УДК 539.3

© 1996 г. Л.А. Агаловян, Р.С. Геворкян, Г.Г. Хачатрян

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

На основании уравнений пространственной задачи теории термоупругости анизотропного тела найдено асимптотическое решение смешанной краевой задачи для пластины переменной толщины. Считается, что на одной из ее лицевых поверхностей задан вектор перемещения, а на противоположной – условия первой, второй или смешанной краевых задач теории упругости. На пластину, помимо поверхностных, действуют заданные объемные силы и температурные поля. Доказана неприменимость гипотез Кирхгофа–Лява к указанному классу задач. Построены итерационные процессы и получены рекуррентные формулы, позволяющие определять компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью. Рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих эффективность полученных формул и асимптотического подхода.

Асимптотический метод [1–6] оказался особенно эффективным для пластин и оболочек с заданными на лицевых поверхностях смешанными граничными условиями [7–9]. В частности, была доказана неприменимость гипотез классической теории пластин и оболочек к указанному классу. Были построены [7–12] асимптотические решения смешанных краевых задач для однослойных и многослойных анизотропных полос и пластин постоянной толщины. Асимптотический метод, как убедимся ниже, является эффективным также для решения смешанных краевых задач пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим анизотропное тонкое тело переменной толщины, занимающее область $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma: \alpha, \beta \in \Sigma, -\varphi_2(\alpha, \beta) \leqslant \gamma \leqslant \varphi_1(\alpha, \beta), \varphi_i(\alpha, \beta) > 0\}$, где Σ – плоскость, проходящая внутри тела и не пересекающаяся с лицевыми поверхностями. Последние задаются достаточно гладкими функциями $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta) > 0$ и $\gamma = -\varphi_2(\alpha, \beta) < 0$; α, β – криволинейные оси координат в плоскости Σ, совпадающие с главными направлениями анизотропии, а γ – прямолинейная ось, перпендикулярная к Σ в точке (α, β).

Требуется определить напряженно-деформированное состояние указанной пластины переменной толщины, когда на лицевой поверхности $\gamma = -\varphi_2(\alpha, \beta)$ заданы компоненты вектора перемещения

$$u_j(-\varphi_2) = u_j^-, \quad j = \alpha, \beta, \gamma \tag{1.1}$$

а на противоположной лицевой поверхности $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$ заданы условия первой

$$\sigma_{j\alpha}\cos(n,\alpha) + \sigma_{j\beta}\cos(n,\beta) + \sigma_{j\gamma}\cos(n,\gamma) = F_{nj}, \quad j = \alpha, \beta, \gamma \tag{1.2}$$

второй

$$u_j(\varphi_1) = u_j^+, \quad j = \alpha, \beta, \gamma \tag{1.3}$$

или смешанной

а) $\sigma_{j\alpha}\cos(n,\alpha) + \sigma_{j\beta}\cos(n,\beta) + \sigma_{j\gamma}\cos(n,\gamma) = F_{nj}, \quad j = \alpha, \beta$

$$u_\gamma(\varphi_1)=u_\gamma^+ \tag{1.4}$$

б) $u_j(\varphi_1)=u_j^-, \quad j=\alpha,\beta$

$$\sigma_{\alpha\gamma}\cos(n,\alpha)+\sigma_{\beta\gamma}\cos(n,\beta)+\sigma_{\gamma\gamma}\cos(n,\gamma)=F_{n\gamma} \tag{1.5}$$

краевых задач теории упругости, где $F_{nj}(\alpha, \beta)$, $u_j^{\pm}(\alpha, \beta)$ ($j = \alpha, \beta, \gamma$) – заданные функции и

$$\cos(n,\alpha)=-\frac{1}{\lambda A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} \quad (\alpha,\beta;A,B)$$

$$\cos(n,\gamma)=\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda=\left[1+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

A, B – коэффициенты Ламе первой квадратичной формы.

Считаем, что на пластину действуют объемные силы $\mathbf{P} = \{P_\alpha, P_\beta, P_\gamma\}$ и температурные поля, которые учитываются по модели Дюгамеля–Неймана.

В уравнениях равновесия и соотношениях упругости перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi=\alpha/a, \quad \eta=\beta/a, \quad \zeta=\gamma/h=\varepsilon^{-1}\gamma/a$$

$$u_\alpha=au, \quad u_\beta=av, \quad u_\gamma=aw \tag{1.7}$$

$$(h=\max\{\sup\varphi_1(\alpha,\beta),\ \sup\varphi_2(\alpha,\beta)\},\ \varepsilon=h/a)$$

где a – характерный размер пластины в тангенциальной плоскости, ε – малый параметр, $a \gg h$.

