

УДК 539.3

© 1996 г. С.И. Горбаль, В.Ф. Емец

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ УПРУГИХ ВОЛН ПЛОСКИМ ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ

Записываются интегро-дифференциальные уравнения задачи рассеяния упругих волн тонкостенным плоским включением большой жесткости в предположении, что рассеиватель и матрица жестко сцеплены. Как пример рассматривается задача рассеяния продольной волны туннельным включением.

1. Рассмотрим упругую однородную среду, характеризующуюся параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ , в которой в условиях жесткого контакта находится инородное упругое включение, занимающее область $\{(x_1, x_2) \in S, |x_3| < h/2\}$, где S – его срединная поверхность, ограниченная замкнутым гладким контуром ∂S с внешней нормалью, n , h – толщина, x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты. Материал включения характеризуется параметрами λ_0, μ_0, ρ_0 .

Разбираем случай, когда $\mu_0/\mu, \lambda_0/\lambda \gg 1, h \rightarrow 0$. Причем $\mu_0/\mu, \lambda_0/\lambda$ имеют порядок стремления к бесконечности как $(h/a)^{-\kappa}$, $\kappa > 0$, a – характерный размер области S . Ясно, что при $h \rightarrow 0$ уравнения движения частиц включения (уравнения Ламе) редуцируются к соответствующим уравнениям движения упругой пластины. Тип колебаний последней под воздействием набегающей упругой волны будет определяться значением параметра κ . Так [1] при $\kappa > 3$ граничное упругое включение может быть моделировано абсолютно жестким включением, а при $\kappa = 1, 3$ следуют соответственно уравнения продольных (симметричных) или поперечных (изгибных, антисимметричных) колебаний упругой пластины. При этом, естественно, полоса частот колебаний определяется условием $k_T h < 1$, где $k_A = \omega/c_A$ – волновое число продольных ($A = L$) или поперечных ($A = T$) объемных волн внешней среды, ω – угловая частота.

Пусть D – некоторая замкнутая двусвязная область в R^3 , $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ – плотность объемных сил, действующих в D , $e_{ij}(\mathbf{u})$ ($i, j = 1, 2, 3$) – тензор деформаций, соответствующий вектору смещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, а $\partial D = S_0 \cup \{(x_1, x_2) \in S, |x_3| = h/2\}$ – граница области D , где внешний контур S_0 с нормалью \mathbf{n}^0 предполагается свободным от усилий. Введем в рассмотрение функционалы

$$L(\mathbf{v}) = \int_D (F_i + \rho \omega^2 u_i) v_i dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D [\lambda e_{ii}(\mathbf{u}) e_{jj}(\mathbf{v}) + 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v})] dx, \quad i, j = 1, 2, 3$$

соответствующие работе внешних инерционных и внутренних сил на виртуальных перемещениях $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. В приведенных формулах и далее по повторяющимся индексам производится суммирование, причем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие – 1, 2.

Тогда при $\bar{\mu} \in R^+ \setminus \{0\}$, $\bar{\lambda} \in R^+ \cup \{\infty\}$ вектор смещений $\mathbf{u} \in V_\kappa$ для всех $\mathbf{v} \in V_\kappa$ удовлетворяет с точностью до перемещения включения как жесткого целого соотношению $J_\kappa = 0$ ($\kappa = 1, 2, 3$), Здесь:

$$J_1 = J_0 - \int_S [\lambda^* e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) e_{\beta\beta}(\mathbf{v}) + 2\bar{\mu} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{v})] dS + m_0 \int_S u_i v_i dS$$

при $\mu_0 h \rightarrow \bar{\mu}$, $\lambda_0 h \rightarrow \bar{\lambda}$, $h \rightarrow 0$; $V_1 = \{\mathbf{v} \in H^1(D); v_\alpha|_S \in H^1(S)\}$

$$J_2 = J_0 + m_0 \int_S u_3 v_3 dS \quad (1.1)$$

при $\mu_0 h^2 \rightarrow \bar{\mu}$, $\lambda_0 h^2 \rightarrow \bar{\lambda}$, $h \rightarrow 0$; $V_2 = \{\mathbf{v} \in H^1(D); v_\alpha|_S = 0\}$

$$J_3 = J_0 - \frac{1}{12} \int_S [\lambda^* u_{3,\alpha\alpha} v_{3,\beta\beta} + 2\bar{\mu} u_{3,\alpha\beta} v_{3,\alpha\beta}] dS + m_0 \int_S u_3 v_3 dS$$

при $\mu_0 h^3 \rightarrow \bar{\mu}$, $\lambda_0 h^3 \rightarrow \bar{\lambda}$, $h \rightarrow 0$; $V_3 = \{\mathbf{v} \in V_2, v_3 \in H^2(S)\}$

$$J_0 = L(\mathbf{v}) - A(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \lambda^* = \frac{2\bar{\lambda}\bar{\mu}}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}, \quad dS = dx_1 dx_2, \quad u_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad m_0 = \rho_0 \omega^2 h$$

где интегралы по поверхности S вычисляются при $x_3 = 0$, H^m – пространства Гильберта функций, имеющих на S суммируемые с квадратом производные до порядка m .

