УДК 539.3

© 1996 г. А.О. Ватульян

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Строятся фундаментальные решения нестационарной линейной задачи электроупругости; стационарный случай изучен ранее [1].

1. Рассмотрим нестационарные уравнения линейной электроупругости [2]

$$M_{ij}X_j + F_i = B_{ij}\ddot{X}_j, \quad B_{ij} = \rho\delta_{ij}(1-\delta_{4j}), \quad i,j = 1,.,4 \tag{1.1}$$

где $\{\chi_j\} = \{u_1, u_2, u_3, \phi)$ – обобщенный вектор перемещений, M_{ij} – линейные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$M_{ik} = C_{ijkl}\partial_j\partial_l, \quad i,k = 1,2,3, \quad M_{i4} = M_{4i} = e_{lij}\partial_j\partial_l, \quad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$

$$M_{i4} = -э_{lj}\partial_j\partial_l$$

В соотношениях (1.2) c_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, e_{lij} – компоненты пьезоэлектрических постоянных, $э_{lj}$ – диэлектрические проницаемости, ρ – плотность. Система (1.1) негиперболическая (в уравнении при $i = 4$ отсутствует слагаемое, содержащее вторую производную по времени), и ее решения обладают рядом особенностей.

Под фундаментальным решением (ФР) $\Psi_i^{(m)}(x,t)$ будем понимать решение системы (1.1) для $F_i = \delta_{im}\delta(x)\delta(t)$, причем $\Psi_{i|t<0}^{(m)} = 0$.

Для построения ФР $\Psi_i^{(m)}(x,t)$ применим к системе (1.1) преобразование Фурье по координатам и по времени соответственно с векторным параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и скалярным ω

$$\tilde{M}_{ij}(\alpha)\tilde{\Psi}_j^{(m)} - \omega^2 B_{ij}\tilde{\Psi}_j^{(m)} = -\delta_{im} \tag{1.3}$$

причем $\tilde{M}_{ij}$ получается соответственно заменой $\partial_j \to (-i\alpha_j)$ из M_{ij} согласно (1.2).

Разрешив систему (1.3) относительно трансформант и осуществляя обратное преобразование Фурье, получим

$$\Psi_j^{(m)} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{R_3}\int\limits_{-\infty+i0}^{\infty+i0}\frac{p_{jm}(\alpha,\omega)}{p_0(\alpha,\omega)}e^{-i[(\alpha,x)+\omega t]}d\alpha d\omega \tag{1.4}$$

где $p_0(\alpha, \omega)$ – однородный полином восьмого порядка, $p_{jm}(\alpha,\omega)$ – однородные полиномы шестого порядка:

$$p_{jm}(r\alpha, r\omega) = r^6 p_{jm}(\alpha,\omega), \quad p_0(r\alpha, r\omega) = r^8 p_0(\alpha,\omega) \tag{1.5}$$

Имеют место следующие утверждения

Лемма 1. При $\omega \to \infty$ имеют место асимптотики:

$$p_{44}(\alpha,\omega)/p_0(\alpha,\omega) = a_{44}(\alpha)(1+O(\omega^{-2}))$$

$p_{jm}(\alpha,\omega)/p_0(\alpha,\omega) = O(\omega^{-4})$ для пар j, m = (1, 2), (1, 3), (2, 3) и им симметричных,

$p_{jm}(\alpha,\omega)/p_0(\alpha,\omega) = O(\omega^{-2})$ для остальных j, m, причем $a_{44}(\alpha)$ однородная функция порядка –2.

Доказательство леммы следует из представления функций p_0, p_{jm} в виде определителей соответственно четвертого и третьего порядка.

Лемма 2. Уравнение $p_0(\alpha, \omega) = 0$ имеет только вещественные корни $\omega(\alpha)$.

