УДК 539.3

© 1996 г. И.А. Солдатенков

# О ВДАВЛИВАНИИ СО СЦЕПЛЕНИЕМ СИММЕТРИЧНОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Предлагается новый подход к решению задачи о внедрении со сцеплением штампа в упругую полуплоскость, основанный на известной [1] процедуре обращения уравнений для контактных напряжений. Задача рассматривается в уточненной постановке, учитывающей касательное перемещение границы в граничном условии для нормального перемещения. Аналогичная задача решалась ранее [2–4] на основе инкрементального подхода, требующего дополнительных преобразований исходных уравнений.

**1. Постановка задачи.** Пусть жесткий симметричный штамп вдавливается в упругую полуплоскость под действием центрально приложенной нагрузки $P$ при наличии сцепления контактирующих тел (фигура). Последнее означает, что точки полуплоскости, пришедшие в контакт со штампом, перемещаются далее вместе с ним вертикально.

Будем считать, что при вдавливании размер $a > 0$ области контакта монотонно увеличивается и будем характеризовать величиной $a$ степень внедрения штампа. Задача состоит в нахождении контактных напряжений $q_1 = \tau_{xy}|_{y=0}$, $q_2 = -\sigma_y|_{y=0}$ при произвольном $a$. Граничные условия имеют вид

$$u(x,a) = \varphi(x),\ v(x,a) = g(x + \mu\varphi(x)),\ |x| \leqslant a$$
$$q_1(x,a) = q_2(x,a) = 0,\ |x| > a \tag{1.1}$$

где $u, v$ – касательное и нормальное перемещения границы полуплоскости в системе $x, y$ (фигура), $\varphi(x)$ – некоторая функция, подлежащая определению, $y = g(x)$ – уравнение формы штампа, причем в силу симметрии задачи функция $g(x)$ четна, $\mu = 0{,}1$. Далее также будет использоваться обозначение: $G(x) = g'(x)$.

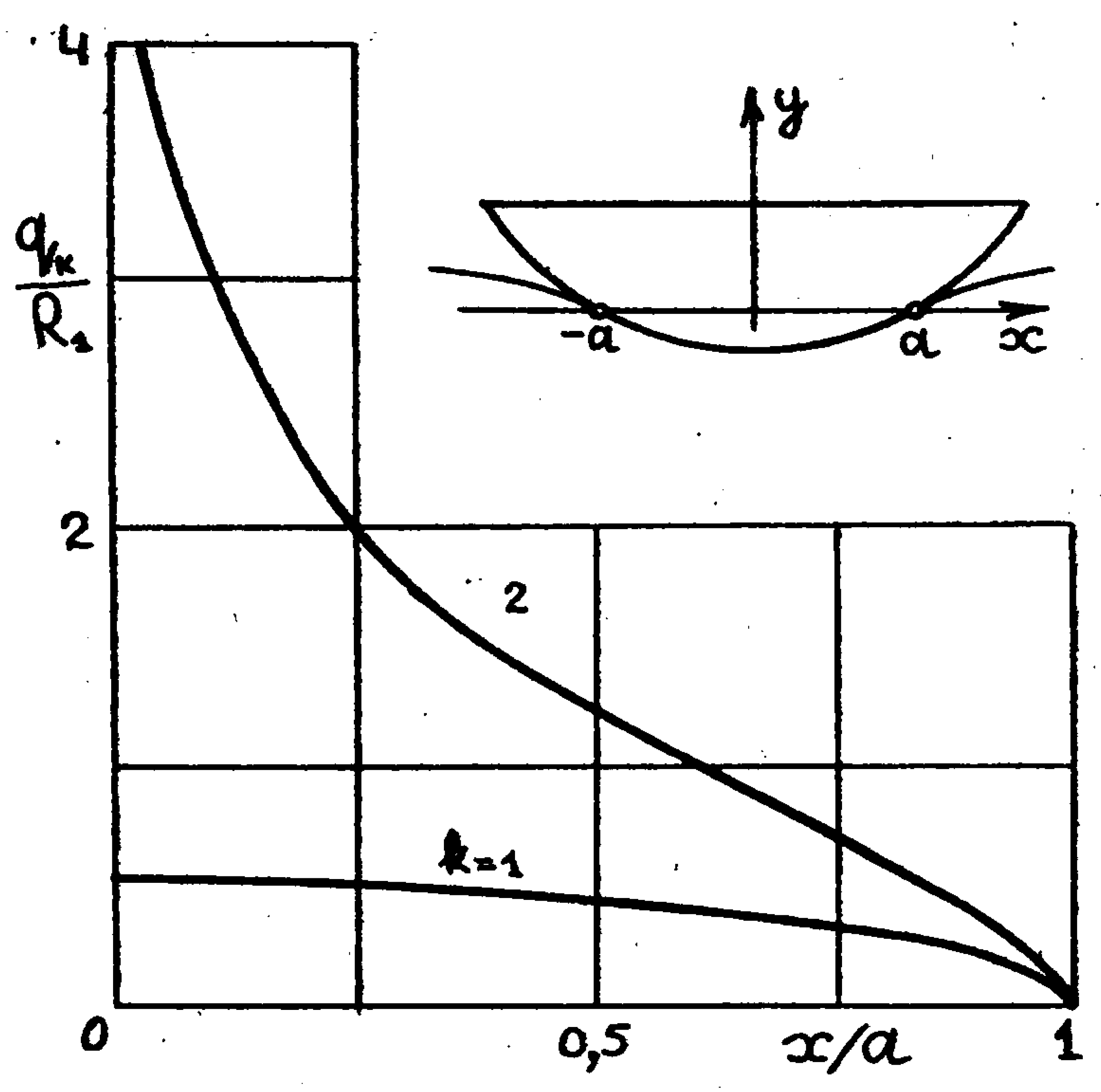
Подчеркнем, что функция $\varphi(x)$ представляет собой касательное граничное перемещение в пределах области контакта, и отсутствие у нее аргумента $a$ обуславливается независимостью от параметра $a$ данного перемещения при сцеплении штампа с полуплоскостью.