Выражения для функционалов (1.1) следуют из известных результатов [1], если учесть инерционные силы согласно принципу Даламбера. Условия стационарности функционалов J_κ ; $\delta J_\kappa = 0$ ($\kappa = 1, 2, 3$) при помощи формул Грина, связывающих интегралы по объему с интегралами по поверхности и преобразовывающие интегралы по площади срединной поверхности S в интегралы по ограничивающему ее контуру ∂S , записываются соответственно в виде:

$$\delta J_0 + \int_S \sigma_{\alpha\beta,\beta}^* \delta v_\alpha dS - \int_{\partial S} \sigma_{\alpha\beta}^* n_\beta \delta v_\alpha dl + m_0 \int_S u_i \delta v_i dS = 0, \quad \kappa = 1$$

$$\delta J_0 + m_0 \int_S u_3 \delta v_3 dS = 0, \quad \kappa = 2$$

$$\delta J_0 - \frac{1}{12} \left\{ (\lambda^* + \bar{\mu}) \int_S \nabla^4 u_3 \delta v_3 dS + (\lambda^* + 2\bar{\mu}) \int_{\partial S} \left(u_{3,\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \delta v_3 - \delta v_3 \frac{\partial}{\partial n} u_{3,\alpha\alpha} \right) dL + \right. \quad (1.2)$$

$$\left. + 2\bar{\mu} \int_{\partial S} (u_{3,11} \delta v_{3,2} - u_{3,12} \delta v_{3,1}) dx_1 + (u_{3,12} \delta v_{3,2} - u_{3,22} \delta v_{3,1}) dx_2 \right\} + m_0 \int_S u_3 \delta v_3 dS = 0, \quad \kappa = 3$$

$$\delta J_0 = \int_D (\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i + F_i) \delta v_i dx - \int_{\partial D} \sigma_{ij} n_j \delta v_i dA$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \lambda^* u_{\alpha,\alpha} \delta_{\alpha\beta} + 2\bar{\mu} e_{\alpha\beta}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 u = u_{,\alpha\alpha}$$

где dA – элемент площади поверхности ∂D , dl – элемент дуги положительно направленного контура ∂S , σ_{ij} – тензор напряжений, соответствующий тензору e_{ij} , δ_{ij} – символ Кронекера.

Из соотношений (1.2), ввиду произвольности вариаций $\delta \delta v_3 / \delta n$, δv_i и условия $\sigma_{ij} n_j = 0$ на S_0 , следуют при $x \in R^3 \setminus S$ уравнения установившихся колебаний Ламе, которые запишем без учета массовых сил

$$(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \rho \omega^2 u_j = 0 \quad (1.3)$$

а при $x \in S$ получаем уравнения движения для тонкостенного включения с соответствующими граничными условиями на его контуре:

$$\Phi_\beta = -E_1 h (\Delta^* + k_l^2) u_\beta, \quad \Phi_3 = -E_1 h k_l^2 u_3, \quad x \in S \quad (1.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^* n_\beta = 0, \quad x \in \partial S; \quad \kappa = 1$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \Phi_3 = -E_1 h k_l^2 u_3, \quad x \in S; \quad \kappa = 2 \quad (1.5)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \Phi_3 = g(\nabla^4 - k_b^4) u_3, \quad x \in S \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 u_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} M_l u_3 = 0, \quad M_n u_3 = 0, \quad x \in \partial S, \quad \kappa = 3$$

Здесь

$$E_1 = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2}, \quad g = \frac{E_1 h^3}{12}, \quad c_l = \left(\frac{E_1}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad c_b = \left(\frac{\omega^2 g}{\rho_0 h} \right)^{1/4}$$

$$k_f = \frac{\omega}{c_f} \quad (f = l, b), \quad \Phi_i = \sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^- \quad (\sigma_{i3}^\pm = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h))$$

$$M_1 = u_{3,11} + \nu_0 u_{3,22}, \quad M_2 = u_{3,22} + \nu_0 u_{3,11}, \quad M_{12} = (1 - \nu_0) u_{3,12}$$

$$M_l u_3 = (M_2 - M_1) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2), \quad M_n u_3 = M_1 n_1^2 = M_2 n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2$$

$$\Delta^* u_\beta = ((1 + \nu_0) u_{\alpha, \alpha\beta} + (1 - \nu_0) u_{\beta, \alpha\alpha}) / 2$$

