 + \beta_2^0\mathbf{t}^2 \tag{3.8}$$

Здесь $k_0, m_0, l_0, \mu_0, n_0$ – пять независимых упругих модулей трансверсально изотропной среды, $\overset{0}{e}_1, \overset{0}{e}_2, \overset{0}{e}_3$ – три пьезоупругие константы и β_1^0, β_2^0 – два коэффициента диэлектрической проницаемости. Величины $\mathbf{T}^i$, $\mathbf{U}^k$, $\mathbf{t}^l$ – элементы тензорных базисов, которые определяются выражениями

$$T^1_{ijkl} = \theta_{i(k}\theta_{l)j}, \quad T^2_{ijkl} = \theta_{ij}\theta_{kl}, \quad T^3_{ijkl} = \theta_{ij}m_k m_l$$

$$T^4_{ijkl} = m_i m_j \theta_{kl}, \quad T^5_{ijkl} = \theta_{i)(k}m_{l)}m_{(j}, \quad T^6_{ijkl} = m_i m_j m_k m_l$$

$$U^1_{ijk} = \theta_{ij}m_k, \quad U^2_{ijk} = 2m_{(i}\theta_{j)k}, \quad U^3_{ijk} = m_i m_j m_k$$

$$t^1_{ij} = m_i m_j, \quad t^2_{ij} = \theta_{ij}, \quad \theta_{ij} = \delta_{ij} - m_i m_j$$

где m_i – орт оси симметрии материала.

Пусть включения в композите имеют форму непрерывных цилиндров одинакового радиуса, одинаково ориентированных параллельно оси симметрии свойств матрицы (среда, армированная однонаправленными непрерывными волокнами). Для определения оператора $\mathbf{P}$ в этом случае вернемся к общему выражению (1.8) и допустим, что включение представляет собой удлиненный сфероид ($a_1 = a_2 = a$, $a_3 > a$). Перейдем в (1.8) к сферической системе координат ϕ, θ с полярной осью, направленной по оси сфероида. Произведем замену $\cos\theta = t$. В результате можем записать

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} \mathbf{P}(\phi, t)\psi(t,\delta)dt \tag{3.9}$$

$$\psi(t,\delta) = \frac{1}{2}\delta^2[\delta^2 + (1-\delta^2)t^2]^{-3/2}, \quad \delta = \frac{a}{a_3}$$

Предельный переход $\delta \to 0$ соответствует включению в форме бесконечного кругового цилиндра (волокна) радиуса a. Осуществляя такой переход в (3.9), получим

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\phi, 0)d\phi \tag{3.10}$$

Для вычисления входящих в этот оператор тензоров в явном виде необходимо в тензорах из $\mathbf{P}(\xi)$ в (1.8) положить $\xi_3 = 0$ (вектор ξ при этом оказывается в плоскости, перпендикулярной оси волокна), подставить полученное выражение в (3.10) и вычислить интегралы.

Для трансверсально изотропной среды компоненты матрицы $\mathbf{G}(\xi)$ в (1.6) при условии, что $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$, имеют вид

$$G_{ij}(\xi) = -\frac{k_0}{m_0(k_0 + m_0)}\xi_i\xi_j + \frac{1}{m_0}\theta_{ij} + \frac{1}{\mu_0'}m_i m_j \tag{3.11}$$

$$\Gamma_i = \gamma_i = \gamma m_i, \quad g = -\frac{1}{\beta_2'}, \quad \gamma = \frac{e_2^0}{\mu_0\beta_2^0 + (e_2^0)^2}$$

$$\mu_0' = \mu_0 + \frac{(e_2^0)^2}{\beta_2^0}, \quad \beta_2' = \beta_2^0 + \frac{(e_2^0)^2}{\mu_0}$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и интегрируя по единичной окружности, найдем

