

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИНАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ ФОРМЫ

Вариационно-разностный метод, предложенный для решения двумерных интегральных уравнений типа свертки в произвольных областях [1] и хорошо зарекомендовавший себя при решении динамических контактных задач [2, 3], модифицируется для случая пространственных трещин. Дается общая схема метода, указываются пути преодоления трудностей, связанных с сингулярностью ядра, ростом его символа на бесконечности и с учетом поведения решения на границе области. Для прямоугольных и L -образных трещин проведены расчеты, показывающие влияние формы трещины, угла падения, типа падающей волны и частоты на коэффициент отражения, диаграмму направленности и перераспределение энергии в отраженном поле.

Анализ характеристик отраженного волнового поля является классической задачей геофизики, ультразвуковой дефектоскопии, томографии и др. В коротковолновом диапазоне, когда размеры препятствия существенно превышают длину волны, для математического моделирования процесса с успехом используется обобщенный лучевой метод [4], а в случае средних и длинных волн возникает необходимость решения граничных интегральных уравнений, которые в рассматриваемом случае бесконечно тонких трещин сводятся к уравнениям Винера–Хопфа относительно неизвестного скачка смещений на разрезе. В плоском случае (полосовая трещина) и для трещин круговой формы данные уравнения одномерные, и их решение достаточно эффективно строится путем разложения неизвестного скачка смещений по ортогональным полиномам с весом, учитывающим поведение решения на краях трещины (подробные результаты для объемных волн, набегающих на круговую трещину под произвольным углом см., например, в [5]).

Для прямоугольных трещин приходится использовать разложение по полиномам Чебышева уже по двум пространственным переменным [6, 7], что приводит к росту вычислительных затрат, связанных как с увеличением размерности систем относительно неизвестных коэффициентов разложения, так и с необходимостью счета двукратных несобственных интегралов при формировании матрицы системы. В то же время сохраняется быстрая сходимость, обусловленная учетом корневого поведения решения на контуре трещины. К сожалению, такой базис неприменим для непрямоугольных областей, поэтому для произвольной формы используется аппроксимация скачка смещений сплайнами, заданными в подобластях, на которые некоторой сеткой разбивается область, занятая трещиной [8, 9]. Известное поведение на краю учитывалось [9] введением специальных граничных сплайнов, содержащих корневой множитель.

Метод настоящей работы можно рассматривать как вариант общего подхода [8, 9], позволяющий за счет выбора формы базисных функций и перехода к однократным не-сингулярным интегралам существенно снизить вычислительные затраты на этапе формирования системы. Близким к нему является подход [10], в котором, как и в [2], был также предложен осесимметричный базис. В отличие от [10] ниже используется другой критерий сходимости и для областей с прямолинейными перпендикулярными границами (прямоугольные, L -образные, Π -образные и т.п. трещины) предлагается приближенный способ учета поведения на краю.

1. Задача дифракции заданного волнового поля $u_0(x)e^{-i\omega t}$ на трещине (бесконечно тонком разрезе в упругом пространстве со свободными от напряжений берегами),

занимающей в плоскости x, y декартовой системы координат $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ область Ω , сводится к решению системы двумерных интегральных уравнений относительно неизвестного скачка смещений ее берегов $\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=0^+} - \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=0^-}$:

$$L\mathbf{v} \equiv \iint_{\Omega} l(x - \xi, y - \eta)\mathbf{v}(\xi, \eta)d\xi d\eta = \mathbf{f}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.1)$$

где

$$l(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \mathbf{f}(x, y) = -T_z \mathbf{u}_0|_{z=0}$$

T_z – оператор напряжений для площадки с нормалью z .

При выводе (1.1) использовано известное представление волнового поля в упругом полупространстве через его матрицу Грина $k(x, y, z)$ и вектор неизвестной нагрузки $T_z \mathbf{u}|_{z=0} = \mathbf{q}(x, y)$ [3]:

$$\mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.2)$$

Здесь и далее индекс плюс соответствует $z > 0$; минус – $z < 0$, K^{\pm} , \mathbf{Q} – фурье-символы k^{\pm} и \mathbf{q} соответственно. В силу разрывности при $z = 0$ поля отраженных волн $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ из (1.2) следует

$$\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) = [K^+(\alpha_1, \alpha_2, 0) - K^-(\alpha_1, \alpha_2, 0)] \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$$

и обратно

$$\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = L(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.3)$$

где

$$L = [K^+ - K^-]^{-1}|_{z=0}, \quad \mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2) = \iint_{\Omega} \mathbf{v}(x, y) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy \quad (1.4)$$