(E_1 – модуль упругости для тонкой пластины; c_l – скорость продольной волны в пластине; c_b – скорость волн изгиба в пластине; g – цилиндрическая жесткость пластины; Φ_i – скачок напряжений; E_0, ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала включения; τ – единичный вектор касательной к ∂S , полученный из n поворотом на $+\pi/2$). Граничные условия задач (1.4) и (1.6) – условия незакрепленного (свободного) края пластины.

Уравнения (1.5), (1.6) получены без учета эффектов, связанных с поперечными колебаниями сжатия включения и являются асимптотически точными, если частота падающей волны не совпадает с собственной частотой однородной внутренней граничной задачи, определяемой соотношениями (1.4). Для исследования ситуации, когда такое совпадение происходит и для получения уравнений, объединяющих случаи $\kappa = 1, 2, 3$, привлекаем метод сращиваемых асимптотических разложений [2–4]. В результате получаем соотношения

$$\Phi_\beta = -E_1 h (\Delta^* + k_l^2) u_\beta, \quad x \in S; \quad \sigma_{\alpha\beta}^* n_\beta = 0, \quad x \in \partial S \quad (1.7)$$

$$\Phi_3 = g(\nabla^4 - k_b^4) u_3, \quad x \in S; \quad \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 u_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} M_l u_3 = 0, \quad M_n u_3 = 0, \quad x \in \partial S \quad (1.8)$$

которые асимптотически точно описывают взаимодействие упругой среды с тонкостенным плоским включением большой жесткости при условии, что поверхности неоднородности и матрицы жестко сцеплены¹.

2. Пусть на рассматриваемое включение набегают упругая волна, характеризующаяся вектором смещения $u^i(x)$ (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразуме-

¹ Доказательство этого утверждения было выполнено ранее Я.И. Куицом в неопубликованной работе.

вается). Тогда полное поле $u(\mathbf{x}) = u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x})$ удовлетворяет вне поверхности препятствия уравнению установившихся колебаний Ламе (1.3), а в области $\mathbf{x} \in S$ соотношениям (1.7)–(1.8). При этом рассеянное поле $u^s(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, из которого следует

$$u^s(\mathbf{x}) \approx -\frac{1}{4\pi R} \sum_{A=L,T} \exp(ik_A R) f^A(\omega, \mathbf{v}) \quad (R = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \quad (2.1)$$

где $f^A(\omega; \mathbf{v})$ – векторная амплитуда рассеяния продольных ($A = L$) и поперечных ($A = T$) волн; $\mathbf{v} = \mathbf{x}/R$ – направление наблюдения.

Из теоремы взаимности Бетти для бесконечной области [5] при учете условия $u(\mathbf{x}) \approx u(x_1, x_2)$ при $|x_3| < h/2$ находим

$$u^s(\mathbf{x}) = -\int_S \Phi_i(\mathbf{y}) \mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad d\mathbf{y} = dy_1 dy_2, \quad x_3 > 0; \quad \mathbf{G}_i = (G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}) \quad (2.2)$$

$$G_{ij} = \frac{g_T}{\mu} \delta_{ij} - \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial^2 (g_L - g_T)}{\partial y_i \partial y_j}, \quad g_A = \frac{\exp(ik_A |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (A = L, T)$$

Из формул (2.1) и (2.2) следуют выражения для амплитуд рассеяния

$$f^A(\omega, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\mu} \mathbf{a}_i^A \int_S \Phi_i(\mathbf{y}) \exp[-ik_A (\mathbf{v}, \mathbf{y})] d\mathbf{y} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_i^L = \xi^2 \mathbf{v} \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{a}_i^T = \delta_i - \mathbf{v} \mathbf{v}_i, \quad \delta_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}), \quad \xi = c_T / c_L$$

