

УДК 539.3:534

© 1996 г. К.Ш. Мкртчян

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ И ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ

Рассматриваются две динамические задачи о распространении колебаний в анизотропной среде, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. В первой задаче изучаются установившиеся гармонические колебания в анизотропной плоскости; решение сводится к решению системы эллиптических уравнений второго порядка для стационарной части смещений. Во второй задаче в рамках основной физической модели [1] рассматривается динамическая контактная задача для анизотропной полуплоскости, усиленной на своей границе бесконечным упругим покрытием в виде накладки малой толщины; возбуждающая сосредоточенная сила изменяется по гармоническому закону. Решения обеих задач построены методом преобразования Фурье. С использованием методов Лайтхилла [2] и стационарной фазы [3] получены асимптотические формулы для перемещений и напряжений, в которых в явном виде выделены порции поверхностные, квазипродольные и квазипоперечные волны.

Ранее рассматривались контактные задачи возмущения электроупругой полуплоскости одиночным электродом [4, 5] и динамическая контактная задача для изотропной упругой полуплоскости, усиленной бесконечной или полубесконечной накладками малой толщины [1].

1. Распространение колебаний от точечного источника в анизотропной плоскости. Пусть в начале координат $x = 0, z = 0$ в неограниченной упругой анизотропной среде действует сосредоточенная гармоническая сила $\delta(x)\delta(z)e^{-i\omega t}$, направленная по оси z . Будем рассматривать решения вида

$$u^{(n)}(x, z, t) = u_n(x, z)e^{-i\omega t}, \quad \omega > 0$$

Здесь и всюду далее $n = 1, 3$, функции $u_n(x, z)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \rho \omega^2 u_1 = 0 \tag{1.1}$$

$$c_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \rho \omega^2 u_3 + \delta(x)\delta(z) = 0$$

Предполагается, что коэффициенты c_1, \dots, c_4 выражены через упругие постоянные среды и удовлетворяют условиям строгой гиперболичности и положительной определенности упругой энергии [6]

$$-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < 1 + \alpha\beta \tag{1.2}$$

$$\alpha = \frac{c_3}{c_1}, \quad \beta = \frac{c_3}{c_4}, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - \frac{c_2^2}{(c_1 c_4)}$$

Рассмотрим случай

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 \quad (1.3)$$

Методом преобразования Фурье по переменной x построим решение системы (1.1), которое при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ представляет уходящую волну. Для перемещений получаем выражения

$$u_1(x, z) = \frac{\text{sign } z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^2 (-1)^m i \sigma c_2 v_m(\sigma) d\sigma \quad (1.4)$$

$$u_3(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^2 (-1)^m (c_1 \sigma^2 - c_1 k_1^2 - c_3 \gamma_m) v_m(\sigma) \gamma_1^{-1} d\sigma$$

где

$$v_m(\sigma) = [2c_3 c_4 (\gamma_1 - \gamma_2)] \exp[-i(\sigma x - i\gamma_m(\sigma) |z|)]$$

$$\gamma_m(\sigma) = \left[\frac{Z(\sigma) + (-1)^{m+1} (U(\sigma))^{1/2}}{2\alpha} \right]^{1/2}$$

$$Z(\sigma) = \sigma^2 \gamma - k_2^2 \alpha (1 + \beta), \quad U(\sigma) = Z^2(\sigma) - 4\alpha \beta (\sigma^2 - k_1^2) (\sigma^2 - k_2^2),$$

$$k_1^2 = \rho \omega^2 / c_1, \quad k_2^2 = \rho \omega^2 / c_3$$

Здесь и всюду далее $m = 1, 2$.

Приступим к исследованию функций $\gamma_m(\sigma)$. Отметим, что $\pm k_{m+2}$ — точки ветвления второго порядка для внутреннего радикала в выражениях для функций $\gamma_m(\sigma)$, причем

$$\pm k_{m+2} = \pm \alpha^{1/2} k_2 M_1^{-1/2} [M_2 + (-1)^{m+1} T^{1/2}]^{1/2}$$

$$M_1 = \gamma^2 - 4\alpha \beta, \quad M_2 = \gamma(1 + \beta) - 2\beta(1 + \alpha)$$

$$M_3 = (1 - \beta)^2, \quad T = M_2^2 - M_1 M_3 = 4\alpha c_3^2 c_4^{-2} [(\alpha + \beta) - \gamma]$$

При $Z(\pm k_1) < 0$, $Z(\pm k_2) > 0$ точки $\pm k_1$, $\pm k_2$ будут соответственно точками ветвления второго порядка для внешнего радикала в выражениях для функций $\gamma_m(\sigma)$.

