УДК 539.3

© 1996 г. Б.В. Нерубайло, Л.Г. Смирнов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА СО ЩЕЛЯМИ В ПЛОСКОСТИ РАЗДЕЛА

Рассматривается пространство, составленное из двух разнородных упругих полупространств, при наличии на границе раздела соосной системы круглой и кольцевой щелей. На берегах щелей заданы нагрузки, зависящие только от радиальной координаты. Для решения такой задачи теории упругости используется представление ее общего решения через обобщенные аналитические функции. После удовлетворения граничным условиям на щелях и ряда выкладок получено сингулярное интегральное уравнение. Путем точного обращения характеристической части это уравнение затем сводится к уравнению Фредгольма. В случае одной круглой щели получено замкнутое решение.

Сведение задач плоской теории упругости для тел с трещинами к задаче сопряжения комплексных аналитических функций на границах трещин, а затем сведение их к интегральным уравнениям является эффективным методом их решения. В пространственных осесимметричных задачах теории упругости в случае плоской границы в ряде случаев также возможно их сведение к задачам сопряжения, а затем и к интегральным уравнениям с помощью p-аналитических функций. Этим способом были решены некоторые смешанные задачи теории упругости в осесимметричном случае для полупространства, пространства с соосными круговыми щелями и др. [1–4]. Некоторые из подобных задач были решены [1] с помощью их приведения к задаче сопряжения для аналитических функций. Представляется также эффективным использование обобщенных аналитических функций в такого рода задачах, в частности для упругого пространства, составленного из двух разнородных полупространств при наличии кольцевых щелей в плоскости раздела, чему и посвящается настоящая статья.

Пусть упругие характеристики материала у каждого из двух полупространств разные и равны соответственно G_1, ν_1 и G_2, ν_2, где G_j – модуль сдвига, ν_j – коэффициент Пуассона ($j = 1, 2$). Предполагая, что вдоль плоскости раздела полупространств $z < 0, 0 < r < \infty$ и $z > 0, 0 < r < \infty$ (z, r – цилиндрические координаты) всюду, кроме областей, соответствующих щелям, имеет место идеальный контакт, а на границе щелей заданы нагрузки, используя обобщенные аналитические функции (ОАФ), краевые условия на границе щелей запишем в виде [1]

$$\Phi_k(t) - \overline{\Psi_k(t)} = f_k(t) = \sigma_z^{(k)} + i\tau_{zr}^{(k)}$$

$$\left(L = \sum_{k=0}^{n} L_k;\ L_k \to (z = 0, a_k < |r| < b_k); k = 0, 1, \ldots, n \right) \tag{1}$$

Условия сопряжения на общей границе полупространств, т.е. равенства нагрузок, а также перемещений $u_z^{(k)}$ и $u_r^{(k)}$ таковы:

$$\Phi_1(t) - \overline{\Psi_1(t)} = \Phi_2(t) - \overline{\Psi_2(t)} \tag{2}$$

$$(\varkappa_1\varphi_1(t)-\overline{\psi_1(t)})/G_1=(\varkappa_2\varphi_2(t)-\overline{\psi_2(t)})/G_2 \quad (z\notin L) \tag{3}$$

где $\Phi_k(t)$, $\Psi_k(t)$ – ОАФ при $z<0$ ($k=1$) и $z>0$ ($k=2$) соответственно; $\sigma_z^{(k)}$ и $\tau_{zr}^{(k)}$ – заданные на границах щелей нормальные и касательные напряжения; $u_z^{(k)}$ и $u_r^{(k)}$ – перемещения; $\Phi_k(t)=\varphi'(t)$, $\Psi_k(t)=\psi_k'(t)$, $\varkappa_k=3-4\nu_k$, $a_{n+1}=\infty$.