Используя разложение сферической волны по плоским волнам, соотношение (2.2) при $x_3 = 0$ запишем в виде

$$\begin{aligned} u_\beta(x_1, x_2) &= u_\beta^i(x_1, x_2) - \frac{\xi^2}{2\mu} k_L \int_S \Phi_\gamma(\mathbf{y}) K_{\gamma\beta}(k_L |\mathbf{r}|) d\mathbf{y} \\ u_3(x_1, x_2) &= u_3^i(x_1, x_2) + \frac{\xi^2}{2\mu} k_L \int_S \Phi_3(\mathbf{y}) K_3(k_L |\mathbf{r}|) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$K_{\gamma\beta}(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} L_{\gamma\beta}(\alpha) e^{i(\alpha, \mathbf{r})} d\alpha, \quad L_{\gamma\beta} = \frac{\xi^{-2}}{\gamma_3} \delta_{\gamma\beta} + \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_3} \right) \alpha_\gamma \alpha_\beta$$

$$K_3(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} L_3(\alpha) e^{i(\alpha, \mathbf{r})} d\alpha, \quad L_3 = \gamma_1 - \frac{|\alpha|^2}{\gamma_3}$$

$$\mathbf{r} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2), \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \gamma_1 = (|\alpha|^2 - 1)^{1/2}, \quad \gamma_3 = (|\alpha|^2 - \xi^{-2})^{1/2}$$

где ветви радикалов γ_i ($i = 1, 3$) определены условием $\text{Im } \gamma_i < 0$ соответственно при $|\alpha| < 1$ и $|\alpha| < \xi^{-1}$. Ядра интегральных представлений (2.4) $K_{\gamma\beta}, K_3$ – полярные (слабосингулярные) и обладают асимптотикой $\text{const } |\mathbf{r}|^{-1}$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$. Заметим, что при $u(\mathbf{x}) = 0$ на S из (2.4) следуют интегральные уравнения, соответствующие задаче рассеяния упругой волны на абсолютно жестком включении.

Таким образом, приходим к системам уравнений (1.7), (1.8) и (2.3), (2.4), определяющих решение задачи рассеяния упругой волны на тонкостенном упругом включении большой жесткости (т.е. при условии, что волновое сопротивление вещества включения много больше волнового сопротивления вещества среды). Однородные граничные задачи (1.7), (1.8) – самосопряжены (эрмитовы), их собственные значения не отрицательны, а собственные функции (их можно выбрать действительными) ортогональны и образуют полную систему в $H^0(S)$. (Эти утверждения вытекают из

положительной определенности операторов, определяемых правыми частями уравнений (1.7), (1.8), и условий на контуре ∂S .)

Поэтому решение задач (1.7), (1.8) можно представить в виде разложений по собственным функциям и собственным значениям. Подстановка этих разложений в равенства (2.4) приводит к интегральным уравнениям с компактными операторами, действующими из пространства $H^0(S)$ в $C(S)$, для определения искомого скачка напряжений Φ_i . Для последних применимы все положения теории Фредгольма, а при численном решении получающихся при этом интегральных уравнений первого рода справедлив метод саморегуляризации [6]. Однако построение собственных функций и собственных значений для произвольной области S затруднительно, кроме как для канонических областей (отрезка, круга).

С другой стороны, предполагая что числа k_l и k_b не являются собственными значениями внутренних задач (1.7), (1.8), рассматриваемые системы уравнений можно привести к соответствующим интегродифференциальным уравнениям. Действительно, подставляя представления (2.4) в соотношения (1.7), (1.8), получаем

$$\Phi_\beta(x_1, x_2) - Zk_L^2(k_l^{-2}\Delta^* + 1) \int_S \Phi_\gamma(y) K_{\gamma\beta}(k_L | \mathbf{r} |) dy = -E_1 h(\Delta^* + k_l^2) u_\beta^i(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x_1, x_2) - Zk_L^2(k_b^{-2}\nabla^4 - 1) \int_S \Phi_3(y) K_3(k_L | \mathbf{r} |) dy = \\ = g(\nabla^4 - k_b^4) u_3^i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in S \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_S \Phi_\beta(y) dy - Zk_L^2 \iint_{SS} \Phi_\beta(y) K_{\gamma\beta}(k_L | \mathbf{r} |) dS dy = -m_0 \int_S u_\beta^i(y) dy \quad (2.7)$$

$$\int_S \Phi_3(y) dy - Zk_L^2 \iint_{SS} \Phi_3(y) K_3(k_L | \mathbf{r} |) dS dy = -m_0 \int_S u_3^i(y) dy \quad (2.8)$$

$$Zk_L^2 M_n \int_S \Phi_3(y) K_3(k_L | \mathbf{r} |) dy = -m_0 M_n u_3^i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial S \quad (2.9)$$

$$Z = k_L h \rho_0 / (2\rho)$$

Равенства (2.7) и (2.8) получены путем интегрирования по S соответствующих дифференциальных уравнений при учете условий на контуре ∂S .