Следовательно, имеют место разложения

$$\gamma_m(\sigma) = a_m^{\pm} (\sigma \pm k_m)^{1/2} + \dots, \quad (\sigma - k_m)^{1/2} = -i(k_m - \sigma)^{1/2}$$

$$(-\sigma - k_m)^{1/2} = -i(\sigma + k_m)^{1/2} \quad a_m^- = [(-1)^m 2k_m \beta (k_2^2 - k_1^2) / Z(k_m)]^{1/2}$$

$$Z(k_m) = k_m^2 \gamma - k_2^2 \alpha (1 + \beta) \quad a_m^+ = -i a_m^-$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что эти разложения верны только при значениях γ из интервала $(\alpha(1 + \beta), 1 + \alpha\beta)$, где $\alpha(1 + \beta)$ определяется из уравнения $Z(k_2) = 0$. При $\gamma = \alpha(1 + \beta)$ точки $\pm k_2 = \pm k_4$ являются точками ветвления четвертого порядка для $\gamma_m(\sigma)$, а точки $\pm k_1$ остаются точками ветвления второго порядка для $\gamma_1(\sigma)$. Значит,

$$\gamma_m(\sigma) = b_m^{\pm} (\sigma \pm k_2)^{1/4} + \dots, \quad (\sigma - k_2)^{1/4} = e^{-i\pi/4} (k_2 - \sigma)^{1/4}$$

$$(-\sigma - k_2)^{1/4} = e^{-i\pi/4} (k_2 + \sigma)^{1/4}, \quad b_2^- = e^{-i\pi/4} b_1^+$$

$$b_1^- = e^{i\pi/4} b_1^+, \quad b_1^+ = \alpha^{1/4} [4k_2 \beta (k_2^2 - k_1^2)]^{1/4}$$

Поскольку $Z(k_2) = 0$ при $\gamma = \alpha(1 + \beta)$, то $Z(k_2) < 0$, $Z(k_1) < 0$ при $-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$. Это означает, что $\gamma_2(\sigma)$ точек ветвления не имеет, а для функции $\gamma_1(\sigma)$

точки $\pm k_1, \pm k_2$ будут точками ветвления второго порядка. Следовательно,

$$\gamma_1(\sigma) = d_m^+(\sigma \pm k_m)^{1/2} + \dots, \quad d_m^+ = -id_m^-$$

$$d_m^- = [2k_m \beta(k_1^2 - k_2^2) / (Z(k_m))]^{1/2}$$

Зная особые точки функций $\gamma_m(\sigma)$ при разных значениях γ , методом Лайтхилла можно получить асимптотические выражения при $|x| \rightarrow \infty$. Имеем:

при $\alpha(1 + \beta) < \gamma < 1 + \alpha\beta$

$$u^{(3)}(x, 0, t) = \frac{A_1(a_2^-)E_2}{\pi^{1/2}|x|^{1/2}} - \frac{A_3E_2 + ia_1E_1}{2\pi^{1/2}|x|^{3/2}} + o(|x|^{-5/2})$$

при $-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$

$$u^{(3)}(x, 0, t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{A_1(d_2^-)}{|x|^{1/2}} - \frac{A_3}{|x|^{3/2}} \right) E_2 + \frac{iB_1(d_1^-)E_1}{2\pi^{1/2}|x|^{3/2}} + o(|x|^{-5/2}) \quad (1.5)$$

при $\gamma = \alpha(1 + \beta)$

$$u^{(3)}(x, 0, t) = \frac{(k_2^2 - k_1^2)^{1/2} \Gamma(1/4) F}{\alpha k_2^2 \pi (b_1^- + b_2^-) |x|^{1/4}} + \dots + \frac{iB_1(a_1^-)E_1}{2\pi^{1/2}|x|^{3/2}} + o(|x|^{-7/4})$$

Здесь

$$E_m = \exp[-i(\omega x - k_m |x| - \pi/4)]$$

$$F = \exp[-i(\omega x - k_2 |x| - 3\pi/4)], \quad u^{(1)}(x, 0, t) \equiv 0$$

$$B_1(\lambda) = \frac{\lambda [c_3 \lambda^2 - 2k_1 c_1 (c_1 c_4)^{1/2}]}{4k_1 c_1 c_3 (k_2^2 - k_1^2)}$$

$$A_1(\lambda) = \frac{\lambda (c_1 c_4)^{1/2}}{4c_3 k_2}$$

$$A_3 = \lim_{\sigma \rightarrow k_2} 2(\sigma - k_2)^{1/2} \frac{d}{d\sigma} \left[(\sigma - k_2)^{1/2} \frac{d}{d\sigma} (\sigma - k_2)^{1/2} \bar{u}_3(\sigma, 0) \right]$$

Представляет интерес также получение асимптотических формул, когда $z \neq 0$. Для этого случая без ограничения общности можно считать $x > 0, z > 0$.

Исследуем критические точки функций

$$\lambda_m(\alpha_m) = \alpha_m \cos \theta - i\gamma_m(\alpha_m) \sin \theta$$

т.е. нули функций $\lambda_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$), где $\lambda_m^{(i)}$ — производные i -го порядка функции $\lambda_m(\alpha_m)$, которые должны удовлетворять при каждом θ уравнению

$$\operatorname{tg} \theta = (i d\gamma_m / (d\alpha_m))^{-1}, \quad \alpha_m = \sigma_m + i\tau_m \quad (1.6)$$

$$\left(i \frac{d\gamma_m}{d\alpha_m} = (-1)^m \frac{\alpha_m [\gamma \gamma_m^2 - \beta(2\alpha_m^{(2)} - k_1^2 - k_2^2)]}{i(U(\alpha_m))^{1/2} \gamma_m} \right)$$

Отсюда следует, что рассматриваемые уравнения будут иметь решения только при вещественных $i d\gamma_m / (d\alpha_m)$.