Для однородного изотропного пространства

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) = \begin{vmatrix} (\alpha_1^2 M_0 + \alpha_2^2 N_0) / \alpha^2 & \alpha_1 \alpha_2 (M_0 - N_0) / \alpha^2 & 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 (M_0 - N_0) / \alpha^2 & (\alpha_2^2 M_0 + \alpha_1^2 N_0) / \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{vmatrix}$$

$$M_0(\alpha) = -\Delta(\alpha) / (\kappa_2^2 \sigma_2), \quad N_0(\alpha) = -\mu \sigma_1 / 2, \quad R_0(\alpha) = -\Delta(\alpha) / (\kappa_2^2 \sigma_1)$$

$$\Delta(\alpha) = 2\mu(\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - (\alpha^2 - \kappa_2^2)^2)$$

$$\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad \text{Re } \sigma_n \geq 0, \quad \text{Im } \sigma_n \leq 0, \quad n = 1, 2$$

$$\kappa_1^2 = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 / \mu, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

λ, μ – постоянные Ламе, ρ – плотность.

Структура матрицы l здесь такова, что система (1.1) фактически распадается на две независимые: относительно касательных и нормальной составляющих скачка \mathbf{v} . В общем случае вертикально-неоднородного пространства, например для трещины на поверхности склейки двух полупространств с различными свойствами, такого распада нет, но основные свойства элементов матрицы $L(\alpha_1, \alpha_2)$, существенные для применимости излагаемого подхода, сохраняются.

Для дискретизации уравнений (1.1) используются осесимметричные дельтаобразные сплайны, предложенные ранее для решения динамических контактных задач [2, 3]. Приближенное решение ищется в виде

$$\mathbf{v}_h(x, y) = \sum_{k=1}^N \mathbf{c}_k \varphi_k(x, y), \quad \varphi_k(x, y) = \varphi\left(\frac{x - x_k}{h}, \frac{y - y_k}{h}\right) \quad (1.5)$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \pi^{-1}(\gamma+1)(1-r^2)^\gamma, & r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(x_k, y_k) – узлы квадратной сетки, покрывающей область Ω с шагом h , N – число узлов.

Неизвестные коэффициенты разложения c_k определяются из линейной алгебраической системы, возникающей при проектировании невязки $Lv_n - f$ на ту же систему базисных функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$:

$$\sum_{k=1}^N a_{jk} c_k = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

$$a_{jk} = (L\varphi_k, \varphi_j)_{L_2}, \quad f_j = (f, \varphi_j)_{L_2}, \quad (f, g)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) g^*(x, y) dx dy$$

(звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины).

Было показано [3], что дельтаобразность функций φ_k , т.е. выполнение условия

$$\frac{1}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right) \rightarrow \delta(x, y) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

обеспечивает сходимость коэффициентов разложения c_k к значениям в узлах ($c_k \rightarrow v(x_k, y_k)$ при $h \rightarrow 0$), что позволяет не заботиться о сходимости v_h к v в непрерывной метрике (наилучшая сходимость c_k была достигнута при $\gamma + 1 = \pi$, когда $\varphi(0) = 1$). Другими словами, допустимо любое отклонение v_h от v , а при необходимости получить вид раскрытия трещины $v(x, y)$ достаточно воспользоваться интерполяцией значений c_k между узлами. При этом несложно обеспечить и требуемое поведение на границе Ω . Важно, что при использовании v_h в силу дельтаобразности φ_k не нарушается сходимость интегральных характеристик решения (диаграммы направленности и энергии рассеянного поля).

Ввиду осесимметричности $\varphi = \varphi(r)$ кратные интегралы (1.6) с помощью равенства Парсеваля и перехода к полярным координатам сводятся к однократным вида

$$a_{jk} = \frac{h^4}{2\pi} \int_{\Gamma} L\left(\frac{i\partial}{\partial x_j}, \frac{i\partial}{\partial y_j}, \alpha\right) \Phi(\alpha h) \Phi^*(\alpha^* h) J_0(\alpha r_{jk}) \alpha d\alpha \quad (1.7)$$

где

$$\Phi(\alpha h) = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi(r) J_0(\alpha h r) r dr = \left(\frac{2}{\alpha h}\right) \alpha^{\gamma+1} \Gamma(\gamma+2) J_{\gamma+1}(\alpha h)$$

J_ν – функции Бесселя, r_{jk} – расстояние между узлами.

Переход от матрицы-ядра $l(x, y)$ к ее фурье-символу $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$ избавляет от необходимости выделять и интегрировать сильную сингулярность матрицы-ядра $l(x, y)$. Особые точки (в рассматриваемом случае это κ_1, κ_2) уже не лежат на контуре интегрирования, так как контур Γ обходит их, отклоняясь от вещественной полуоси в комплексную плоскость α в соответствии с принципом предельного поглощения [3, 11]. Однако здесь возникают трудности, связанные с плохой сходимостью интегралов (1.7) на бесконечности. Элементы L растут при $\alpha \rightarrow \infty$ как $O(\alpha)$ (это и приводит к сингулярности $l(x, y)$), и сходимость здесь обеспечивается только за счет убывания $\Phi^2(\alpha h)$. При $h \ll 1$ зона, в которой реально начинается убывание, отодвигается далеко вправо, что делает численное интегрирование практически невозможным. Поэтому растущие и убывающие как α^{-1} составляющие функций M_0, N_0, R_0 , входящих в L , были выделены в явном виде, а интегралы от них выражены через гипергеометрические функции ${}_3F_2$, т.е. представлены хорошо сходящимися рядами.