В результате имеем систему

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial\zeta}+a(\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\beta\beta})k_\beta+2ak_\alpha\sigma_{\alpha\beta}+aP_\alpha=0 \quad (\alpha,\beta;\xi,\eta;A,B)$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\zeta}+ak_\beta\sigma_{\alpha\gamma}+ak_\alpha\sigma_{\beta\gamma}+aP_\gamma=0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\xi}+ak_\alpha v=a_{11}\sigma_{\alpha\alpha}+a_{12}\sigma_{\beta\beta}+a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}+a_{14}\sigma_{\beta\gamma}+a_{15}\sigma_{\alpha\gamma}+a_{16}\sigma_{\alpha\beta}+\alpha_{11}\theta \tag{1.8}$$

$$(\alpha,\beta;\xi,\eta;u,v;A,B;1,2)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}+a_{23}\sigma_{\beta\beta}+\ldots+a_{36}\sigma_{\alpha\beta}+\alpha_{33}\theta$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\xi}-a(k_\alpha u+k_\beta v)=a_{16}\sigma_{\alpha\alpha}+\ldots+a_{66}\sigma_{\alpha\beta}+\alpha_{12}\theta$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}=a_{15}\sigma_{\alpha\alpha}+\ldots+a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}+a_{56}\sigma_{\alpha\beta}+\alpha_{13}\theta$$

$$(\xi,\eta;\ u,v;\ 5,4;\ \alpha_{13},\alpha_{23})$$

где α_{jk} – коэффициенты теплового расширения, $\theta = T - T_0$ – приращение температуры.

В (1.8) можно было бы учесть изменяемость по координатам, если взамен (1.7) использовать безразмерные координаты, введенные в [1]. В рассматриваемых задачах

решения получены в виде окончательных формул, откуда следует, что влияние изменяемости – это один из факторов, обусловливающих общую оценку остаточного члена.

Решение системы (1.8) ищем в виде асимптотического разложения

$$Q=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{\varkappa_a+s}Q^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.9}$$

где Q – любая из искомых величин, $\varkappa_\sigma=-1$ для напряжений и $\varkappa_u=0$ для перемещений. При этом, для того чтобы вклад объемных сил и температурного поля был соизмерим со вкладом поверхностных воздействий, необходимо, чтобы

$$P_j=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{-2+s}a^{-1}P_j^{(s)},\quad \theta=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{-1+s}\theta^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.10}$$

Асимптотика (1.9) принципиально отличается от асимптотики тех же величин классической теории пластин. Например, здесь все напряжения имеют одинаковый асимптотический порядок, а в классической теории они разные [2, 5]. Укажем также, что лишь при асимптотике (1.9) можно получить непротиворечивую систему относительно неизвестных коэффициентов разложения $Q^{(s)}$.

Подставив (1.9), (1.10) в (1.8) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях ε в обеих частях каждого уравнения системы (1.8), получим непротиворечивую систему относительно величин $Q^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)$ представления (1.9). Решив полученную систему и удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующие рекуррентные формулы для определения напряжений и перемещений:

$$\sigma_{j\gamma}^{(s)}=\sigma_{j\gamma0}^{(s)}(\xi,\eta)+\sigma_{j\gamma*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j=\alpha,\beta,\gamma$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}=A_{13}\sigma_{\gamma\gamma0}^{(s)}+A_{14}\sigma_{\beta\gamma0}^{(s)}+A_{15}\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$(\alpha\alpha,\ \beta\beta,\ \alpha\beta;\ 1,\ 2,\ 6)$

$$u^{(s)}=(\zeta+\zeta_2)(A_{53}\sigma_{\gamma\gamma0}^{(s)}+A_{54}\sigma_{\beta\gamma0}^{(s)}+A_{55}\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}+u_*^{(s)}(\zeta)-u_*^{(s)}(-\zeta_2)+u^{-(s)},\quad \zeta_2=h^{-1}\varphi_2$$

$(u,\ v,\ w;\ 5l,\ 4l,\ 3l;\ l=3,4,5)$

$$u^{-(0)}=u_\alpha^-,\quad u^{-(s)}=0,\quad s\neq0\quad (u,\ v,\ w;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma*}^{(s)}=-\int_0^\zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\eta}+ak_\beta(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)}-\sigma_{\beta\beta}^{(s-1)})+2ak_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}+P_\alpha^{(s)}\right]d\zeta\quad(\alpha,\beta;\xi,\eta;A,B)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma*}^{(s)}=-\int_0^\zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\eta}+ak_\beta(\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}+ak_\alpha\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}+P_\gamma^{(s)}\right]d\zeta$$

$$\sigma_{\alpha\alpha*}^{(s)}=B_{11}R_1^{(s)}+B_{12}R_2^{(s)}+B_{16}R_3^{(s)} \tag{1.11}$$

$(\alpha\alpha,\ \beta\beta,\ \alpha\beta;\ 1l,\ 2l,\ 6l;\ l=1,2,6)$

$$u_*^{(s)}=\int_0^\zeta(a_{15}\sigma_{\alpha\alpha*}^{(s)}+a_{25}\sigma_{\beta\beta*}^{(s)}+\ldots+a_{65}\sigma_{\alpha\beta*}^{(s)}-\frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}+\alpha_{13}\theta^{(s)})d\zeta$$