В зависимости от значений γ рассмотрим следующие случаи.

1°. $\gamma_* < \gamma < 1 + \alpha\beta$. В этом случае волновые фронты имеют четыре лакуны, расположенные между осями координат (x, z) [7]. Величина γ_* — корень урав-

нения

$$[3(1-\beta)P - (1+\beta)\gamma - 2\beta(1+\alpha)][(1-\beta)P + Q]^{\frac{1}{2}} + 2[(1+\beta)P - (1-\beta)\gamma][2(1-\beta)P]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$P = (\gamma^2 - 4\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}, \quad Q = 2\beta(1-\alpha) - \gamma(1-\beta)$$

Можно показать, что $\lambda_2^{(2)}(\alpha_2) = 0$ при $\alpha_2 = \alpha'_{20}$ и $\alpha_2 = \alpha''_{20}$ где α'_{20} и α''_{20} определяются из условия $\gamma_2^{(2)}(\alpha_2) = 0$. Каждому значению θ из интервала (θ_*, θ_{**}) соответствуют три нулевые точки $\alpha_{20}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) для функции $\lambda_2^{(1)}(\alpha_2)$, определяемые из уравнения (1.6). Концы интервала определяются выражением $\text{arctg}(id\gamma_2/d\alpha_2)^{-1}$ при $\alpha_2 = \alpha'_{20}$ для θ_* и $\alpha_2 = \alpha''_{20}$ для θ_{**} . Остальным значениям θ из интервала $(0, \pi/2)$ соответствует по одной нулевой точке функций $\lambda_m^{(1)}(\alpha_m)$.

2°. $\gamma = \gamma_*$. Лакуны превращаются в точку. Следовательно, $\alpha_2 = \alpha'''_{20} = \alpha''_{20} = \alpha'_{20}$ будет нулевой точкой для функции $\lambda_2^{(3)}(\alpha_2)$. Можно показать, что $\lambda_2^{(4)}(\alpha'''_{20}) \neq 0$, α'''_{20} определяется из условия $\gamma_2^{(3)}(\alpha_2) = 0$. Критические точки функций $\lambda_m(\alpha_m)$ при остальных значениях γ из интервала $(-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}, \gamma_*)$ исследуются аналогичным способом.

Зная критические точки функций $\lambda_m(\alpha_m)$ и используя полярные координаты, при помощи (1.4) можно получить асимптотические выражения $u^{(n)}(r, \theta, t)$ по методу стационарной фазы.

Для случая 1° находим:

при $0 < \theta < \theta_*$ и $\theta_* < \theta < \pi/2$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + B_n^{(2)}(\alpha_{20}) + o(r^{-\frac{3}{2}})$$

при $\theta = \theta_*$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + A_n^{(2)}(\alpha'_{20})F_3(\alpha'_{20})[r|\lambda_2^{(2)}(\alpha'_{20})|]^{-\frac{1}{3}} + o(r^{-\frac{2}{3}}) \quad (1.7)$$

при $\theta_* < \theta < \theta_{**}$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + \sum_{k=1}^3 B_n^{(2)}(\alpha_{20}^{(k)}) + o(r^{-\frac{3}{2}})$$

при $\theta = \theta_{**}$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + A_n^{(2)}(\alpha''_{20})F_3(\alpha''_{20})[r|\lambda_2^{(2)}(\alpha''_{20})|]^{-\frac{1}{3}} + o(r^{-\frac{2}{3}})$$

В случае 2° лакуна превращается в точку, причем

при $0 < \theta \neq \theta_* < \pi/2$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + B_n^{(2)}(\alpha_{20}) + o(r^{-\frac{3}{2}})$$

при $\theta = \theta_*$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = B_n^{(1)}(\alpha_{10}) + A_n^{(2)}(\alpha'''_{20})F_4(\alpha'''_{20})[r\lambda_2^{(4)}(\alpha'''_{20})]^{-\frac{1}{4}} + o(r^{-\frac{3}{4}})$$

Здесь

$$F_m(\alpha_{m0}) = \exp[-i(\omega t + \lambda_m(\alpha_{m0})r + \frac{1}{4}\pi \text{sign} \lambda_m^{(2)}(\alpha_{m0}))]$$

$$F_3(\alpha'_{20}) = \Gamma(1 + \frac{1}{3})3^{\frac{5}{6}}2^{\frac{1}{3}} \exp[-i(\omega t + \lambda_2(\alpha'_{20})r)]$$

$$F_4(\alpha'''_{20}) = \Gamma(1 + \frac{1}{4})2^{\frac{7}{4}}3^{\frac{1}{4}} \exp[-i(\omega t + \lambda_2(\alpha'''_{20})r + \frac{1}{8}\pi \text{sign} \lambda_2^{(4)}(\alpha'''_{20}))]$$

$$\lambda_m(\alpha_m) = \alpha_m \cos \theta - i\gamma_m(\alpha_m) \sin \theta$$

$$\alpha_m = \sigma_m + i\tau_m$$

$$A_1^{(m)}(\lambda) = (-1)^m i c_2 \lambda F_5(\lambda)$$

$$A_3^{(m)}(\lambda) = (-1)^m [c_1 \lambda^2 - c_3 k_1^2 - c_3 \gamma_m^{(2)}(\lambda)] \gamma_m^{-1}(\lambda) F_5(\lambda)$$

$$F_5^{-1}(\lambda) = 2(2\pi)^{1/2} c_3 c_4 [\gamma_1^2(\lambda) - \gamma_2^2(\lambda)]$$

$$B_n^{(m)}(\lambda) = A_n^{(m)}(\lambda) F_m(\lambda) [r \lambda_m^{(2)}(\lambda)]^{-1/2}$$