Интегральное представление отраженного волнового поля $u_1(\mathbf{x})$ через найденный скачок v можно получить, подставив соотношение (1.3) в (1.2). При этом, в силу соотношения (1.5),

$$V_h(\alpha_1, \alpha_2) = h^2 \Phi(\alpha h) \sum_{k=1}^N c_k e^{i(\alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k)} \quad (1.8)$$

Учитывая сходимость $c_k \rightarrow v(x_k, y_k)$ при $h \rightarrow 0$ и дельтаобразность базиса ($\Phi(\alpha h) \rightarrow \Phi(0) = 1$ при $\alpha < \infty$), убеждаемся, что каждое из слагаемых соответствует в пределе вкладу элементарной площадки $h \times h$ с центром в узле (x_k, y_k) , т.е. разложение (1.8) является интегральной суммой для $V(\alpha_1, \alpha_2)$ вида (1.4) при конечных α . При $\alpha \rightarrow \infty$ убывание $V_h(\alpha_1, \alpha_2)$ не соответствует асимптотике $V(\alpha_1, \alpha_2)$, которая может быть выписана явно, как асимптотика осциллирующего интеграла (1.4), исходя из известного характера поведения v на границе $\partial\Omega$ [12], и учтена в (1.8).

Поведение v на границе можно учесть следующим образом:

- 1) ввести корневые множители для сплайнов вдоль границы;
- 2) учесть в (1.8) асимптотику V при $\alpha \rightarrow \infty$;
- 3) получив c_k без учета поведения на краю, провести затем гладкую кубическую интерполяцию между узлами с учетом корневого убывания на краю и далее использовать в качестве $V(\alpha_1, \alpha_2)$ преобразование Фурье от этого приближения;
- 4) распорядиться выбором узлов так, чтобы эффект корневого убывания $v(x, y)$ учитывался в интегральной сумме (1.8).

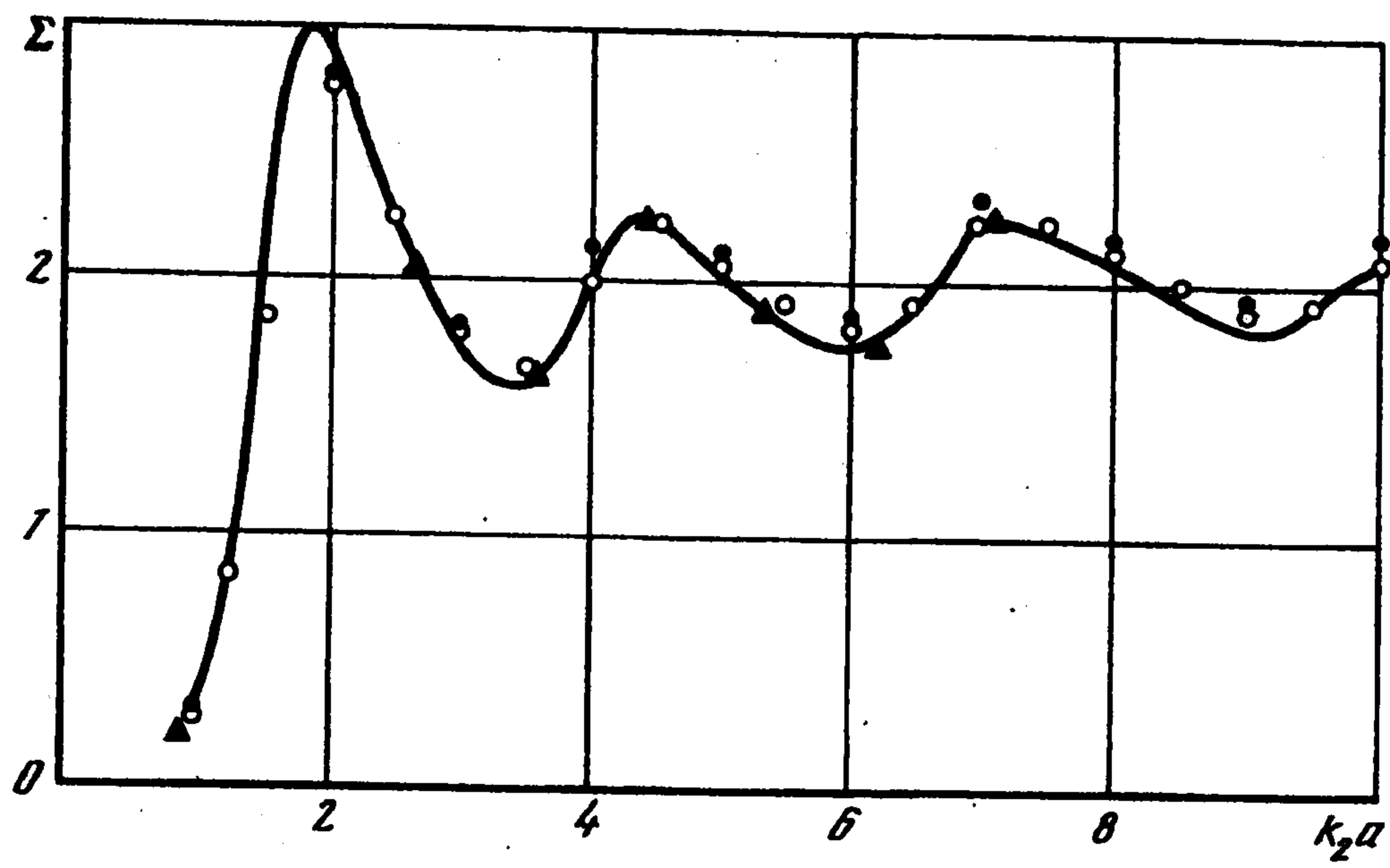
Первый способ нарушает осевую симметрию, т.е. теряются соответствующие вычислительные преимущества, не проще на практике и реализация второго подхода. Третий способ, не нарушая осевой симметрии, существенно улучшает результаты. Самое важное, что такая же степень ускорения сходимости достигается и четвертым, самым простым в реализации способом.