$(u,\ v;\ \xi,\ \eta;\ 5,\ 4;\ A,\ B;\ 13;\ 23)$

$$w_*^{(s)}=\int_0^\zeta(a_{13}\sigma_{\alpha\alpha*}^{(s)}+a_{23}\sigma_{\beta\beta*}^{(s)}+\ldots+a_{36}\sigma_{\alpha\beta*}^{(s)}+\alpha_{33}\theta^{(s)})d\zeta$$

$$R_1^{(s)}=\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}+ak_\alpha v^{(s-1)}-a_{13}\sigma_{\gamma\gamma*}^{(s)}-a_{14}\sigma_{\beta\gamma*}^{(s)}-a_{15}\sigma_{\alpha\gamma*}^{(s)}-\alpha_{11}\theta^{(s)}$$

$(\xi,\ \eta;\ u,\ v;\ A,\ B;\ k_\alpha,\ k_\beta;\ 1,\ 2)$

$$R_3^{(s)}=\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}-a(k_\alpha u^{(s-1)}+k_\beta v^{(s-1)})-a_{36}\sigma_{\gamma\gamma*}^{(s)}-a_{46}\sigma_{\beta\gamma*}^{(s)}-a_{56}\sigma_{\alpha\gamma*}^{(s)}-\alpha_{12}\theta^{(s)}$$

$$B_{mn}=(a_{mk}a_{nk}-a_{mn}a_{kk})\Delta^{-1},\quad B_{kk}=(a_{mm}a_{nn}-a_{mn}^2)\Delta^{-1}$$

$$B_{mn}=B_{nm},\quad m\neq n\neq k\neq m,\quad m,n,k=1,2,6$$

$$A_{ml}=-a_{1l}B_{m1}-a_{2l}B_{m2}-a_{6l}B_{m6}$$

$$A_{pl}=a_{p1}A_{1l}+a_{p2}A_{2l}+a_{p6}A_{6l}+a_{pl},\quad A_{pl}\neq A_{lp},\quad p,l=3,4,5$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2-a_{66}a_{12}^2$$

Решение (1.11) содержит неизвестные пока функции интегрирования $\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}$, $\sigma_{\beta\gamma0}^{(s)}$, $\sigma_{\gamma\gamma0}^{(s)}$, которые однозначно определяются из граничных условий на лицевой поверхности $\gamma=\varphi_1(\alpha,\beta)$.

1°. Если на лицевой поверхности $\gamma=\varphi_1(\alpha,\beta)$ заданы компоненты тензора напряжений (1.2), получаем

$$\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}=(D_{24}^{33}\Phi_\alpha^{(s)}+D_{13}^{34}\Phi_\beta^{(s)}+D_{14}^{23}\Phi_\gamma^{(s)})\Delta_*^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\gamma0}^{(s)}=(D_{23}^{35}\Phi_\alpha^{(s)}+D_{15}^{33}\Phi_\beta^{(s)}+D_{13}^{25}\Phi_\gamma^{(s)})\Delta_*^{-1}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma0}^{(s)}=(D_{25}^{34}\Phi_\alpha^{(s)}+D_{14}^{35}\Phi_\beta^{(s)}+D_{15}^{24}\Phi_\gamma^{(s)})\Delta_*^{-1}$$

$$D_{ik}^{jl}=C_{ik}C_{jl}-C_{il}C_{jk},\quad \Delta_*=C_{33}D_{15}^{24}+C_{34}D_{13}^{25}+C_{35}D_{14}^{23}\neq0$$

$$\Phi_j^{(s)}=\lambda F_{nj}^{(s)}+\sigma_{j\alpha*}^{(s)}(\gamma_1)\psi_\alpha+\sigma_{j\beta*}^{(s)}(\gamma_1)\psi_\beta-\sigma_{j\gamma*}^{(s)}(\gamma_1)\tag{1.12}$$

$$F_{nj}^{(0)}=F_{nj},\quad F_{nj}^{(s)}=0,\quad s\neq0,\quad j=\alpha,\beta,\gamma;\quad \gamma_1=\varphi_1(\alpha,\beta)$$

$$C_{13}=-A_{13}\psi_\alpha-A_{63}\psi_\beta,\quad C_{14}=-A_{14}\psi_\alpha-A_{64}\psi_\beta$$

$$C_{15}=1-A_{15}\psi_\alpha-A_{65}\psi_\beta,\quad C_{23}=-A_{63}\psi_\alpha-A_{23}\psi_\beta$$

$$C_{24}=1-A_{64}\psi_\alpha-A_{24}\psi_\beta,\quad C_{25}=-A_{65}\psi_\alpha-A_{25}\psi_\beta$$

$$C_{33}=1,\quad C_{34}=-\psi_\beta,\quad C_{35}=-\psi_\alpha$$

$$\psi_\alpha=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha},\quad \psi_\beta=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}$$

Из рекуррентных формул (1.9)–(1.12) вытекает, что при прямолинейной анизотропии сжимаемого слоя, когда поверхность $\gamma=\varphi_1(\alpha,\beta)$ является плоскостью, а функции $\gamma=-\varphi_2(\alpha,\beta)$, F_{nj}, u_j^- $(j=\alpha,\beta,\gamma)$, объемные силы $\mathbf{P}=\{P_\alpha,P_\beta,P_\gamma\}$ и температурная функция $\theta(\alpha,\beta,\gamma)$ – полиномы степени не выше m, после $(m+1)$-го шага приближения итерационный процесс обрывается и получается точное решение краевой задачи для слоя [7, 8, 11].