Наличие слагаемого $\varphi(x)$ в аргументе функции $g$ в (1.1) при $\mu = 1$ соответствует уточненной постановке контактной задачи, учитывающей в граничном условии для $v$ касательное перемещение границы[1]. При отсутствии $\varphi(x)$ во втором равенстве (1.1) ($\mu = 0$) последние будут иметь классический вид [3].

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(x)$. Прежде всего в силу симметрии задачи эта функция должна быть нечетной и

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.2}$$

[1] *Солдатенков И.А.* Контактная задача для полуплоскости в уточненной постановке (учет касательного контактного перемещения): Препринт N 501. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР. 1991. 37 с.




Далее, так как $\varphi(x)$ представляет собой касательное перемещение точки $x$ области контакта, то неравенство $x + \varphi(x) < 0$ при $x \geqslant 0$ означает, что при деформировании полуплоскости точка $x$ перемещается через центр штампа налево, а это, очевидно, противоречит условию сцепления контактирующих поверхностей полуплоскости и штампа. Отсюда следует, что

$$x+\varphi(x)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\geqslant 0 \tag{1.3}$$

При дальнейшем рассмотрении материала будут использоваться понятие узла и классы функций $H$, $H_0$, $H^*$, $h_2$, определения которым даны в [1]. Введем в рассмотрение класс функций $H_+$, который определим так: $f(x) \in H_+$, если при $f(0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)$ и для любого $d > 0$ функция $f(x)$ принадлежит $H$ на отрезке $[0, d]$.

Наложим следующие ограничения на форму штампа и неизвестную функцию $\varphi(x)$:

$$G(x)\equiv g'(x)\in H_+, \quad \varphi'(x)\in H_+ \tag{1.4}$$

Заметим, что, если $f(x) \in H_+$ и функция $f(x)$ четна или нечетна (подобно функциям $\varphi'(x)$ и $g'(x)$) и если рассматривать точку $x = 0$ как узел, то $f(x) \in H_0$ на $[-d, d]$ для любого $d > 0$. Учитывая это, условиям (1.4) можно придать вид

$$G(x)\in H_0, \quad \varphi'(x)\in H_0 \quad \text{на} \quad [-d,d], \quad d>0 \tag{1.5}$$

причем точка $x = 0$ рассматривается как узел.