Суть его поясним на модельном одномерном интеграле

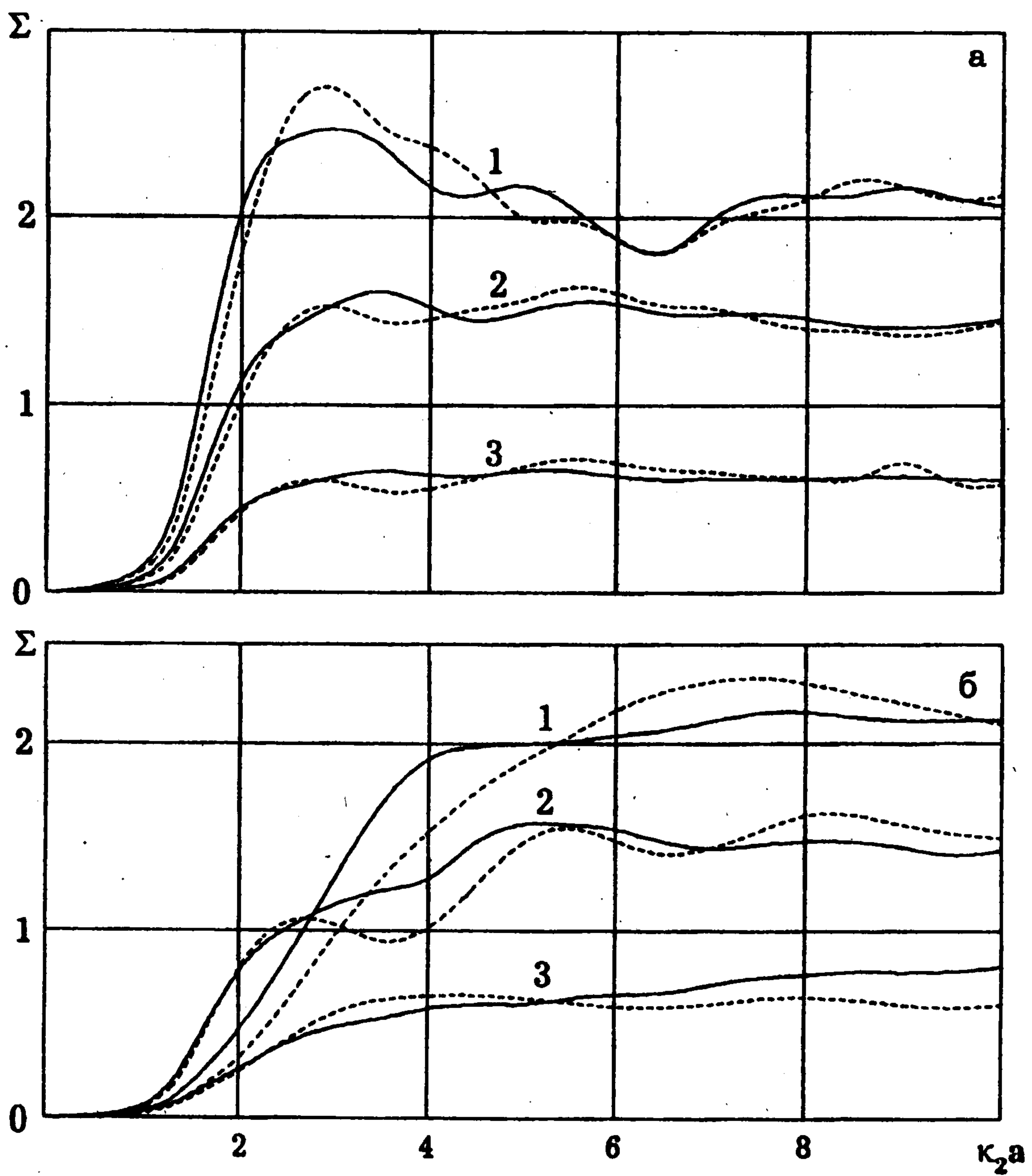
$$\int_0^b \sqrt{x} dx = h \sum_{k=1}^M \sqrt{x_k}, \quad x_1 = \frac{h}{2}, \quad x_{k+1} = x_k + h$$