2°. Если на поверхности $\gamma=\varphi_1(\alpha,\beta)$ заданы компоненты вектора перемещения (1.3), для функций интегрирования $\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}$, $\sigma_{\beta\gamma0}^{(s)}$, $\sigma_{\gamma\gamma0}^{(s)}$ получаем

$$\sigma_{\alpha\gamma0}^{(s)}=D_{55}^*V_\alpha^{(s)}+D_{54}^*V_\beta^{(s)}+D_{53}^*V_\gamma^{(s)}\quad(\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \gamma\gamma;\ 5l,\ 4l,\ 3l;\ l=5,4,3)$$

$$V_\alpha^{(s)}=\frac{1}{\varphi_1+\varphi_2}(u^{+(s)}-u^{-(s)}+u_*^{(s)}(-\varphi_2)-u_*^{(s)}(\varphi_1))$$

$$u^{\pm(0)} = u_\alpha^\pm / a, \quad u^{\pm(s)} = 0, \quad s = 0 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ u,\ v,\ w) \tag{1.13}$$

$$D_{ij}^* = (A_{kk}A_{ij} - A_{ik}A_{kj})\Delta_2^{-1}, \quad D_{kk}^* = (A_{ij}A_{ji} - A_{ii}A_{jj})\Delta_2^{-1}$$

$$i \neq j \neq k \neq i; \quad i,j,k = 3,4,5$$

$$\Delta_2 = A_{33}(A_{45}A_{54} - A_{44}A_{55}) + A_{43}(A_{55}A_{34} - A_{54}A_{35}) + A_{53}(A_{44}A_{35} - A_{34}A_{45})$$

3°. В случае смешанных граничных условий (1.4) имеем

$$\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} = [(A_{33}C_{24} - A_{34}C_{23})\Phi_\alpha^{(s)} + (A_{34}C_{13} - A_{33}C_{14})\Phi_\beta^{(s)} + D_{14}^{23}V_\gamma^{(s)}]\Delta_3^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} = [(A_{35}C_{23} - A_{33}C_{25})\Phi_\alpha^{(s)} + (A_{33}C_{15} - A_{35}C_{13})\Phi_\beta^{(s)} + D_{13}^{25}V_\gamma^{(s)}]\Delta_3^{-1} \tag{1.14}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} = [(A_{34}C_{25} - A_{35}C_{24})\Phi_\alpha^{(s)} + (A_{35}C_{14} - A_{34}C_{15})\Phi_\beta^{(s)} + D_{15}^{24}V_\gamma^{(s)}]\Delta_3^{-1}$$

$$\Delta_3 = A_{33}D_{15}^{24} + A_{34}D_{13}^{25} + A_{35}D_{14}^{23} \neq 0$$

4°. Если же на поверхности $\gamma = \varphi_1(\alpha, \beta)$ заданы смешанные граничные условия (1.5), для функций интегрирования получаем

$$\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} = [(A_{44} + A_{43}\psi_\beta)V_\alpha^{(s)} - (A_{54} + A_{53}\psi_\beta)V_\beta^{(s)} + (A_{43}A_{54} - A_{44}A_{53})\Phi_\gamma^{(s)}]\Delta_4^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} = [-(A_{45} + A_{43}\psi_\alpha)V_\alpha^{(s)} + (A_{55} + A_{53}\psi_\alpha)V_\beta^{(s)} + (A_{45}A_{53} - A_{55}A_{43})\Phi_\gamma^{(s)}]\Delta_4^{-1}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma 0} = [(A_{44}\psi_\alpha - A_{45}\psi_\beta)V_\alpha^{(s)} - (A_{54}\psi_\alpha - A_{55}\psi_\beta)V_\beta^{(s)} + (A_{44}A_{55} - A_{45}A_{54})\Phi_\gamma^{(s)}]\Delta_4^{-1} \tag{1.15}$$

$$\Delta_4 = A_{55}A_{44} - A_{45}A_{54} + (A_{44}A_{53} - A_{43}A_{54})\psi_\alpha + (A_{55}A_{43} - A_{45}A_{53})\psi_\beta \neq 0$$

Таким образом, при помощи асимптотического представления (1.9) и рекуррентных формул (1.10)–(1.15) с любой заранее заданной асимптотической точностью вычисляются напряжения и перемещения во внутренней области анизотропной пластины (слоя) переменной толщины в соответствии с граничными условиями (1.1)–(1.5). Полученные решения в силу сингулярной возмущенности исходной краевой задачи могут существенно отличаться от точных лишь вблизи боковой поверхности. Там к приведенному решению внутренней задачи следует прибавить согласованное с ним решение типа пограничного слоя [13, 14].