3. Рассмотрим случай, когда правые части уравнений (2.5), (2.7) или (2.6), (2.8) и (2.9) равны нулю. Пусть $\phi_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2, \dots, r$) – линейно независимые собственные функции дифференциальных операторов задач (1.6), (1.7), регулярные внутри S . Общее решение соответствующих уравнений представим в виде

$$u_i(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^r c_{ik} \phi_k(x_1, x_2) + \int_S \Phi_j(y) \Gamma_{ij}(|\mathbf{r}|) dy, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_a}{\mu_0} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial^2 (g_a - g_d)}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}, \quad g_f = \frac{1}{4h} N_0(k_f | \mathbf{r} |) \quad (f = a, d)$$

$$k_f = \frac{\omega}{c_f}, \quad c_a^2 = \frac{1 + \nu_0}{2} c_l^2, \quad c_d^2 = \frac{1 - \nu_0}{2} c_l^2$$

$$\Gamma_{3i} = -\frac{\delta_{i3}}{8m_0} \left[N_0(k_b | \mathbf{r} |) + \frac{2}{\pi} K_0(k_b | \mathbf{r} |) \right]$$

где c_{ik} – произвольные постоянные, функции ϕ_k выбраны действительными, N_0, K_0 – соответственно функции Неймана и Макдональда. Пусть, далее, числа k_l или k_b – собственные значения граничных задач (1.7) или (1.8). Поскольку эти задачи – эл-

липтические граничные задачи (для них легко проверить выполнение условия Шапиро–Лопатинского), то для их разрешимости необходимо и достаточно чтобы [7]

$$\int_S \Phi_k(y) \Phi_j(y) dy = 0, \quad k = 1, \dots, r \quad (3.2)$$

Отметим, что когда S – отрезок, то (1.7) – задача Штурма – Лиувилля и, следовательно, $r = 1$, а для задачи (1.8) $r = 2$.

Тогда вместо интегро-дифференциального уравнения (2.5) или (2.6) получаем из равенства (2.4) и (3.1) соответствующие интегральные уравнения первого рода фредгольмовского типа

$$\int_S M_{ij}(|r|) \Phi_j(y) dy + \sum_{k=1}^r c_{ik} \Phi_k(x_1, x_2) = u_i^j(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in S$$

$$M_{\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma}(|r|) + \frac{\xi^2}{2\mu} k_L K_{\gamma\beta}(k_L |r|), \quad M_{13} = \Gamma_{13}(|r|) - \delta_{13} \frac{\xi^2}{2\mu} k_L K_3(k_L |r|)$$

причем искомые функции Φ_i удовлетворяют условиям (3.2).

4. В качестве примера рассмотрим случай, когда $S = \{|x_1| < a, |x_2| < \infty\}$, а падающая волна представляется в виде $u^i(x) = l \exp[ik_L(l, x)]$, $l = (\sin \theta_0, 0, -\cos \theta_0)$ (здесь и далее рассматриваем волны вертикальной поляризации: $u_2(x) = 0$). Имеем плоскую задачу, где от координаты x_2 никакие величины, что характеризуют волны, не зависят. Решения граничных задач (1.7) и (1.8) в этом случае имеют вид:

$$u_\beta(t) = -\frac{\xi_\beta^{-1}}{4m_0} x \int_{-1}^1 \Phi_\beta(u) g_\gamma(u, t; x \xi_\gamma^{-1}) \delta_{\gamma\beta} du, \quad \gamma, \beta = 1, 3 \quad (4.1)$$

$$g_1(u, t; x) = 2\{\cos[x(2 - |t - u|)] + \cos[x|t + u|]\} / \sin 2x$$

$$g_3(u, t; x) = \sin[x|t - u|] + \exp[x|t - u|] + f_1 \operatorname{ch}(xt) + f_2 \operatorname{sh}(xt) + f_3 \cos(xt) + f_4 \sin(xt)$$

$$f_1 = \{\cos(xu) + e^{-x} \operatorname{ch}(xu) d_2^-(x)\} / d_1^+(x)$$

$$f_2 = \{\sin(xu) + e^{-x} \operatorname{sh}(xu) d_2^+(x)\} / d_1^-(x)$$

$$f_3 = \{\operatorname{ch}(xu) + \cos(xu) d_3(x)\} / d_1^+(x)$$

$$f_4 = \{\operatorname{sh}(xu) - \sin(xu) d_3(x)\} / d_1^-(x)$$

$$d_1^\pm(x) = \operatorname{ch} x \sin x \pm \operatorname{sh} x \cos x, \quad d_2^\pm = \cos x \pm \sin x$$

$$d_3(x) = \operatorname{ch} x \cos x - \operatorname{sh} x \sin x$$

$$x = k_L a, \quad \xi_1 = c_l / c_L, \quad \xi_3 = c_b / c_L, \quad t = x_1 / a$$