Полученные ряды позволяют определить амплитуды квазипродольных и квазипоперечных волн в дальней от источника зоне. Первые члены рядов (1.5), (1.7) представляют собой квазипродольные волны, вторые члены – квазипоперечные волны. Отметим, что квазипоперечные волны, отвечающие точкам возврата на фронте волны, затухают как $r^{-1/3}$, т.е. медленнее, чем волны, связанные с обычными точками. Когда лакуны превращаются в точки, квазипоперечные волны затухают как $r^{-1/4}$.

2. Распространение колебаний от точечного источника в анизотропной полуплоскости с тонким покрытием. Решим вспомогательную задачу об установившихся колебаниях анизотропной полуплоскости.

Пусть на границе анизотропной полуплоскости действует сосредоточенная в начале координат единичная, горизонтальная гармоническая сила $\delta(x)e^{-i\omega t}$ с частотой ω .

Стационарные части смещений удовлетворяют однородной системе уравнений (1.1) при граничных условиях

$$(c_2 - c_3) \frac{\partial u_1}{\partial x} + c_4 \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \quad c_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\delta(x) \quad (z = 0) \quad (2.1)$$

Методом преобразования Фурье по переменной x построим решение однородных уравнений (1.1) при граничных условиях (2.1), которые при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ представляют уходящую волну. Для перемещений получаем

$$u^{(n)}(x, 0, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\sigma) \kappa(\sigma) d\sigma$$

$$w_1(\sigma) = c_4 (\sigma^2 - k_2^2)^{1/2} (\gamma_1 - \gamma_2), \quad \kappa(\sigma) = e^{-i\sigma x} / R(\sigma) \quad (2.2)$$

$$w_3(\sigma) = i\sigma \{ [c_1 c_4 (\sigma^2 - k_1^2)]^{1/2} - (c_2 - c_3) (\sigma^2 - k_2^2)^{1/2} \}$$

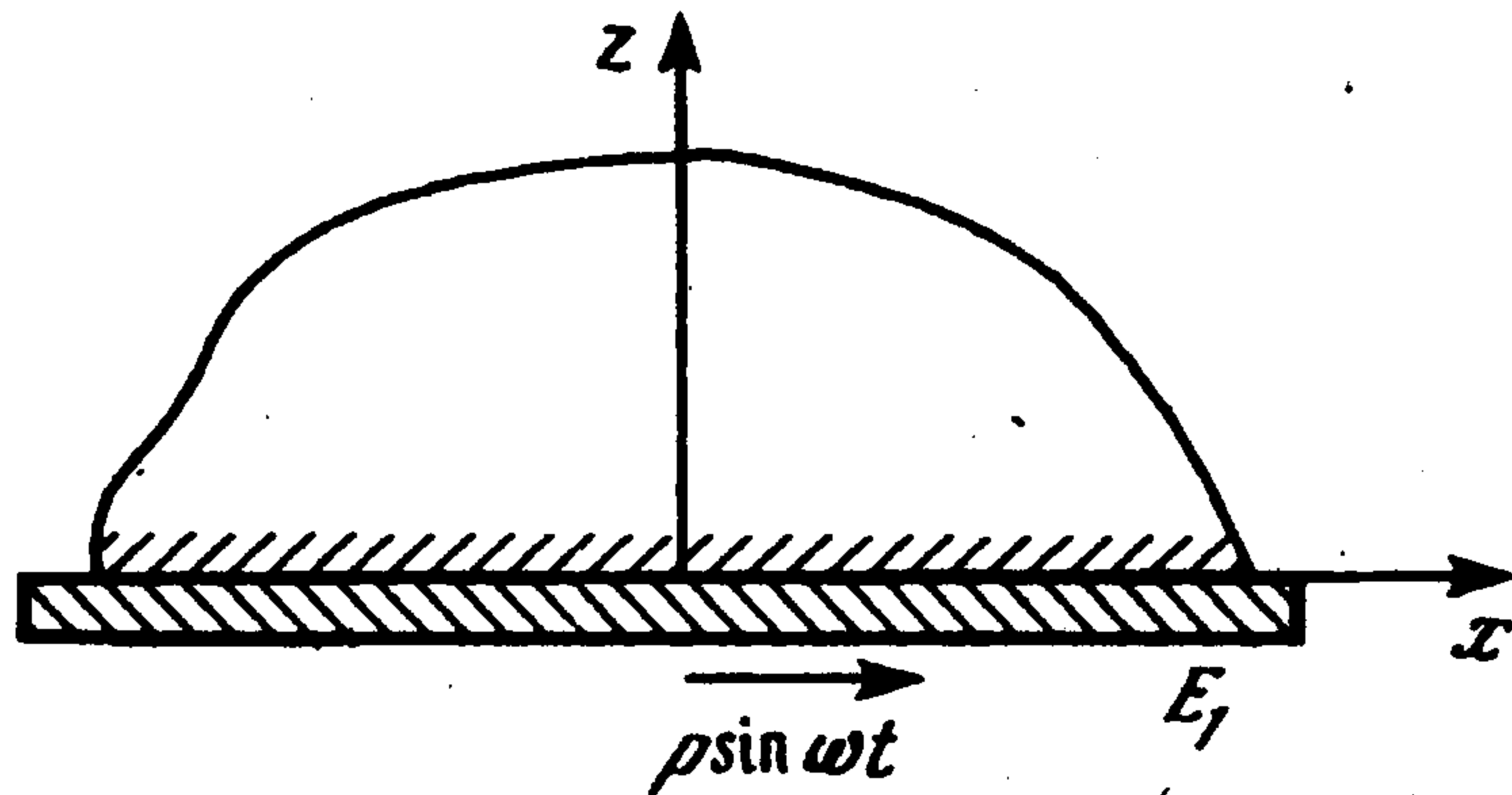
$$R(\sigma) = \{ \sigma^2 [c_1 c_4 - (c_2 - c_3)^2] - c_1 c_4 k_1^2 \} (\sigma^2 - k_2^2)^{1/2} - c_3 k_2^2 [c_1 c_4 (\sigma^2 - k_1^2)]^{1/2}$$