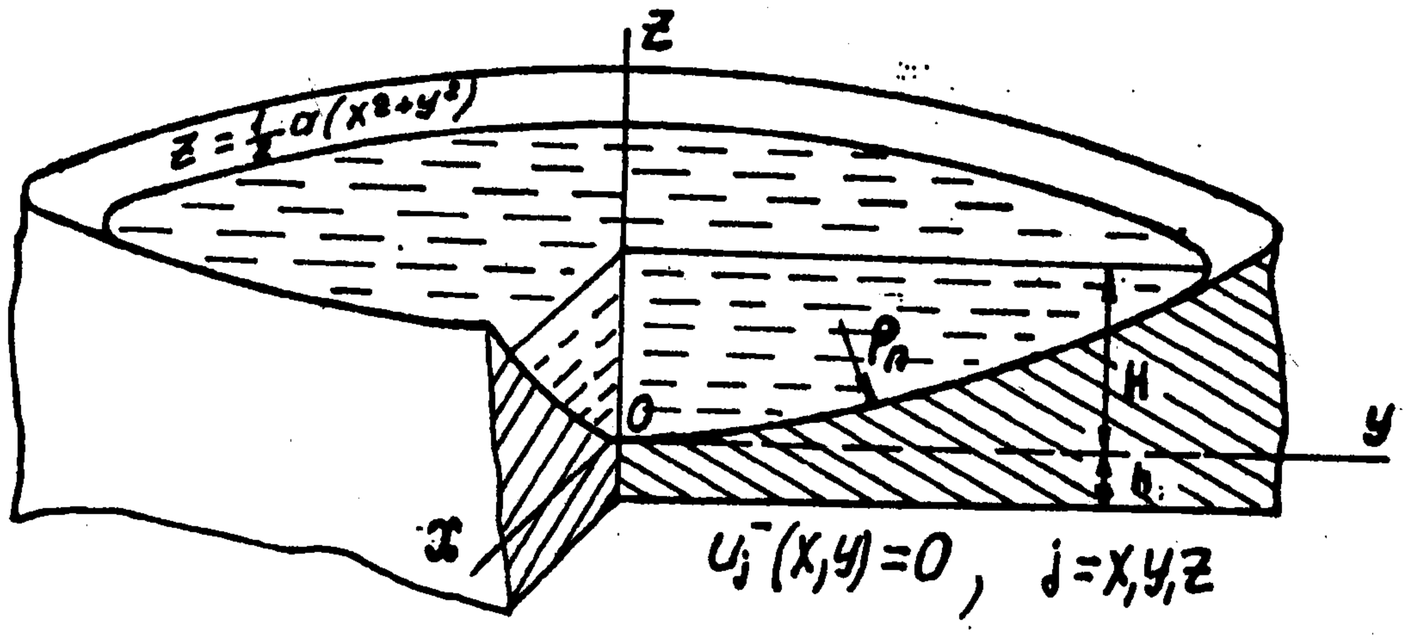
В заключение этого раздела остановимся на выяснении границ применимости приведенных выше решений краевых задач (1.1)–(1.5), (1.9)–(1.15). Асимптотический характер этих решений предполагает, что

$$Q = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\varkappa_Q + s} Q^{(s)} + o(\varepsilon^{\varkappa_Q + N}) \tag{1.16}$$

В общем случае оценка остаточного члена разложения (1.16) для каждого N затруднена в силу многообразия упругих и геометрических характеристик пластины, функций, описывающих лицевые поверхности, и граничных условий, заданных на этих поверхностях. При условии, что функции $\gamma = \pm\varphi_i(\alpha, \beta)$, $u_j^\pm$, F_{nj}, θ имеют ограниченные производные требуемого порядка, в каждой конкретной задаче оценка порядка малости первого отброшенного члена асимптотического разложения не представляет большого труда, что будет проиллюстрировано на отдельном примере.

2. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим ряд примеров.

1°. Имеем водоем, материал дна которого прямолинейно ортотропный. Пусть в выбранной системе координат поверхность дна – параболоид вращения $z = a(x^2 + y^2)/2$, а уровень жидкости – горизонтальная плоскость $z = H$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние толщи дна переменной высоты от гидростатического давления воды $F_n = \rho g(H - z)$, если нижняя плоскость сжимаемого слоя дна на глубине $z = -h$ жестко закреплена (т.е. глубже $z = -h$ дно считается абсолютно жестким) (фиг. 1).



Фиг. 1

Таким образом, имеем ортотропный сжимаемый слой $-h \leqslant z \leqslant \varphi(x, y)$ переменной толщины с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&u_j\ (z=-h)=0, \quad j=x,y,z \\
&-ax\sigma_{xx}(\varphi)-ay\sigma_{xy}(\varphi)+\sigma_{xz}(\varphi)=axF_n \\
&-ax\sigma_{xy}(\varphi)-ay\sigma_{yy}(\varphi)+\sigma_{yz}(\varphi)=ayF_n \\
&-ax\sigma_{xz}(\varphi)-ay\sigma_{yz}(\varphi)+\sigma_{zz}(\varphi)=-F_n \\
&F_n=\rho g(H-\varphi), \quad \varphi=ar^2/2, \quad r^2=x^2+y^2
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