В анизотропной теории упругости подобный результат следует из наличия у уравнения Кристоффеля, определяющего скорости распространения упругих волн в анизотропном материале, трех положительных корней. Этот результат следует из положительной определенности упругой энергии. В случае электроупругого материала внутренняя энергия выражается следующим образом [2]

$$U = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}э_{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$$

и является положительно определенной квадратичной формой. При этом, разрешив последнее уравнение в (1.3) относительно $\tilde{\Psi}_4^{(4)}$, что возможно в силу положительной определенности тензора $э_{ij}$, и, подставив в предыдущие уравнения из (1.3), приходим к тому же уравнению Кристоффеля с "ужесточенными" модулями. В силу изложенного выше отсюда следует утверждение леммы.

Упростим представление (1.4), осуществив замену переменных: $\Omega = \omega\gamma^{-1}$, $\gamma = |\alpha|$, $\alpha_k = \gamma\eta_k$, $|\eta| = 1$ и используя метод Виллиса [3, 4]. Интеграл по γ будем понимать в смысле теории обобщенных функций [5]:

$$I_n(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{n\varepsilon}(z), \quad I_{n\varepsilon}(z) = \int_0^\infty \gamma^{n-2}e^{-i\gamma z-\gamma\varepsilon}d\gamma, \quad n = 2,3, \quad z = \Omega t + (\eta, x) \tag{1.6}$$

$$I_{2\varepsilon}(z) = \frac{1}{iz+\varepsilon}, \quad I_{э\varepsilon}(z) = i\frac{d}{dz}I_{2\varepsilon}(z) = -\frac{1}{(z-i\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon > 0$$

2. Рассмотрим для простоты плоский (n =2) случай, $\eta_1 = \cos\phi$, $\eta_3 = \sin\phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Имеем

$$\Psi_j^{(m)}(x,t) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\lim_{\varepsilon->0}\int_{|\eta|=1}\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0}\frac{p_{jm}(\eta,\Omega)}{p_0(\eta,\Omega)}\frac{d\eta d\Omega}{\Omega t+(\eta,x)-i\varepsilon} \tag{2.1}$$

Проанализируем подынтегральную функцию в (2.1). В области $\operatorname{Im}\Omega > 0$ имеется один полюс $\Omega = \Omega_\varepsilon = t^{-1}[i\varepsilon - (\eta, x)]$ при $t > 0$ и нет полюсов при $t < 0$. В силу леммы 2 в подынтегральном выражении в (2.1) других полюсов нет при $\operatorname{Im}\Omega > 0$, и на основании теории вычетов имеем представление

$$\Psi_j^{(m)}(x,t) = \frac{t_+}{(2\pi)^2}\int_{|\eta|=1}\frac{p_{jm}(\eta t,(\eta,x))}{p_0(\eta t,(\eta,x))}d\eta, \quad t_+ = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь j, m = 1, 2, 3, 4 за исключением случая $j = m = 4$.

В силу леммы 1 подынтегральная функция в выражении для $\Psi_4^{(4)}$ является неубывающей по ω, поэтому использовать замыкание в верхнюю полуплоскость нельзя. Выделяя главную часть, не зависящую от ω,

$$p_{44}(\alpha,\omega)/p_0(\alpha,\omega) = a_{44}(\alpha) + \tilde{p}_{44}(\alpha,\omega), \quad a_{44} = -(э_{lj}\alpha_l\alpha_j)^{-1} = -p(\alpha)$$

получаем, что

$$\Psi_4^{(4)}(x,t) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\delta(t)\int\limits_{R_z} p(\alpha)e^{-i(\alpha,x)}d\alpha + \frac{t_+}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\eta|=1}\tilde{p}_{44}(\eta t,(\eta,x))d\eta \tag{2.3}$$

Первый интеграл в (2.3) может быть вычислен на основе фундаментального решения оператора Лапласа. Осуществим замену переменных $\alpha_j = A_{jk}\upsilon_k$, где $A = \{A_{jk}\}$ – матрица, обратная к $э = \{э_{jk}\}$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R_3} p(\alpha)e^{-i(\alpha,x)}d\alpha = \det AE(z),\quad E(z) = (\ln(z,z))/4\pi \tag{2.4}$$