Пусть анизотропная полуплоскость на своей границе усилена упругим покрытием в виде накладки с достаточно малой постоянной толщиной h (фигура).

Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения покрытий с полуплоскостью, когда на верхней грани покрытия действует гармоническая горизонтальная сила $p\delta(x)\sin(\omega t)$. Для простоты вычислений в дальнейшем эту силу возьмем в виде $p\delta(x)e^{-i\omega t}$. Очевидно, что мнимая часть решения с обратным знаком представляет собой искомое решение.

Относительно покрытия делаются следующие допущения.

Толщина покрытия во много раз меньше длины распространяющихся в нем волн. Как и в [1], будем полагать, что вследствие малости толщины h жесткость покрытия на изгиб пренебрежимо мала и поэтому можно пренебречь нормальным давлением покрытия на полуплоскость. Иными словами, будем считать, что под покрытием действует только тангенциальное контактное напряжение, т.е. она находится в одноосном напряженном состоянии.



Установившиеся колебания покрытия в этом случае описываются уравнением [1]

$$d^2 u_* / dx^2 + p_1^2 u_* = (E_1 h)^{-1} [\tau_*(x) - p \delta(x)] \quad (2.3)$$

$$p_1^2 = \omega^2 / c^2, \quad c = E_1^{1/2} / \rho_1^{1/2}$$

где c – скорость распространения волн в покрытии, $\tau_*(x)$ – стационарная часть неизвестных тангенциальных контактных напряжений, E_1 , ρ_1 – модуль упругости и плотность материала покрытия, соответственно.

С другой стороны, амплитуда $u_1(x)$ горизонтальных перемещений граничных точек анизотропной полуплоскости от тех же амплитуд напряжений $\tau_*(x)$, приложенных к границе анизотропной полуплоскости, согласно (2.2) и на основании принципа суперпозиции будет даваться формулой

$$u_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|) \tau_*(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\sigma) k(\sigma) d\sigma$$

Заметим, что на линии соединения покрытия с полуплоскостью должно выполняться условие

$$u_*(x) = u_1(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

которое в сочетании с уравнением (2.3) сводит задачу определения амплитуды контактных напряжений к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dx^2} + p_1^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|) \tau_*(s) ds = \lambda^* \tau_*(x) - \lambda^* p \delta(x), \quad \lambda^* = (c_4 E_1 h)^{-1} \quad (2.4)$$

Таким образом, решение контактной задачи об установившихся колебаниях упругой анизотропной полуплоскости, усиленной на своей границе упругим бесконечным покрытием малой толщины, сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (2.4).

Применив к обеим частям уравнения (2.4) преобразование Фурье и воспользовавшись известным свойством свертки, получим

$$\tau_*(\sigma) = \lambda^* p R(\sigma) [f(\sigma)]^{-1}$$

Здесь

$$f(\sigma) = (\sigma^2 - p_1^2)(\sigma^2 - k_2^2)(\gamma_1 + \gamma_2) + \lambda^* R(\sigma) \quad (2.5)$$

Исследуем корни функции $f(\sigma)$ при разных значениях γ .



В точках вещественной оси σ функции $\gamma_m(\sigma)$ могут принимать вещественные, чисто мнимые или комплексные значения в зависимости от γ .

При условиях $\gamma < 2(\alpha\beta)^{1/2}$, $\gamma > \alpha(1 + \beta)$ функция $\gamma_1(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| < k_1$ и вещественной при $|\sigma| > k_1$. Функция $\gamma_2(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| < k_2$ и вещественной при $|\sigma| > k_2$, т.е. $\gamma_m(\sigma)$ принимают только вещественные или чисто мнимые значения.