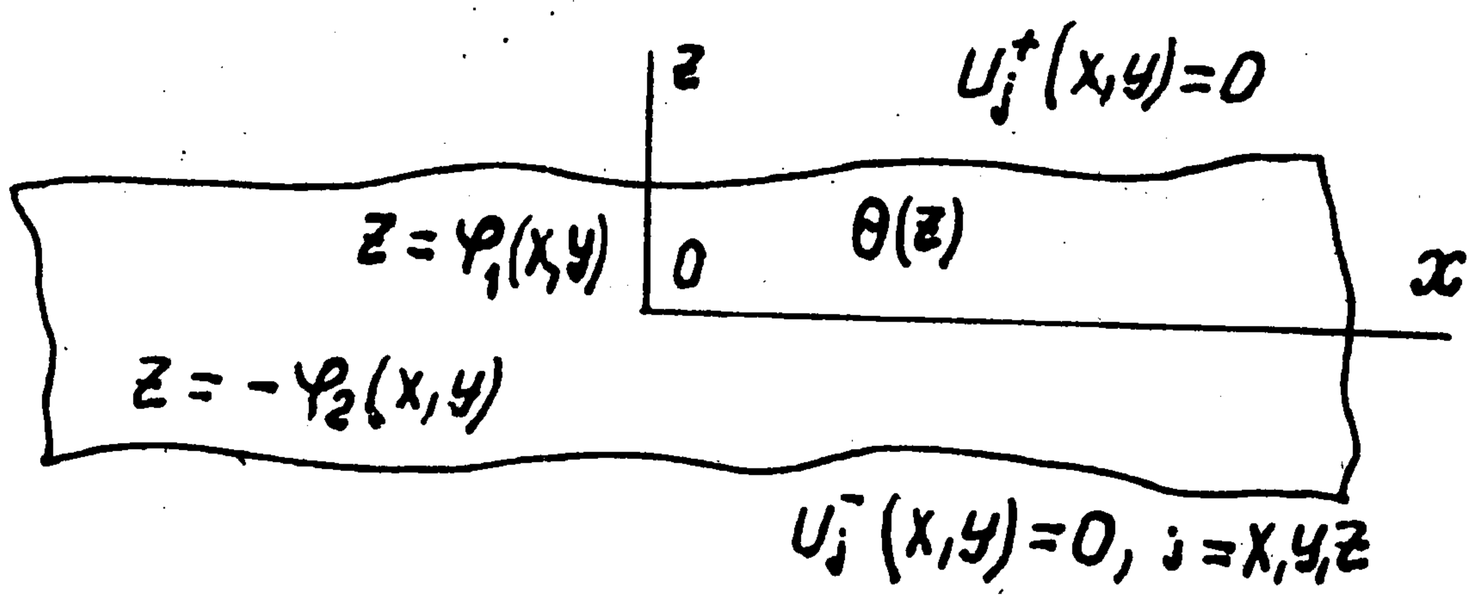
где ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

Вычислив напряжения и перемещения по формулам (1.11) с граничными условиями (2.1), после первого шага итерации имеем

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(0)}=A_{13}\sigma_{zz}^{(0)}, \quad \sigma_{xz}^{(0)}=axA_{13}\sigma_{zz}^{(0)}+axF_n, \quad (x,y;1,2) \\
&\sigma_{xy}^{(0)}=0, \quad \sigma_{zz}^{(0)}=-F_n\frac{1-a^2(x^2+y^2)}{1-a^2x^2A_{13}-a^2y^2A_{23}} \\
&u_x^{(0)}=(z+h)A_{55}\sigma_{xz}^{(0)} \quad (x,y;5,4), \quad u_z^{(0)}=(z+h)A_{33}\sigma_{zz}^{(0)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Второй шаг итерации дает

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xz}^{(1)}=f_x+axA_{13}\sigma-zA_{13}\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial x} \quad (x,y;1,2) \\
&\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma-z\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right), \quad \sigma=\frac{axf_x+ayf_y+f_z}{1-a^2x^2A_{13}-a^2y^2A_{23}} \\
&\sigma_{xx}^{(1)}=A_{13}\sigma_{zz}^{(1)}+(z+h)\left(B_{11}A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+B_{12}A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right) \\
&\sigma_{yy}^{(1)}=A_{23}\sigma_{zz}^{(1)}+(z+h)\left(B_{12}A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+B_{22}A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right) \\
&\sigma_{xy}^{(1)}=B_{66}(z+h)\left(A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial y}+A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial x}\right) \\
&u_x^{(1)}=A_{55}(z+h)(f_x+axA_{13}\sigma)-\frac{1}{2}A_{13}A_{55}(z^2-h^2)\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial x}-\frac{1}{2}A_{33}(z+h)^2\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial x} \quad (x,y;13,23;5,4)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$



Фиг. 2

$$u_z^{(1)}=A_{33}(z+h)\sigma-\frac{1}{2}(z+h)^2\left(A_{13}A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}-A_{23}A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}A_{33}(z^2-h^2)\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right)$$

$$f_x=ax(\varphi+h)\left(B_{11}A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+B_{12}A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right)+B_{66}ay(\varphi+h)\left(A_{55}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial y}+A_{44}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial x}\right)+$$

$$+A_{13}\varphi\left[\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial x}-ax\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}\right)\right]\quad(x,y;1,2;5,4)$$

$$f_z=\varphi\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(0)}}{\partial y}-axA_{13}\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial x}-ayA_{23}\frac{\partial\sigma_{zz}^{(0)}}{\partial y}\right)$$

Суммируя первые два приближения (2.2), (2.3) определим компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с точностью $O(\varepsilon^2)$, что, как правило, достаточно в практических расчетах. Продолжив вычисление итераций, можно получить и более точные результаты.