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} P & r \\ -r^t & p \end{Vmatrix} \tag{3.12}$$

$$P = P_1\mathbf{T}^2 + P_2\left(\mathbf{T}^1 - \frac{1}{2}\mathbf{T}^2\right) + \frac{1}{2\mu_0'}\mathbf{T}^5, \quad r = \frac{1}{4}\gamma\mathbf{U}^2$$

$$p=\frac{1}{2\beta_2'}\mathbf{t}^2,\quad P_1=\frac{1}{4(k_0+m_0)},\quad P_2=\frac{k_0+2m_0}{4m_0(k_0+m_0)}$$

Если считать, что корреляционная яма тоже имеет форму цилиндра, параллельного волокнам, то общая формула (2.20) принимает вид

$$\mathbf{L}^*=\mathbf{L}^0+p\mathbf{L}^1[\mathbf{I}+(1-p)\mathbf{P}\mathbf{L}^1]^{-1} \tag{3.13}$$

Пусть волокна также трансверсально изотропны с осью симметрии свойств, совпадающей с их геометрической осью. Тензоры электроупругих характеристик для них определяются теми же формулами (3.8), в которых следует опустить нулевой индекс у физических констант. Как следует из (3.13), композит в целом будет также трансверсально изотропным и характеризуется следующими пятью эффективными упругими модулями

$$k^*=k_0+pk_1d(p),\quad m^*=m_0+pm_1\left[1+(1-p)\frac{m_1(k_0+2m_0)}{2m_0(k_0+m_0)}\right]$$

$$l^*=l_0+pl_1d(p),\quad \mu^*=\mu_0+\frac{p}{\Delta(p)}\left[\mu_1+\frac{(1-p)f}{2\beta_2'}\right]$$

$$n^*=n_0+p\left[n_1-\frac{(1-p)l_1^2d(p)}{k_0+m_0}\right],\quad d(p)=\frac{k_0+m_0}{k_0+m_0+(1-p)k_1}$$

$$\Delta(p)=[1+(1-p)b][1+(1-p)B]-(1-p)^2Qq,\quad f=\mu_1\beta_2^1+(e_2^1)^2$$

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_2^1}{\beta_2'}+\gamma e_2^1\right),\quad B=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0'}+\gamma e_2^1\right)$$

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{e_2^1}{\beta_2'}-\gamma\mu_1\right),\quad Q=\frac{1}{2}\left(\gamma\beta_2^1-\frac{e_2^1}{\mu_0'}\right)$$

тремя пьезоупругими константами

$$e_1^*=e_1^0+pe_1^1d(p),\quad e_2^*=e_2^0+\frac{p}{\Delta(p)}\left[e_2^1+\frac{1}{2}(1-p)\gamma f\right]$$

$$e_3^*=e_3^0+p\left[e_3^1-\frac{(1-p)l_1e_1^1d(p)}{k_0+m_0}\right]$$

и двумя коэффициентами диэлектрической проницаемости

$$\beta_1^*=\beta_1^0+p\left[\beta_1^1+\frac{(1-p)(e_1^1)^2d(p)}{k_0+m_0}\right]$$

$$\beta_2^*=\beta_2^0+\frac{p}{\Delta(p)}\left[\beta_2^1+\frac{(1-p)f}{2\mu_0'}\right]$$

Из этих формул видно, что учет связанности упругих и электрических полей сказывается только на значениях эффективного упругого модуля μ^*, пьезоупругих констант e_i^* (i = 1, 2, 3) и коэффициентов диэлектрической проницаемости β_k^* (k = 1, 2). Что же касается упругих модулей композита k^*, m^*, l^*, n^*, то они определяются теми же формулами [8], что и в случае чисто упругого деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 207 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
3. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
4. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 448 с.
5. *Кунин И.А., Соснина Э.Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 3. С. 571–574.
6. *Левин В.М.* К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 137–145.
7. *Канаун С.К.* Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 655–665.
8. *Канаун С.К., Левин В.М.* Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1993. 598 с.
9. *Lax M.* Multiple scattering of waves // Rev. Modern Phys. 1951. V. 23. N 4. P. 287–310.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
30.I.1995