$E(x)$ – известное ФР [5] ($\Delta E(x) = \delta(x)$), $z = э^{-1/2}x$. Итак, ФР $\Psi_4^{(4)}(x,t)$ имеет вид

$$\Psi_4^{(4)}(x,t) = \frac{-\det э}{4\pi}\delta(t)\ln(z,z) + \frac{t_+}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\eta|=1}\tilde{p}_{44}(\eta t,(\eta,x))d\eta \tag{2.5}$$

Отметим специфическую структуру этой компоненты ФР, которая содержит дельта-функцию по времени, что соответствует мгновенному наведению потенциала во всей области при электрическом возбуждении. Это обстоятельство есть следствие пренебрежения производными по времени в уравнении Максвелла при описании распространения звуковых возмущений [4]. Отметим, что в остальном ФР (2.2) обладают обычными свойствами ФР для гиперболических систем, в частности для любого момента времени t существует область $x \in R_2$, где возмущения равны нулю. Это утверждение обосновано ниже.

В силу леммы 2 $p_0(\eta,\Omega) = B_0(\eta)\prod\limits_{k=1}^{3}(\Omega - \lambda_k(\eta))$, $B_0(\eta) > 0$, $|\eta| = 1$ причем $0 < \lambda_k^- \leqslant \leqslant \lambda_k(\eta) \leqslant \lambda_k^+ (k = 1,2,3)$.

Очевидно, что в области

$$\max_{\substack{|\eta|=1\\ k=1,2,3}}(\eta,x)\lambda_k^{-1}(\eta) \geqslant t$$

уравнение $p_0(\eta,(\eta,x)/t) = 0$ не имеет решений. В силу этого подынтегральная функция в (2.2) регулярна, и интеграл (2.2) равен нулю. Аналогичное утверждение справедливо и для интеграла в (2.5).

Рассмотрим структуру подынтегральных функций в интегралах по единичной окружности в (2.2), (2.5). Для практического использования этих ФР в методе граничных элементов [6] часто достаточно их интегральных представлений, однако можно предложить и способ их вычисления на основании теории вычетов. Учитывая, что подынтегральные функции в (2.2), (2.5) – рациональные функции от $\sin 2\phi$, $\cos 2\phi$, осуществляя замену переменной $\upsilon = \operatorname{ctg}\phi$ и полагая $x_k t_+^{-1} = y_k$, находим

$$\int\limits_{|\eta|=1}\frac{p_{jm}(\eta t,(\eta,y))}{p_0(\eta t,(\eta,y))}d\eta = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_{jm}(\upsilon,y)}{\Gamma_0(\upsilon,y)}d\upsilon =$$

$$= 4\pi i\left(\sum_{\operatorname{Im}\upsilon_k>0}\operatorname{res}\frac{\Gamma_{jm}}{\Gamma_0} + \frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Im}\upsilon_k=0}\operatorname{res}\frac{\Gamma_{jm}}{\Gamma_0}\right)$$

Здесь $\Gamma_0(\upsilon, y)$ – полином восьмой степени, $\Gamma_{jm}(\upsilon, y)$ – полиномы шестой степени, $\upsilon_k (k = 1...8)$ – корни Γ_0, которые могут быть рассчитаны для заданных y лишь численно.

Замечание. Для наиболее часто встречающегося в приложениях случая пьезокерамики, поляризованной в направлении оси x_3, представления (2.2), (2.5), сохраняют

свою силу, однако в этом случае $\Psi_2^{(m)} \equiv 0$ и полиномы p_{jm} и p_0 имеют соответственно четвертую и шестую степень.

Работа выполнена при поддержке гранта 94-4.5-41 по проблемам фундаментального естествознания Госкомитета РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватульян А.О., Кубликов В.Л.* О граничных интегральных уравнениях электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1037–1041.
2. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
3. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. *Willis J.R.* Self-similar problems in elastodynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1973. V. 274. № 1240. P. 435–491.
5. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
6. *Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
1.VII. 1994