2°. Пусть лицевые поверхности $z=\varphi_1(x,y)$ и $z=-\varphi_2(x,y)$ ортотропного слоя (пластины) переменной толщины жестко закреплены. На слой действует температурное поле, которое меняется по поперечной координате: $\theta=\theta(z)$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние слоя (фиг. 2). Такая задача, в частности, возникает в процессе горячей штамповки деталей заданной формы.

Граничными условиями будут

$$u_j(z=\varphi_1)=u_j(z=-\varphi_2)=0,\quad j=x,y,z \tag{2.4}$$

После первого шага итерационного процесса с точностью $O(\varepsilon)$ получаем

$$\sigma_{xz}=\frac{\alpha_{13}}{A_{55}}\Phi\quad(x,y;1,2;5,4),\quad \sigma_{zz}=\frac{g_{33}}{A_{33}}\Phi$$

$$\sigma_{xx}=A_{13}\frac{g_{33}}{A_{33}}\Phi-(\alpha_{11}B_{11}+\alpha_{22}B_{12})\theta,\quad \sigma_{xy}=-\frac{\alpha_{12}}{a_{66}}\theta$$

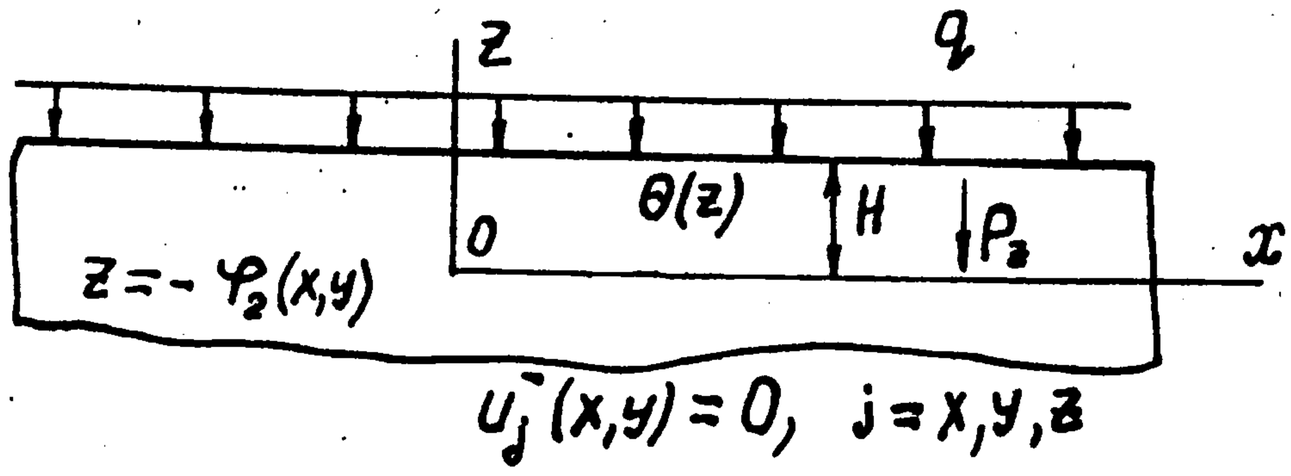
$$\sigma_{yy}=A_{23}\frac{g_{33}}{A_{33}}\Phi-(\alpha_{11}B_{12}+\alpha_{22}B_{22})\theta \tag{2.5}$$

$$u_x=\alpha_{13}(z+\varphi_2)\Phi+\alpha_{13}(F(z)-F(-\varphi_2))\quad(x,y;13,23)$$

$$u_z=g_{33}(z+\varphi_2)\Phi+g_{33}(F(z)-F(-\varphi_2))$$

$$F(z)=\int_0^z\theta dz,\quad \Phi=\frac{1}{\varphi_1+\varphi_2}(F(-\varphi_2)-F(\varphi_1))$$

$$g_{33}=\alpha_{11}A_{13}+\alpha_{22}A_{23}+\alpha_{33}$$



Фиг. 3

Чтобы оценить вклад физико-механических параметров и изменяемости граничных функций в последующее приближение, приведем значения напряжений, соответствующие приближению $s = 1$. Имеем