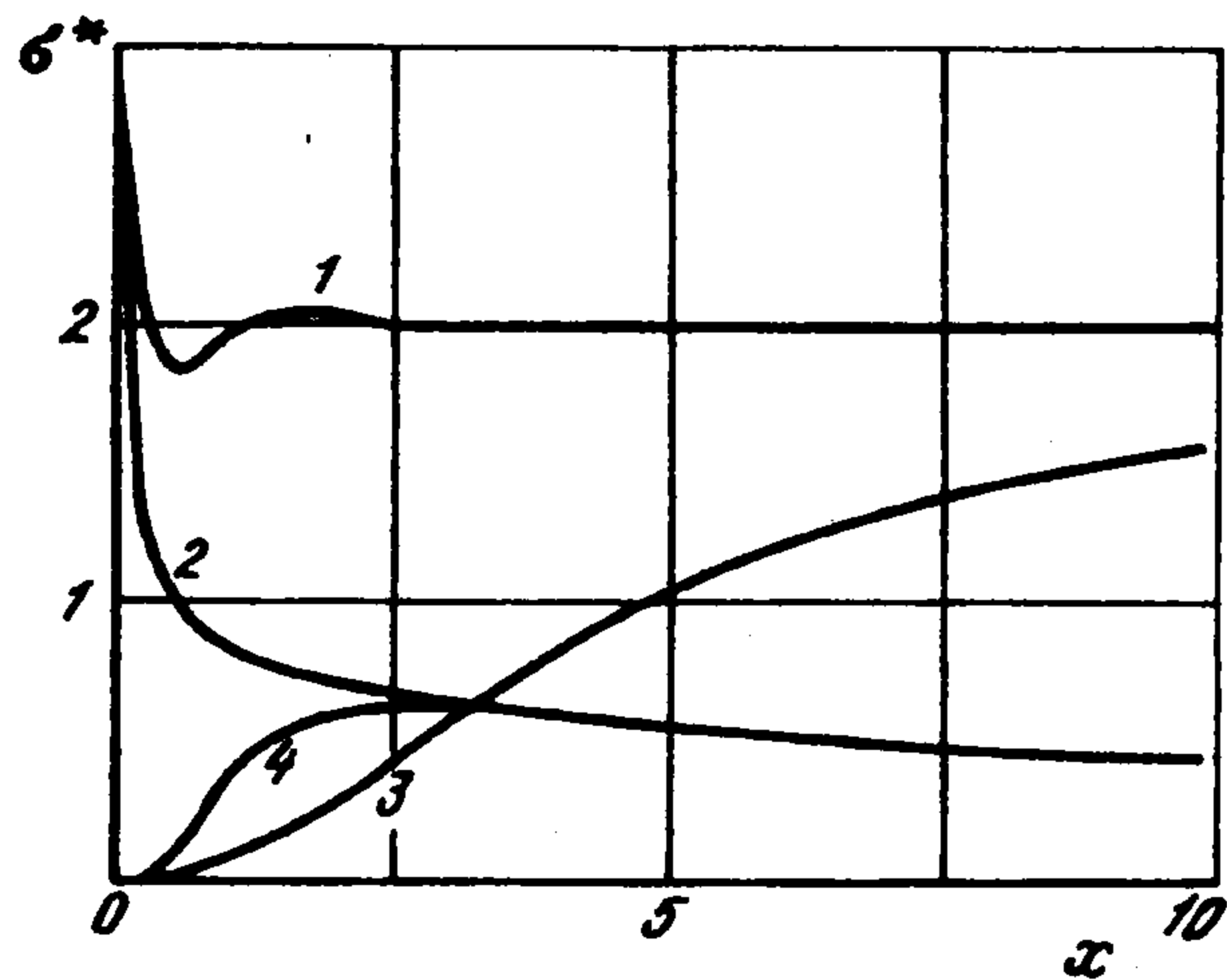
Заметим, что при $\sin(2x \xi_1^{-1}) = 0$ или $d_1^+(x \xi_3^{-1}) d_1^-(x \xi_3^{-1}) = 0$ из (4.1) следуют решения, отвечающие формулам (3.1) и (3.2) в двумерном случае. Подставляя равенства (4.1) в соотношения (2.4), предварительно выполнив интегрирование по u_2 , получаем интегральные уравнения первого рода с логарифмической особенностью в ядрах

$$\frac{xZ}{m_0} \int_{-1}^1 \Phi_\beta(u) M_\gamma(u, t) \delta_{\gamma\beta} du = -l_\beta \exp(i\omega l_1 t), \quad |t| < 1$$