Рассмотрим теперь граничные напряжения $q_1$, $q_2$, связь которых с перемещениями $u$ и $v$ в рамках линейной теории упругости дается двумя сингулярными интегральными уравнениями [5]. С учетом граничных условий (1.1) эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=-\pi\chi q_2(x,a)+\int_{-a}^{a}\frac{q_1(\xi,a)}{\xi-x}d\xi, \quad |x|\leqslant a\\ \psi_2(x)&=-\pi\chi q_1(x,a)-\int_{-a}^{a}\frac{q_2(\xi,a)}{\xi-x}d\xi, \quad |x|\leqslant a\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\psi_1(x)=m\varphi'(x), \quad \psi_2(x)=mG(x+\mu\varphi(x))(1+\mu\varphi'(x)) \tag{1.7}$$

$$m=\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}, \quad \chi=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$.

Можно установить, что при условиях (1.5) из равенств (1.7) вытекает следующее свойство функций $\psi_1$ и $\psi_2$:

$$\psi_k(x)\in H_0 \quad \text{на} \ [-d,d], \quad d>0, \quad k=1,2 \tag{1.8}$$

Относительно функций $q_1(x, a)$ и $q_2(x, a)$ будем предполагать, что при каждом $a$ они ограничены на концах $\pm a$ области контакта и принадлежат классу $H^*$ на $[-a, a]$, т.е. в обозначениях [1] будем считать, что

$$q_k(x,a)\in h_2 \text{ на } [-a,a],\ k=1,2 \tag{1.9}$$

**2. Обращение уравнений для граничных напряжений.** Фиксируем размер $a$ области контакта. Обращение системы (1.6), т.е. получение выражений для $q_1$, $q_2$ через $u$ и $v$, можно провести на основе известных результатов для систем сингулярных интегральных уравнений [6]. Однако в данном случае проще свести систему (1.6) приемом, описанным, например, в [7], к одному комплекснозначному сингулярному интегральному уравнению и воспользоваться для его решения методикой из [1]. А именно, умножим в (1.6) первое уравнение на $i$ и сложим его со вторым уравнением. В результате получим

$$\begin{gathered}-\pi\chi q(x,a)+i\int_{-a}^{a}\frac{q(\xi,a)}{\xi-x}d\xi=f(x),\ |x|\leqslant a\\ q(x,a)=q_1(x,a)+iq_2(x,a),\ f(x)=\psi_2(x)+i\psi_1(x)\end{gathered} \tag{2.1}$$

Из (1.8) и (1.9) непосредственно следует, что

$$f(x)\in H_0,\ q(x,a)\in h_2 \text{ на } [-a,a]$$

Согласно [1], решение $q(x, a)$ уравнения (2.1) из класса $h_2$ при $f(x)\in H_0$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)d\xi}{Z_1(\xi,a)}=0 \tag{2.2}$$

где

$$Z_1(x,a)=(a^2-x^2)^{1/2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{i\tau/2},\quad \tau=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\chi}{1-\chi}\geqslant 0$$

При выполнении условия (2.2) справедлива следующая формула обращения уравнения (2.1):

$$\begin{gathered}q(x,a)=A^*f(x)-\frac{B^*}{\pi i}Z_1(x,a)\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)d\xi}{Z_1(\xi,a)(\xi-x)},\ |x|\leqslant a\\ A^*=\frac{\chi}{\pi(1-\chi^2)},\quad B^*=\frac{1}{\pi(1-\chi^2)}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Отметим, что предельные значения функции $q(x, a)$ из (2.3) при $x\to\pm a$ равны нулю. Это непосредственно следует из известной теоремы о поведении интеграла типа Коши, присутствующего в (2.3), вблизи концов линии интегрирования [1].

Подставим в (2.2) вместо функции $f(x)$ ее выражение через функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, которые в свою очередь связаны с функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$ равенствами (1.7). В результате, учитывая свойства симметрии функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, получим равенство

$$\begin{gathered}\int_0^a\frac{\varphi'(x)\cos\alpha(x,a)+G(x+\mu\varphi(x))(1+\mu\varphi'(x))\sin\alpha(x,a)}{(a^2-x^2)^{1/2}}dx=0\\ \alpha(x,a)=\frac{\tau}{2}\ln\frac{a+x}{a-x}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) должно выполняться для любых $a>0$ и поэтому может рассматриваться как уравнение Вольтерры первого рода для неизвестной функции $\varphi(x)$.