Вклад первого узла x_1 квадратурной формулы равен $h^{3/2} \sqrt{2}$, в то время как точное значение интеграла на интервале $[0, h]$ равно $2h^{3/2}/3$, т.е. узел x_1 дает погрешность $O(h^{3/2})$, тогда как внутренние узлы — $O(h^2)$. Если же взять $x_1 = h/2 + ph$, то при $p = 0,1133\dots$ вклад x_1 совпадает с точным значением на $[0, h + ph]$. Выбор сетки с отступом именно на ph от границы и обеспечивает тот же порядок сходимости, что и способ 3. Отметим, что такой выбор узлов возможен только для областей с перпендикулярными границами, когда все вертикальные и горизонтальные размеры отличаются на величины, кратные h . Если последнее не выполняется, то результаты будут получены фактически для иной области, аппроксимирующей исходную и отличающейся от нее размерами не более, чем на $h/2$. Очевидно, с такой же степенью сходимости метод применим и в случае произвольной области Ω , аппроксимированной прямоугольной сеткой.

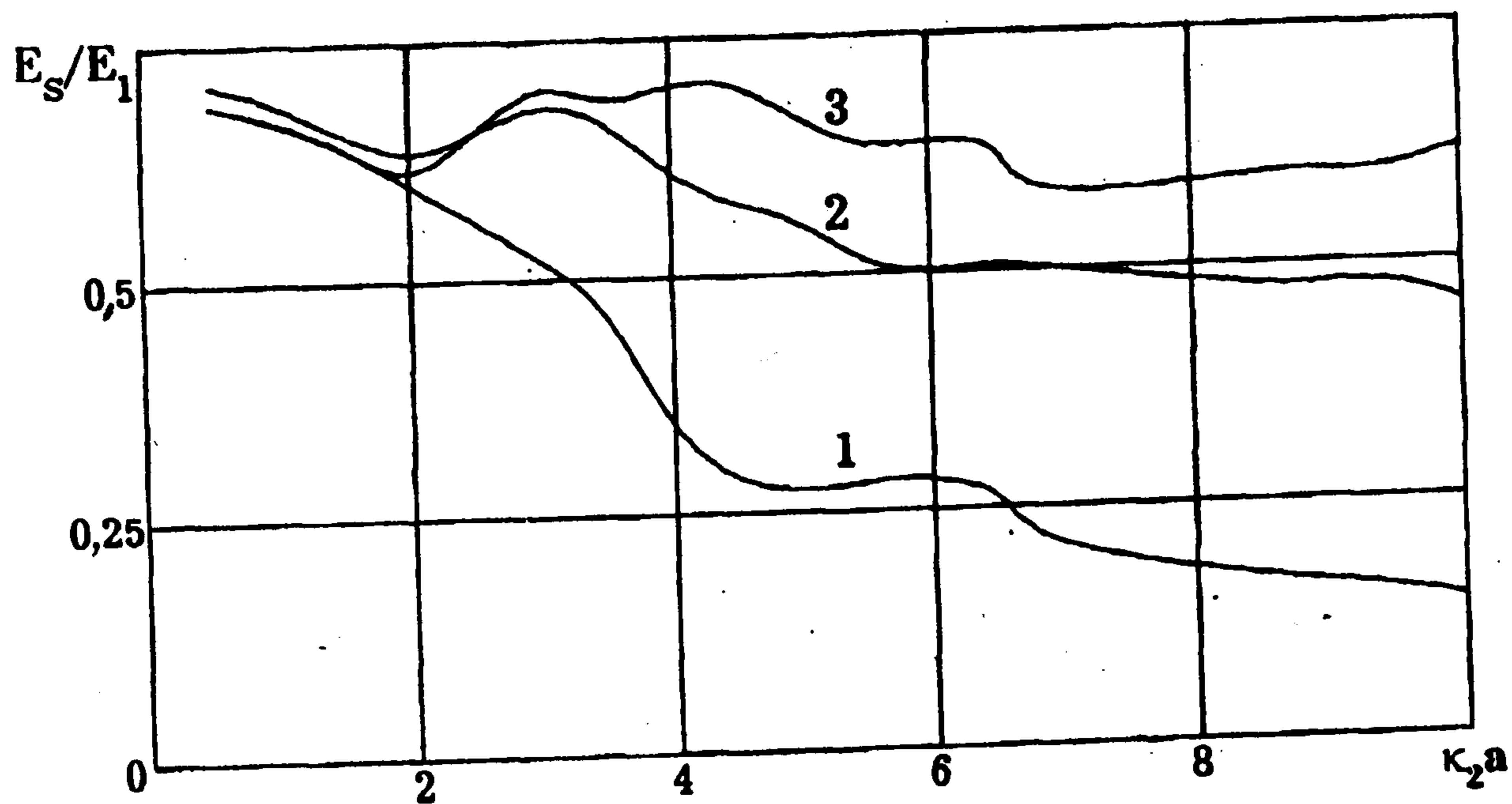
На фиг. 1 приведена зависимость коэффициента рассеяния энергии Σ от безразмерной частоты $\kappa_2 a$ ($a = \sqrt{S_\Omega}/2$, S_Ω — площадь трещины) для квадратной трещины при нормальном ($\theta = 0^\circ$) падении P -волны. Критерием настройки метода служили результаты Бострема, полученные путем разложения по полиномам Чебышева методом работы [6] (сплошная линия). Светлыми точками нанесены значения Σ , полученные четвертым подходом (сетка 20×20). Следует отметить, что сходимость, но более медленная, наблюдается и без учета поведения на краю (темные точки). Треугольниками на фиг. 1 нанесены результаты для круговой трещины [5], показывающие, что форма трещины в данном случае слабо влияет на коэффициент рассеяния энергии.