При условиях $\gamma < 2(\alpha\beta)^{1/2}$, $\gamma > \alpha(1 + \beta)$ функция $\gamma_1(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| < k_1$, вещественной при $k_1 < |\sigma| < \sigma_*$ и комплексной при $|\sigma| > \sigma_*$. Из условия непрерывности вещественной части $\gamma_1(\sigma)$ при $|\sigma| = \sigma_*$ следует, что $\text{Im } \gamma_1(\sigma) = 0$, при $|\sigma| = \sigma_*$. Функция $\gamma_2(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| < k_2$, вещественной при $k_2 < |\sigma| < \sigma_*$, комплексной при $|\sigma| > \sigma_*$; $\text{Im } \gamma_2(\sigma) = 0$ при $|\sigma| = \sigma_*$. Корни внутреннего радикала функций $\gamma_m(\sigma)$ лежат на мнимой и действительной осях (два на мнимой и два $\sigma = \pm\sigma_*$ на действительной осях симметрично началу координат).

При условиях $\gamma = \alpha(1 + \beta)$, $\gamma < 2(\alpha\beta)^{1/2}$ на всем интервале $|\sigma| > k_2$ функции $\gamma_m(\sigma)$ комплексные и $\pm\sigma_* = \pm k_2$.

При условиях $\gamma = \alpha(1 + \beta)$, $\gamma > 2(\alpha\beta)^{1/2}$ на всем интервале $|\sigma| > k_2$ функции $\gamma_m(\sigma)$ вещественные и $\pm\sigma_* = \pm k_2$.

При условиях $\gamma < \alpha(1 + \beta)$, $\gamma < 2(\alpha\beta)^{1/2}$ функция $\gamma_1(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| < k_1$, вещественной при $k_1 < |\sigma| < k_2$, чисто мнимой при $k_2 < |\sigma| \leq \sigma_*$ комплексной при $|\sigma| > \sigma_*$. $\text{Re } \gamma_1(\sigma) = 0$ при $\sigma = \sigma_*$. Функция $\gamma_2(\sigma)$ является чисто мнимой при $|\sigma| \leq \sigma_*$, комплексной при $|\sigma| > \sigma_*$, $\text{Re } \gamma_2(\sigma) = 0$ при $|\sigma| = \sigma_*$.

Два корня внутреннего радикала являются вещественными $\sigma = \pm\sigma_*$ и два чисто мнимыми. Можно показать, что при $\gamma < \alpha(1 + \beta)$ имеем $k_2 < \sigma_* < k_2[\alpha(1 + \beta)/\gamma]^{1/2}$.

На основании сказанного можно утверждать, что $\gamma_1(\sigma) + \gamma_2(\sigma)$ принимает вещественное значение, при $\alpha(1 + \beta) \leq \gamma < 1 + \alpha\beta$, $|\sigma| \geq k_2$ и $-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$, $|\sigma| \geq \sigma_*$.

Положив в (2.5) $\sigma^2 = l^2 y^2$ ($l^2 = \rho\omega^2$), после элементарных выкладок получим

$$f(y) = l^2 \{ l^2 (y^2 - p_1^*) (y^2 - c_3^{-1})^{1/2} (\gamma_1(y) + \gamma_2(y)) + \lambda^* R(y) \}$$

$$R(y) = \{ [c_1 c_4 - (c_2 - c_3)^2] y^2 - c_4 \} - (y^2 - c_3^{-1})^{1/2} - (c_1 c_4)^{1/2} (y^2 - c_1^{-1})^{1/2}, \quad p_1^{*2} = (\rho c^2)^{-1}$$

Отметим, что в случае трансверсально-изотропной среды функция $R(y)$ имеет два вещественных корня $y = \pm y_R$, причем $y_R > c_3^{-1/2}$ [8].

Рассмотрим следующие случаи.

1°. $\alpha(1 + \beta) \leq \gamma < 1 + \alpha\beta$. В этом случае имеют место следующие три комбинации:

$$c_3^{-1/2} < p_1^* < y_R; \quad p_1^* < c_3^{-1/2} < y_R; \quad c_3^{-1/2} < y_R < p_1^* \quad (2.6)$$

Рассмотрим первый случай

$$f(\pm p_1^*) = \rho^{3/2} \omega^3 \lambda^* R(\pm p_1^*) < 0$$

$$f(\pm y_R) = \rho^2 \omega^5 (y_R^2 - p_1^*) (y_R^2 - c_3^{-1})^{1/2} [\gamma_1(\pm y_R) + \gamma_2(\pm y_R)] > 0$$

Функция $f(y)$ имеет два вещественных корня. Заметим, что эти корни лежат в интервалах $(\pm p_1^*, \pm y_R)$.

Второй случай. Здесь

$$f(\pm c_3^{-1/2}) = -\rho^{3/2} \omega^3 \lambda^* (c_1 c_4)^{1/2} (c_3^{-1} - c_1^{-1})^{1/2} < 0$$

$$f(\pm y_R) = \rho^{3/2} \omega^5 (y_R^2 - p_1^*) (y_R^2 - c_3^{-1})^{1/2} [\gamma_1(\pm y_R) + \gamma_2(\pm y_R)] < 0$$

Эти корни лежат в интервалах $(\pm c_3^{-1/2}, \pm y_R)$.