Выполняя аналогичную подстановку в (2.3), будем иметь при $x \in [-a, a]$

$$
\begin{aligned}
&q_1(x,a)=\frac{1}{\pi(1-\chi^2)}\Big\{\chi\psi_2(x)-\frac{1}{\pi}(a^2-x^2)^{1/2}[i_1(x,a)\sin\alpha(x,a)+\\
&+j_1(x,a)\cos\alpha(x,a)+i_2(x,a)\cos\alpha(x,a)-j_2(x,a)\sin\alpha(x,a)]\Big\}\\
&q_2(x,a)=\frac{1}{\pi(1-\chi^2)}\Big\{\chi\psi_1(x)-\frac{1}{\pi}(a^2-x^2)^{1/2}[i_1(x,a)\cos\alpha(x,a)-\\
&-j_1(x,a)\sin\alpha(x,a)-i_2(x,a)\sin\alpha(x,a)-j_2(x,a)\cos\alpha(x,a)]\Big\}\\
&i_k(x,a)=\int_{-a}^{a}\frac{\psi_k(\xi)\sin\alpha(\xi,a)}{(a^2-\xi^2)^{1/2}(\xi-x)}d\xi,\quad j_k(x,a)=\int_{-a}^{a}\frac{\psi_k(\xi)\cos\alpha(\xi,a)}{(a^2-\xi^2)^{1/2}(\xi-x)}d\xi
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Выражениям (2.5) для $q_k(x, a)$ можно придать более компактный вид, если в них сделать замену переменных $x \to s = \operatorname{arcth}(x/a)$ и ввести функции

$$
Q_k(s,a)=q_k(a\operatorname{th}s,a),\quad \Psi_k(s,a)=\psi_k(a\operatorname{th}s) \tag{2.6}
$$

Равенства (2.5) дают решение поставленной задачи при наличии функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей равенству (2.4).

При известных контактных напряжениях $q_1$, $q_2$ нагрузка $P$ на штамп находится из условия его равновесия:

$$
P=-2\int_0^a q_1(x,a)\sin\omega(x)dx+2\int_0^a q_2(x,a)\cos\omega(x)dx \tag{2.7}
$$

где $\omega(x) = \operatorname{arctg} g'(x)$ – угол наклона контура штампа к оси $x$, $x \geqslant 0$, причем $|\omega(x)| \ll 1$.

*Замечание.* В случае $\nu = 1/2$ (несжимаемый материал) имеем $\tau = 0$, и следовательно, уравнение (2.4) для $\varphi(x)$ будет иметь вид

$$
\int_0^a\frac{\varphi'(x)dx}{(a^2-x^2)^{1/2}}=0,\quad a>0 \tag{2.8}
$$

Уравнению (2.8) при условии (1.2), очевидно, удовлетворяет функция $\varphi(x) \equiv 0$. Можно доказать единственность решения $\varphi(x) \equiv 0$ уравнения (2.8). Для этого достаточно свести его к уравнению[2]

$$
\begin{aligned}
&\varphi(a)=a^{-1}\int_0^a N_0\left(\frac{x}{a}\right)\varphi(x)dx,\quad a>0\\
&N_0(\lambda)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{3/2}}D\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

где $D(k)$ – полный эллиптический интеграл, и убедиться, что интегральный оператор в правой части (2.9) является сжимающим в пространстве непрерывных функций $C[0, d]$ при любом $d > 0$.

Подстановка функции $\varphi(x) \equiv 0$ в (2.5) дает выражения для $q_1$ и $q_2$ при $\nu = 1/2$, которые имеют тот же вид, что и в случае контактной задачи без трения:

$$
q_1(x,a)\equiv 0,\quad q_2(x,a)=\frac{2E}{3\pi}(a^2-x^2)^{1/2}\int_{-a}^{a}\frac{g'(\xi)d\xi}{(a^2-\xi^2)^{1/2}(\xi-x)}
$$

---

[2] *Солдатенков И.А.* Задача о вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость: Препринт N 525. М.: Ин-т пробл. механики РАН. 1993. 22 с.