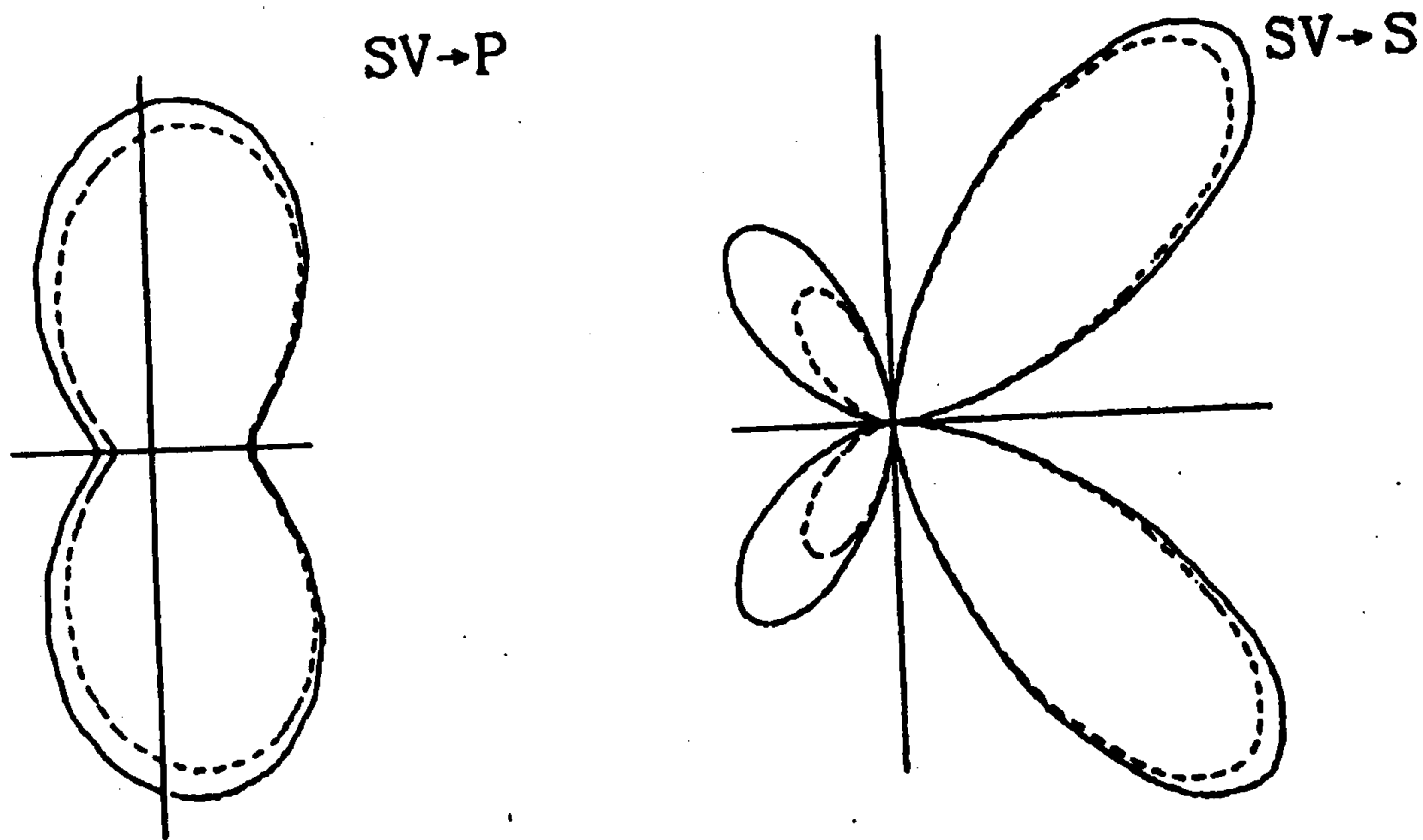
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