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \varepsilon\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2h}-\zeta\right)\frac{A_{13}}{A_{33}}g_{33}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{g_{33}}{A_{55}}\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2h}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+(\Phi+\theta(-\varphi_2))\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\xi}\right)$$

$$(x,y;\xi,\eta;13,23;5,4)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \varepsilon\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2h}-\zeta\right)\left(\frac{\alpha_{13}}{A_{55}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\frac{\alpha_{23}}{A_{44}}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+\varepsilon\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2h}\left(\alpha_{13}+\frac{A_{13}}{A_{33}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\alpha_{23}\frac{A_{23}}{A_{33}}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+$$

$$+\varepsilon(\Phi+\theta(-\varphi_2))\left(\alpha_{13}\frac{A_{13}}{A_{33}}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\xi}+\alpha_{23}\frac{A_{23}}{A_{33}}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\eta}\right) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = A_{13}\sigma_{zz}^{(1)}+\varepsilon\left(\zeta+\frac{\varphi_2}{h}\right)\left(\alpha_{13}B_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}+\alpha_{23}B_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+\varepsilon(\Phi+\theta(-\varphi_2))\left(\alpha_{13}B_{11}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\xi}+\alpha_{23}B_{12}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\eta}\right)$$

$$(x,y;A_{13},A_{23};B_{11},B_{12};B_{12},B_{22})$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \varepsilon B_{66}\left(\zeta+\frac{\varphi_2}{h}\right)\left(\alpha_{13}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+\alpha_{23}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\varepsilon(\Phi+\theta(-\varphi_2))\left(\alpha_{13}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\eta}+\alpha_{23}\frac{\partial\varphi_2}{h\partial\xi}\right)$$

Сравнивая (2.6) с (2.5), можно заключить, что порядок вклада (2.6) в общее решение зависит от порядка величин типа

$$\frac{A_{13}}{A_{33}}g_{33}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi},\quad \frac{A_{23}}{A_{33}}g_{33}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\quad \frac{A_{13}}{A_{33}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi},\quad \frac{A_{23}}{A_{33}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta},\ldots$$

откуда следует, что существенную роль играют комбинации отношений физических параметров и изменяемости заранее заданных характерных функций. Если указанные слагаемые будут порядка ε^{-1} по сравнению с соответствующими слагаемыми исходного приближения, то приведенная асимптотика непригодна. В практических приложениях можно избежать подобных случаев надлежащим выбором геометрических параметров и граничных функций.

При $\varphi_i(x, y) = \text{const}$ ($i = 1, 2$), т.е. для слоя постоянной толщины решение (2.5) является точным, а для произвольных φ_i итерацию можно продолжить и получить решение с наперед заданной точностью.

3°. Рассмотрим пластину переменной толщины в декартовой системе координат x, y, z. Пусть верхняя лицевая поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, на которую действует равномерно распределенная нормальная нагрузка с интенсивностью q ($F_n = -q$), а нижняя лицевая поверхность имеет произвольную форму $z = -\varphi(x, y)$ и на ней заданы компоненты вектора перемещения, в частности поверхность закреплена на жестком основании ($\bar{u}_x = \bar{u}_y = \bar{u}_z = 0$) (фиг. 3). Пластина подвержена воздействию температурного поля $T - T_0 = \theta(z)$, учитывается влияние собственного веса ($P_z = -\rho g$). Требуется определить напряженно-

деформированное состояние. Подобная задача характерна в фундаментостроении [15].

Решением задачи с точностью $O(\varepsilon)$ будет

$$\sigma_{xx} = -A_{13}(q+\rho gH) - K_1\rho gz - \lambda_1\theta \quad (xx, yy, xy; 1,2,6)$$

$$\sigma_{zz} = -\rho g(H-z) - q, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$u_x = u_x^- - (z+\varphi)A_{53}(q+\rho gH) - \lambda_5\bar{\theta} - \frac{1}{2}K_5\rho g(z^2-\varphi^2)$$

$$(x, y, z; 53, 43, 33; 5, 4, 3) \tag{2.7}$$

$$\bar{\theta} = \int_{-\varphi}^{z}\theta(z)dz, \quad K_i = a_{13}B_{1i} + a_{23}B_{2i} + a_{36}B_{6i}$$

$$\lambda_i = \alpha_{11}B_{1i} + \alpha_{22}B_{2i} + \alpha_{12}B_{6i}, \quad i = 1,2,6$$

$$K_j = a_{1j}K_1 + a_{2j}K_2 + a_{6j}K_6 - a_{3j}$$

$$\lambda_j = a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2 + a_{6j}\lambda_6 - \alpha_{(6-j)3}, \quad j = 3,4,5$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 666–686.
3. *Friedrichs K.C., Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. № 1. P. 1–33.
4. *Ворович И.И.* Некоторые результаты и проблема асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы 1-й Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин // Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. С. 51–149.
5. *Агаловян Л.А.* К теории изгиба ортотропных пластин // Инж. журн. МТТ. 1966. № 6. С. 114–121.
6. *Агаловян Л.А.* О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 1. С. 109–120.
7. *Агаловян Л.А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1982. Вып. 2. С. 7–12.
8. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Тр. 4-го Всесоюз. симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105–110.
9. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т. 42. № 3. С. 28–36.
10. *Агаловян Л.А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Т. 1. Таллинн: Изд-во политехн. ин-та, 1983. С. 13–18.
11. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271–278.
12. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* О неклассических краевых задачах трехслойных термоупругих пластин и некоторых приложениях // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 1. С. 28–34.
13. *Агаловян Л.А.* О погранслое пластинок // Докл. АН АрмССР. 1972. Т. 55. № 3. С. 149–155.
14. *Геворкян Р.С.* Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3–15.
15. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз. 1960. 491 с.

Ереван

Поступила в редакцию
5.XI.1992