Третий случай. Имеем

$$f(\pm y_R) = \rho^{5/2} \omega^5 (y_R^2 - p_1^{*2})(y_R^2 - c_3^{-1})^{1/2} [\gamma_1(\pm y_R) + \gamma_2(\pm y_R)] < 0$$

$$f(\pm p_1^*) = \rho^{3/2} \omega^3 R(\pm p_1^*) \lambda^* > 0$$

Обозначим эти корни через $\pm y_R^*$. В третьем случае $\pm y_R^* \in (\pm y_R, \pm p_1^*)$.

2°. $-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$. При этом имеем

$$\text{а) } y_* < y_R < p_1^*, \quad \pm y_R^* \in (\pm y_R, \pm p_1^*)$$

$$\text{б) } y_* < p_1^* < y_R, \quad \pm y_R^* \in (\pm p_1^*, \pm y_R)$$

(2.7)

$$\text{в) } p_1^* < y_* < y_R, \quad \pm y_R^* \in (\pm y_*, \pm y_R)$$

$$\text{г) } p_1^* < y_R < y_*, \quad \text{д) } y_R < p_1^* < y_*, \quad \text{ж) } y_R < y_* < p_1^*$$

В случаях г – ж у функции $f(y)$ нет корней; y_* – точки ветвления внутреннего радикала.

Отсюда следует, что в случаях 1°, 2° при $y_R > y_*$, $\lambda^* < \rho y_R^2 (\rho_1 c_4 h)^{-1}$ корни функции $f(y)$ лежат в интервалах $(\pm p_1^*, \pm y_R)$. При $\lambda^* = \rho y_R^2 (\rho_1 c_4 h)^{-1}$ или $y_R = y_*$ корни функции $f(y)$ совпадают с $\pm y_R$. При $y_R > y_*$, $\lambda^* > \rho y_R^2 (\rho_1 c_4 h)^{-1}$ корни лежат в интервалах $(\pm y_R, \pm p_1^*)$, а при $y_R < y_*$ у функции $f(y)$ нет корней.

Теперь выведем асимптотическую формулу для тангенциального контактного напряжения

при $\alpha(1 + \beta) < \gamma < 1 + \alpha\beta$

$$-\text{Im } \tau(x, t) = T_R \Omega + \frac{T(a_1^-) E_{11}(a_1^-)}{2\pi^{1/2} |x|^{3/2}} + \frac{\Pi(a_2^-) \text{Re } E_2}{2\pi^{1/2} |x|^{3/2}} + o(|x|^{-5/2}) \quad (2.8)$$

при $\gamma = \alpha(1 + \beta)$

$$-\text{Im } \tau(x, t) = T_R \Omega + \frac{T(a_1^-) E_{11}(a_1^-)}{2\pi^{1/2} |x|^{3/2}} + \frac{3\Gamma(3/4) \Pi_* E}{2^{5/2} \pi |x|^{7/4}} + o(|x|^{-9/4})$$

при $-(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$

$$-\text{Im } \tau(x, t) = T_R \Omega + \frac{T(d_1^-) E_{11}(d_1^-)}{2\pi^{1/2} |x|^{3/2}} - \frac{\Pi(d_2^-) \text{Re } E_2}{2\pi^{1/2} |x|^{3/2}} + o(|x|^{-5/2})$$

Здесь

$$\Omega = \cos(\omega t - \sigma_R^* |x|), \quad E = \cos(\omega t - k_2 |x| - \pi/8)$$

$$E_{11}(\lambda) = \cos[\omega t - k_1 |x| - \pi/4 + \text{arctg}(T_{**}(\lambda)/T_*(\lambda))]$$

$$T(\lambda) = [T_*^2(\lambda) + T_{**}^2(\lambda)]^{1/2}$$

$$T_R = \Omega_1^{-1}(\sigma_R^*) R(\sigma_R^*)$$

$$T_*(\lambda) = (k_1^2 - k^2) k_1^2 \lambda \varepsilon(\lambda) \Omega_-(\lambda) \Omega_+^{-2}(\lambda)$$

$$T_{**}(\lambda) = 2(2k_2\beta)^{1/2} k_1^4 \lambda^* \lambda^2 (k_1^2 - k^2) L \varepsilon(\lambda) \Omega_+^{-2}(\lambda)$$

$$\varepsilon(\lambda) = L \lambda^2 - 2c_1^2 k_1^2, \quad L = (c_2 - c_3)^2 - c_1 c_4$$

$$\Omega_1(\sigma_R^*) = d / (d\sigma) [f(\sigma)]_{\sigma=\sigma_R^*}$$

$$\Omega_{\pm}(\lambda) = 2(k_1^2 - k^2)^2 (k_2^2 - k_1^2) k_2 \beta \pm \lambda^* \lambda^2 k_1^4 L$$

$$T_{**}(\lambda) / T_*(\lambda) = 2(2k_2 \beta)^{1/2} \lambda^* \lambda (k_1^2 - k^2) L \Omega_{-}^{-1}(\lambda)$$

$$П(\lambda) = \frac{2(k^2 - k_2^2) \beta^{1/2}}{\lambda^* \lambda (c_3 c_4)^{1/2} c_3 k_2}$$

$$П_*(\lambda) = \frac{(k^2 - k_2^2) b_1^+}{3 \lambda^* c_3 (c_1 c_4)^{1/2} k_2^{3/2} (k_2^2 - k_1^2)^{1/2}}$$

В рядах (2.8) первые члены представляют напряжения от поверхностных волн, распространяющихся со скоростью $v_R^* = \omega / \sigma_R^*$; вторые члены – от квазипродольных волн, третьи – от квазипоперечных волн в дальней от источника зоне.