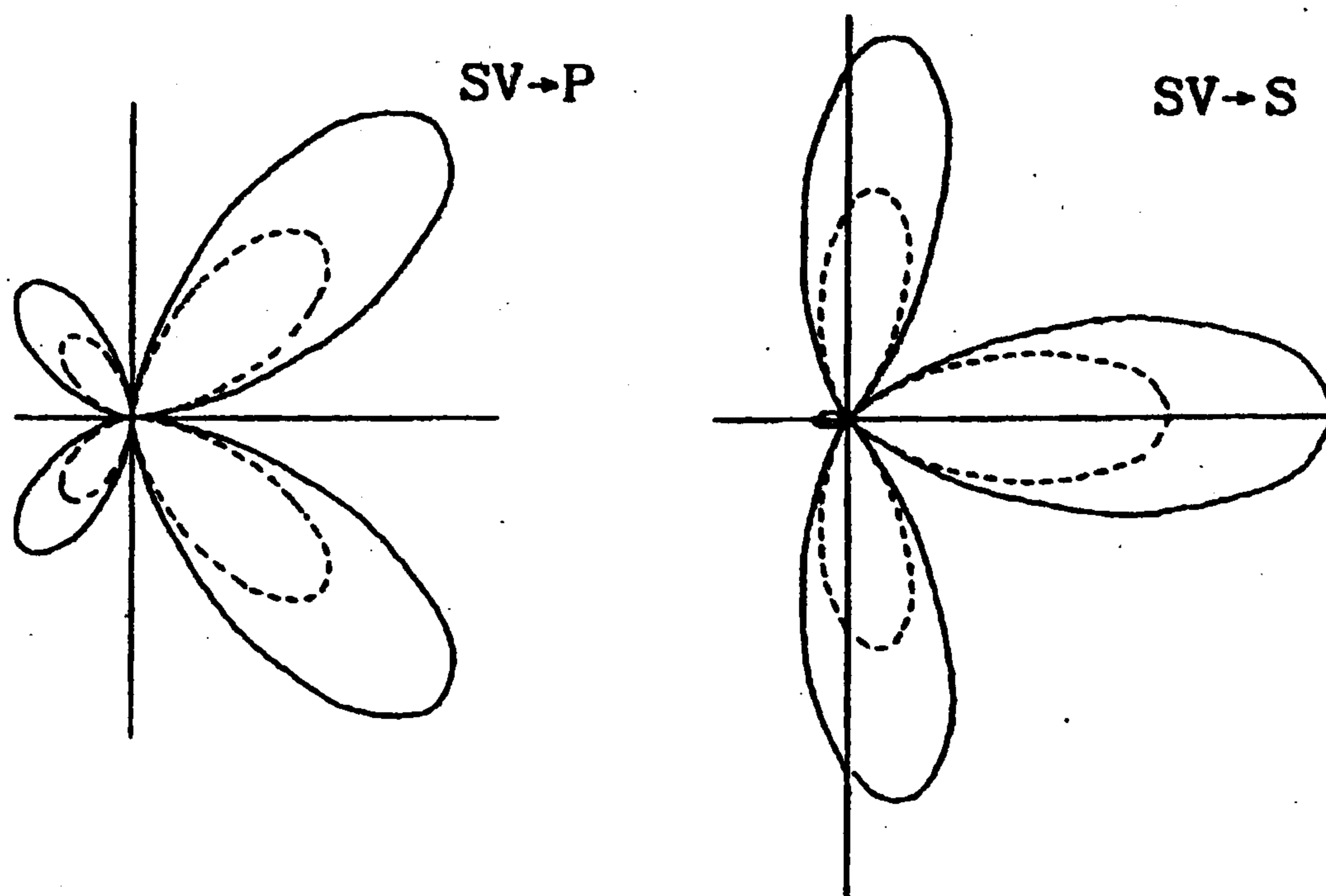
2. Интегральное представление (1.2) позволяет использовать в дальней зоне известную асимптотику объемных волн в упругом полупространстве [3]

$$\mathbf{u}_1^\pm(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^2 \mathbf{a}_n^\pm(\varphi, \psi) \frac{e^{i\kappa_n R}}{R} + O(R^{-2}), \quad R = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