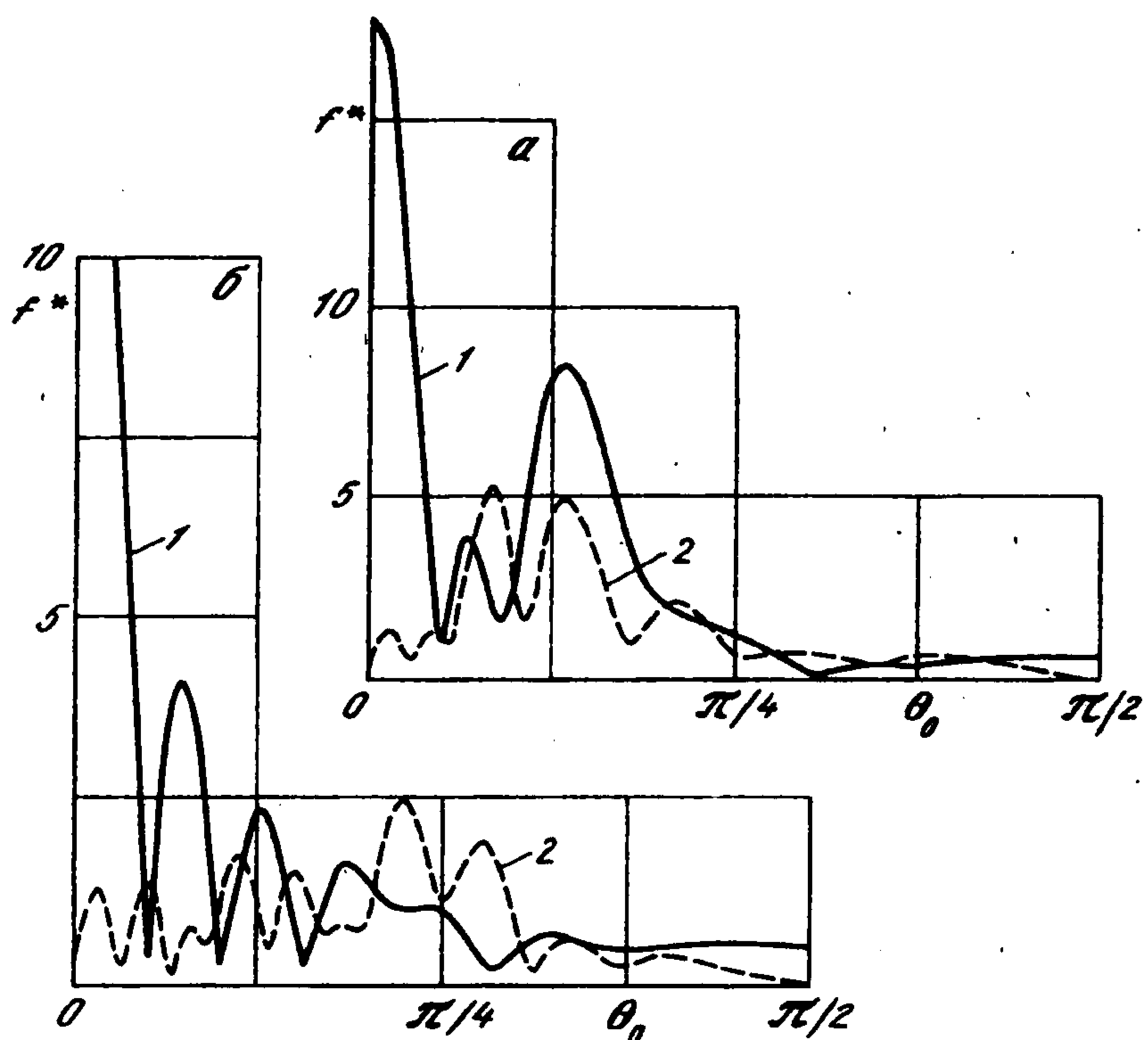
$$M_\beta(u, t) = K_\beta(x|t - u|) + Z^{-1} \xi_\beta^{-1} g_\beta(u, t; x \xi_\beta^{-1})$$

$$K_1(z) = -\frac{i}{2} \left[H_0^{(1)}(z) + \frac{q(z)}{z} \right], \quad q(z) = \frac{1}{\xi} H_1^{(1)}\left(\frac{z}{\xi}\right) - H_1^{(1)}(z)$$

$$K_3(z) = -\frac{i}{2} \left[\frac{1}{\xi^2} H_0^{(1)}\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{q(z)}{z} \right], \quad \xi = \frac{c_T}{c_L}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $H_m^{(1)}$ – цилиндрические функции Ганкеля. При этом рассеянное поле $u^s(\mathbf{x})$ при $R_0 = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое представление

$$u^s(\mathbf{x}) = \sum_{A=L,T} (8\pi k_A R_0)^{-1/2} \exp(ik_A R_0 + i\pi/4) f^A(\omega; \mathbf{l}, \mathbf{v}) \quad (4.2)$$

$$f^A(\omega; \mathbf{l}, \mathbf{v}) = -\frac{a}{\mu} a_\beta^A \int_{-1}^1 \Phi_\beta(u) \exp(-ik_A a v_1 u) du, \quad \beta=1,3, \quad A=L,T$$