Ниже рассматривается частный случай клиновидного штампа, для которого на основе равенств (2.4), (2.5) решение задачи находится в явном виде. Некоторые другие частные случаи рассмотрены автором ранее[2].

**3. Случай клиновидного штампа.** Пусть

$$g(x)=g_1|x|,\quad G(x)=g_1\operatorname{sgn}x,\quad g_1>0 \tag{3.1}$$

Отметим, что для выполнения условия малости деформаций, необходимого для правомочности использования уравнений (1.6) линейной теории упругости, следует считать $g_1 \ll 1$.

Можно установить, что при (3.1) первое из условий (1.4) выполняется. Подставляя (3.1) в (1.7) и (2.4) и учитывая неравенство (1.3), придем к следующим выражениям для $\psi_1$, $\psi_2$ и уравнению для $\varphi(x)$

$$\psi_1(x)=m\varphi'(x),\quad \psi_2(x)=mg_1\operatorname{sgn}x(1+\mu\varphi'(x)) \tag{3.2}$$

$$\int_0^a \frac{\cos\alpha(x,a)+\mu g_1\sin\alpha(x,a)}{(a^2-x^2)^{1/2}}\varphi'(x)dx=-g_1\int_0^a\frac{\sin\alpha(x,a)}{(a^2-x^2)^{1/2}}dx \tag{3.3}$$

Уравнению (3.3) удовлетворяет функция

$$\varphi'(x)=\varphi_1\equiv -g_1\gamma_0/(\delta_0+\mu g_1\gamma_0),\quad x\geqslant 0 \tag{3.4}$$

где

$$\gamma_0\equiv\int_0^\infty\frac{\sin\tau X}{\operatorname{ch}X}dX=2\tau\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2+\tau^2}\geqslant 0$$

$$\delta_0\equiv\int_0^\infty\frac{\cos\tau X}{\operatorname{ch}X}dX=\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}\right)^{-1}\geqslant 0$$

Принимая во внимание равенство (1.2) и то, что функция $\varphi(x)$ нечетная, из (3.4) получим

$$\varphi(x)=\varphi_1 x \tag{3.5}$$

Выражение (3.5) для $\varphi(x)$, очевидно, удовлетворяет второму из условий (1.4). Кроме того, для функции вида (3.5) выполняется неравенство (1.3). При $\mu = 1$ это непосредственно следует из (3.4) и (3.5), а при $\mu = 0$ – еще и из неравенства

$$1-g_1\gamma_0/\delta_0>0 \tag{3.6}$$

справедливость которого обусловливается тем, что $g_1 \ll 1$ и, как можно показать, $\gamma_0/\delta_0 < 1$ при $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$.

Если подставить выражения (3.2) и (3.5) в (2.5), то после несложных преобразований интегралов $i_k, j_k$ можно получить следующие выражения для функций $Q_1(s, a)$, $Q_2(s, a)$, связанных с контактными напряжениями $q_1(x, a)$, $q_2(x, a)$ равенствами (2.6):

$$Q_k(s,a)=R_1W_k(s),\quad s>0,\quad R_1=\frac{4(1-\nu)Eg_1(1+\mu g_1\gamma_0/\delta_0)^{-1}}{\pi(1+\nu)(3-4\nu)} \tag{3.7}$$

$$W_1(s)=\int_s^\infty\frac{\sin\tau X}{\operatorname{sh}X}dX,\quad W_2(s)=\int_s^\infty\frac{\cos\tau X}{\operatorname{sh}X}dX \tag{3.8}$$

Проанализируем характер поведения контактных напряжений при $x \to a$ ($s \to \infty$) и $x \to 0+0$ ($s \to 0+0$). Для этого разложим в интегралах (3.8) функцию $(\operatorname{sh}X)^{-1}$ в степенной ряд и произведем почленное интегрирование полученных сумм. В результате придем к равенствам

$$W_{\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}}(s)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)s}}{(2n-1)^2+\tau^2}\left[(2n-1)\begin{Bmatrix}\sin\tau s\\ \cos\tau s\end{Bmatrix}\pm\tau\begin{Bmatrix}\cos\tau s\\ \sin\tau s\end{Bmatrix}\right],\quad s>0 \tag{3.9}$$