Вектор-функции \mathbf{a}_n^\pm , зависящие только от сферических углов φ, ψ , выражаются через значения $K^\pm LV$ в стационарных точках $\alpha_{1,n} = -\alpha_n \cos \varphi$, $\alpha_{2,n} = -\alpha_n \sin \varphi$, $\alpha_n = \kappa_n \sin \psi$. Отметим, что здесь используются значения V при $\alpha < \kappa_n$, т.е. погрешность, связанная с несовпадением асимптотик V и V_h , сказывается только при $\kappa_n \gg 1$, когда уже хорошо работают лучевые методы.

Так как в произведении $K^\pm L$ релеевский знаменатель $\Delta(\alpha)$ сокращается, то, как и следовало ожидать, в \mathbf{u}_1 нет релеевской волны вдоль поверхности $z = 0$. Однако для вертикально-неоднородного полупространства появляются вещественные полюса у элементов матрицы L , вычеты в которых дают волны Стоунли.

Осредненная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ энергия отраженных волн E_1 , определяемая как интеграл от плотности энергии по поверхности берегов излучающей ее трещины, при учете (1.2) сводится к известному представлению для энергии поверх-



Фиг. 5

ностного источника в упругом полупространстве, что в конечном счете дает

$$E_1 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \iint_{\Omega} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dx dy = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^N (\mathbf{f}_k, \mathbf{c}_k)$$

Аналогично использование асимптотики (2.1) и представлений для плотности потока энергии продольных P -волн и поперечных S -волн [3] позволяет, проинтегрировав их по сфере $|\mathbf{x}| = R$ при $R \rightarrow \infty$, получить долю энергии P и S волн в рассеиваемом трещиной потоке E_1 :

$$E_1 = E_P + E_S \quad (2.2)$$

Выполнение энергетического баланса (2.2) использовалось как дополнительный контроль численных результатов. Расчеты проводились для прямоугольных и L -образных трещин для P , SV и SH волн, падающих под углом от 0° до 90° в частотном диапазоне $0 \leq a\kappa_2 \leq 10$.

Степень рассеяния энергии характеризуется отношением $\Sigma = E_1/E_0$, где E_0 — энергия, переносимая заданной волной \mathbf{u}_0 через площадку той же площади, что и трещина.

В качестве примера на фиг. 2 приведены зависимости Σ от частоты $a\kappa_2$ для прямоугольной 1:4 (штриховая линия) и L -образной (сплошная линия) трещин одинаковой площади при падении P (а) и SV волн (б) под углом $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ и 90° к ее нормали (кривые 1–3 соответственно). Были получены также зависимости Σ от угла падения θ , зависимости доли энергии P и S волн в рассеянном поле от θ и $\kappa_2 a$. Фиг. 3, на которой приведены результаты для P -волны, падающей на квадратную трещину под углом $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (кривые 1–3 соответственно) иллюстрирует зависимость E_S/E_1 от частоты. На фиг. 4 для угла падения $\theta = 45^\circ$ приведены диаграммы направленности рассеянного поля (плотности энергии P и S волн в плоскости xz) при падении SV волны на квадратную (сплошная линия) и L -образную (штриховая линия) трещины на частоте $\kappa_2 a = 2$ и на фиг. 5 для $\theta = 90^\circ$.

Авторы благодарят профессора Чалмерского технологического университета (Гетеборг, Швеция) Андерса Бострема, инициировавшего данную работу, за полезное обсуждение и помощь при ее выполнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01620).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р.В., Клейн И.С., Эскин Г.И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. М., 1973. 55 с. Препринт Ин-та пробл. механики АН СССР. № 33. М., 1973. 55 с.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 61–67.
3. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 271 с.
5. Krenk S., Schmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1982. Ser. A. V. 308. № 1502. P. 167–198.
6. Boström A. Acoustic scattering by a sound-hard rectangle // J. Acoust. Soc. America. 1991. V. 90. N 6. P. 3344–3347.
7. Guan L., Norris A. Elastic wave scattering by rectangular cracks // Intern. J. Solids and Structures. 1992. V. 29. N 12. P. 1549–1565.
8. Budreck D.E., Achenbach J.D. Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1988. V. 55. N 2. P. 405–412.
9. Lin W., Keer L.M. Scattering by a planar three-dimensional crack // J. Acoust. Soc. America. 1987. V. 82. N 4. P. 1442–1448.
10. Visscher W.M. Theory of scattering of elastic waves from flat cracks of arbitrary shape // Wave Motion. 1983. V. 5. N 1. P. 15–32.
11. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
12. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
27.III.1995