В качестве характеристик рассеяния выберем полное поперечное сечение рассеяния, определяемое в направлениях $\theta_0 = 0, \pi/2$ равенством $\sigma(\theta_0) = k_L^{-1} \text{Im}(\mathbf{l}, \mathbf{f}^L(\omega; \mathbf{l}, \mathbf{l}))$, $(\mathbf{l}, \mathbf{a}_\beta^T) = 0$, и полярную характеристику рассеяния в локационном направлении $F(\theta_0) = |\mathbf{f}^A(\omega; \mathbf{l}, -\mathbf{l})|$. Решение системы интегральных уравнений (4.2) строили численно методом механических квадратур [6]. Полученные результаты сравнивали с результатами, найденными путем решения этим же методом интегро-дифференциальных уравнений (2.5)–(2.9), записанных для отрезка, и были подтверждены ими. При этом внешняя среда характеризовалась равновесными параметрами винипласта: $E = 0,03 \cdot 10^{-5}$ МПа, $\nu = 0,354$, $\rho = 1,3$ т/м³ или плексигласа: $E = 0,525 \cdot 10^{-4}$ МПа, $\nu = 0,35$, $\rho = 1,18$ т/м³, а включение – параметрами стали: $E_0 = 19 \cdot 10^{-4}$ МПа, $\nu_0 = 0,3$, $\rho_0 = 8$ т/м³. Толщину включения брали равной $0,09a$. Отметим, что стальное включение в винипласте отвечает значению $\kappa = 3$, а в плексигласе – $\kappa = 1$.

На фиг. 1 представлены зависимости величины $\sigma^* = \sigma(\theta_0)/(2a)$ от волнового размера x . Кривые 1 и 2 соответствуют абсолютно жесткому ($Z = \infty$), а кривые 3 и 4 – упругому включению, находящимся в винипласте, соответственно при $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$. Из графиков, определяемых кривыми 2 и 4, следует, что при $x > 1$ включение ведет себя как абсолютно жесткое, т.е. эффекты, связанные с его продольными колебаниями, пренебрежительно малы. Эти эффекты существенны лишь в релеевской области, где частоты колебаний близки к собственной частоте $k_l \approx 0$, т.к. $k_l a \ll x$ ($\xi_1^{-1} = 0,038$). В тоже время из графиков, определяемых кривыми 1 и 3, следует, что $\sigma(0)$ при $x > 1$ достаточно точно определяется своим приближением Кирхгофа $4aZ^2/(1+Z^2)$.

На фиг. 2 приведены зависимости $f^* = F(\theta_0)/2$ для винипласта (a) и плексигласа (б) при $x = 10$. Кривые 1 отвечают продольным ($A = L$), а кривые 2 – поперечным ($A = T$) волнам. Известно [8], что при наклонном падении звуковой волны на упругую пластинку, находящуюся в жидкости, в области некоторых углов наблюдается сильное отражение в направлении, противоположном

направлению падающей волны (так называемое незеркальное отражение, обусловленное изгибными и продольными волнами в пластинке). Эффект незеркального отражения продольных волн, обусловленный изгибными волнами тонкостенного включения, ярко выражен на фиг. 2,а в области угла $\theta_{\star} \cong 23^{\circ}$ ($\sin \theta_{\star} \cong \xi_3^{-1} = 0,383$). Незеркальное отражение продольных волн, связанное с продольными волнами во включении (фиг. 2,б), менее ярко выражено и находится в области $\theta_{\star} \cong 30^{\circ}$ ($\sin \theta_{\star} \cong \xi_1^{-1} = 0,523$). При этом отмеченные резонансы достаточно широки в отличие от резонансов, возникающих при колебаниях упругих пластин в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Caillerie D.* The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1980. V. 2. № 3. P. 251–270.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Санчес – Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
4. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
5. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М. Физматгиз, 1963. 472 с.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
7. *Агранович М.С.* Спектральные свойства задач дифракции // Дополнение в книге: *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. С. 289–416.
8. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

Львов

Поступила в редакцию
30.III.1994