Сравним скорости распространения поверхностных волн напряжений в анизотропной полуплоскости с тонким покрытием и в анизотропной полуплоскости без покрытия. В первом случае имеем неоднородную полуплоскость, во втором случае – однородную полуплоскость.

Если сосредоточенная гармоническая горизонтальная сила приложена к границе однородной анизотропной полуплоскости, то скорость распространения поверхностных волн, которая зависит только от упругих констант материала анизотропной полуплоскости, выражается формулой $v_R = \omega / \sigma_R$.

Пусть теперь та же самая сила приложена к границе неоднородной полуплоскости. Рассматривая в рамках принятых выше предположений отдельно колебания покрытия, находим, что волны в покрытии распространяются со скоростью $(E_1 / \rho_1)^{1/2}$.

Если $\sigma_R > \sigma_*$, $E_1 / \rho_1 > \omega^2 / \sigma_R^2$, то корни функции $f(y)$ лежат в интервалах $(\pm p_1^*, \pm \sigma_R / \omega)$.

С другой стороны, так как скорость распространения поверхностных волн в неоднородной полуплоскости равна $v_R^* = \omega / \sigma_R^*$, где σ_R^* / ω – корень функции $f(y)$, то отсюда вытекает, что скорость распространения поверхностных волн больше скорости соответствующих волн в однородной полуплоскости.

Пусть теперь $\sigma_R > \sigma_*$, $E_1 / \rho_1 < \omega^2 / \sigma_R^2$. Тогда корни функции лежат в интервалах $(\pm \sigma_R / \omega, \pm p_1^*)$. Это означает, что скорости распространения поверхностных волн меньше скорости соответствующих волн в однородной полуплоскости.

В случаях $\sigma_R = \sigma_*$ или $E_1 / \rho_1 = \omega^2 / \sigma_R^2$ корни функции $f(y)$ совпадают с корнями функции $R(y)$. В результате $\tau(\sigma)$ на вещественной оси не имеет полюсов. В этих случаях поверхностные волны не возникают. Наконец, в случае $\sigma_R < \sigma_*$ функция $f(y)$ вещественных корней не имеет и, следовательно, поверхностные волны опять не возникают.

Заметим, что между квазипродольными волнами происходит некоторое фазовое отклонение. Из формулы (2.8) следует, что в случае, когда $k_1 < k$ и $\Omega_{-}^{-1}(\lambda) > 0$, фазовое отклонение отрицательно, а при $k_1 < k$, $\Omega_{-}^{-1}(\lambda) < 0$ и $k_1 > k$, $\Omega_{-}^{-1}(\lambda) > 0$ фазовое отклонение положительно. Это означает, что в первом случае квазипродольные волны отстают, а во втором случае, наоборот, опережают квазипродольные волны в анизотропной полуплоскости без покрытия. При $k_1 = k$, как видно из (2.8), напряжением от квазипродольных волн при больших x можно пренебречь. Для квазипоперечных волн фазовых отклонений не происходит. Это согласуется с принятой моделью покрытия.

Из сказанного можно сделать следующие выводы.

1°. Когда лагуна не пересекает ось x , т.е. $\alpha(1 + \beta) < \gamma < 1 + \alpha\beta$, в неоднородной анизотропной полуплоскости возникают поверхностные волны. Отметим, что ранее [1]

исследование проводилось для части области $(\alpha(1 + \beta), 1 + \alpha\beta)$ [6], в которой также возникают поверхностные волны.

2°. Когда лакуна находится на оси, т.е. $-2(\alpha\beta)^{1/2} < \gamma < \alpha(1 + \beta)$ и $\sigma_R > \sigma_*$ или $\nu_R < \omega/\sigma_*$, в неоднородной анизотропной полуплоскости опять возникают поверхностные волны.

При $\nu_R \geq \omega/\sigma_*$ не возникают поверхностные волны. Но тогда принятая модель покрытия непригодна, поэтому отсутствие поверхностных волн в указанном случае обусловлено, возможно, непригодностью модели покрытия.

Отметим также, что когда лакуны превращаются в точки на оси x , т.е. $\gamma = \alpha(1 + \beta)$, квазипоперечные волны затухают как $|x|^{-7/4}$.

Автор благодарит Э.Х. Григоряна за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 101–116.
2. Lighthill M.J. An introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge: Univ. Press, 1958. p. 79.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Бабешко В.А., Рыжкова Т.В. О колебании поверхности пьезокристалла кварца одиночным электродом // Тез. докл. 3-го Всесоюз. симпоз. "Теоретические вопросы магнитоупругости". Ереван: Изд-во Ереван. госуниверситета, 1984. С. 16–17.
5. Рыжкова Т.В. О возмущении электроупругой полуплоскости одиночным электродом // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1984. № 4. С. 46–48.
6. Будаев В.С. Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 33–40.
7. Осипов И.О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
8. Свекло В.А. Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. № 114. Вып. 17. С. 28–71.

Ленинакан

Поступила в редакцию
23.IV.1991