с помощью которых, а также соотношений (2.6) можно установить, что при $x\to a$ $(s\to\infty)$

$$q_k(x,a)=\frac{2R_1}{(1+\tau^2)^{1/2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{\tau}{2}\ln\frac{a+x}{a-x}+\theta_k\right)+O((a-x)^{3/2}),\quad x\to a,\quad k=1,2 \tag{3.10}$$

$$\theta_k=\arccos(1+\tau^2)^{-1/2}+\pi(k-1)/2$$

Отметим, что, как и для параболического штампа [3], граничные напряжения $q_k$ стремятся к нулю при $x\to a$ по корневому закону с бесконечным числом осцилляций.

Для анализа характера поведения $q_k$ при $x\to 0+0$ следует рассмотреть поведение интегралов (3.8) при $s\to 0+0$. Анализ показывает, что

$$W_1(s)=\frac{\pi}{2}\chi+O(s),\quad W_2(s)=-\ln s+O(1),\quad \chi=\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}$$

когда $s\to 0+0$, и поэтому, учитывая равенства (2.6) и (3.7), получим

$$q_1(x,a)=\frac{\pi}{2}R_1\chi+O\left(\frac{x}{a}\right),\quad q_2(x,a)=-R_1\ln\frac{x}{a}+O(1) \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10) и (3.11) определяют характер поведения напряжений $q_k$ в окрестностях точек $x=a$ и $x=0$. Промежуточные (т.е. при $x\in(0,a)$) значения $q_k$ могут быть вычислены с помощью цепочки равенств (3.9), (3,7), (2,6). Соответствующий результат при $\nu=0{,}25$ показан на фигуре.

С учетом равенств (2.6), (3.7) и (3.8), определяющих контактные напряжения $q_k$, условие равновесия (2.7) дает выражение для нагрузки на клиновидный штамп

$$P=2R_1\delta_0\cos\omega\left(1-g_1\frac{\gamma_0}{\delta_0}\right)a \tag{3.12}$$

Отметим, что, в силу неравенства (3.6), выражение в круглых скобках в правой части (3.12), а следовательно, и само выражение для $P$, принимают только положительные значения.

**4. Заключительные замечания.** При использовании классических граничных условий (1.1) (т.е. при $\mu=0$) уравнение (2.4) становится линейным и допускает решение в явном виде для более общего случая симметричного штампа

$$g(x)=\sum_{n=0}^{N}g_nx^n,\quad x\geqslant 0$$

Непосредственной подстановкой в (2.4) при $\mu=0$ можно проверить, что соответствующее решение имеет вид

$$\varphi(x)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\gamma_{n-1}}{\delta_{n-1}}g_nx^n,\quad x\geqslant 0$$

где $\gamma_n$, $\delta_n$ – постоянные коэффициенты.

Напомним, что $\varphi(x)$ – касательное перемещение точек области контакта. Используя результаты работы [3], также можно получить в случае полиномиального штампа выражение для $\varphi(x)$, которое в точности будет совпадать с представленным выше.

Для клиновидного штампа можно проверить, что решение соответствующей задачи, полученное для классических граничных условий [3], обобщается на случай граничных условий вида (1.1) при $\mu = 0{,}1$. Получаемые в результате выражения для $Q_k$ имеют такой же вид, что и (3.7). Таким образом, для клиновидного штампа методики, изложенные выше и в [3], дают одинаковые результаты. Однако в общем случае установить эквивалентность обоих методик представляется затруднительным.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. 29. N 3. P. 515–522. = *Гудман Л.* Исследование контактных напряжений в нормально нагруженных шероховатых сферических телах // Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. 1962. Т. 29. N 3. С. 74–82.
3. *Моссаковский В.И., Фотиева Н.Н.* Вдавливание симметричного штампа в упругую полуплоскость при наличии сцепления на линии контакта // Изв. АН СССР. Механика. 1965. N 6. С. 67–70.
4. *Spence D.A.* Self similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1968. V. 305. N 1480. P. 55–80.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
7. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.



Москва

Поступила в редакцию
15.III.1995