Операция дифференцирования для ОАФ определяется следующим образом [1]:

$$\varphi'(t)=\lim_{t_1\to t}(\varphi(t_1)-\operatorname{Re}\varphi(t)-irr_1^{-1}\operatorname{Im}\varphi(t))(z-z_1+i(r-r_1))^{-1}$$

$$(t=z+ir,\quad t_1=z_1+ir_1) \tag{4}$$

Напряжения и перемещения определяются через ОАФ по формулам

$$\sigma_z+\sigma_r+\sigma_\theta=4(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi(t)$$

$$\sigma_\theta=4\nu\operatorname{Re}\Phi(t)+2Gu_r/r$$

$$\sigma_z+i\tau_{zr}=\Phi(t)-2z\overline{\Phi'(t)}-\overline{\Psi(t)} \tag{5}$$

$$2G(u_z+iu_r)=\varkappa\varphi(t)-2z\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}$$

Предполагая существование производных от $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ на линии раздела и дифференцируя равенство (3) по формуле (4) с учетом того, что $(\overline{\varphi(t)})'=-\overline{\varphi'(t)}$ при $t=ir$, вместо равенства (3) получим

$$(\varkappa_1\Phi_1(t)+\overline{\Psi_1(t)})/G_1=(\varkappa_2\Phi_2(t)+\overline{\Psi_2(t)})/G_2 \tag{6}$$

Преобразуем равенства (2) и (6) к виду

$$(1+\lambda\varkappa_1)\Phi_1(t)-(1-\lambda)\overline{\Psi_1(t)}=(1+\varkappa_2)\Phi_2(t)$$

$$(\varkappa_2-\lambda_1\varkappa_1)\Phi_1(t)-(\varkappa_2+\lambda)\overline{\Psi_1(t)}=(1+\varkappa_2)\Psi_2(t)$$

Переходя теперь во втором из них к сопряженным значениям и выражая затем их через остальные члены, будем иметь

$$(1+\lambda\varkappa_1)\Phi_1(t)=(1-\lambda)\overline{\Psi_1(t)}+(1+\varkappa_2)\Phi_2(t)$$

$$(\varkappa_2+\lambda)\Psi_1(t)=(\varkappa_2-\lambda\varkappa_1)\overline{\Phi_1(t)}+(1+\varkappa_2)\Psi_2(t) \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ аналитически продолжимы в область $z>0$, поскольку функции $\Phi_1(-t)$ и $\Psi_1(-t)$ – обобщенные аналитические при $z>0$, ибо $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ – обобщенные аналитические функции при $z<0$.

Из равенств (7) получаем

$$\Phi_2(t)=\frac{1+\lambda\varkappa_1}{1+\varkappa_2}\Phi_1(t)-\frac{1-\lambda}{1+\varkappa_2}\Psi_1(-t)$$

$$\Psi_2(t)=\frac{\varkappa_2+\lambda}{\varkappa_2+1}\Psi_1(t)+\frac{\lambda\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_2+1}\Phi_1(-t) \tag{8}$$

Учитывая, что $\overline{\Phi(t)}=\Phi(\bar{t})$ при $t=ir$, запишем условия (1) в виде

$$\Phi_k(t)-\overline{\Psi_k(t)}=\Phi_k(t)-\Psi_k(-t)=\sigma_z^{(k)}+i\tau_{zr}^{(k)} \quad (k=1,2) \tag{9}$$

Поскольку $t=z+ir\to-0+ir$ при $z\to-0$, переменная $\zeta=-t\to+0-ir$, то функция $\Psi_k(-t)$ в (8) является граничным значением $\Psi_k(\zeta)$ на границе щели L_+ при $k=1$ и на границе щели L_- при $k=2$ ($\zeta=-t$, $t=\lim(z+ir)=\pm0+ir$ при $z\to\pm0$). Заменив в (9)

t на $-t(t = ir)$ и складывая правые и левые части равенства (9) и равенства, полученного при такой замене, получим

$$\Phi_{1*}^{-}(t) - \Psi_{1*}^{+}(t) = f_{1*}(t), \quad \Phi_{2*}^{+}(t) - \Psi_{2*}^{-}(t) = f_{2*}(t) \quad (t \in L) \tag{10}$$

где

$$\Phi_{k*}(t) = \Phi_k(t) + \Phi_k(-t), \quad \Psi_{k*}(t) = \Psi_k(t) + \Psi_k(-t)$$

$$f_{k*}(t) = f_k(t) + f_k(-t) \quad (k = 1, 2)$$

Используя теперь равенства (8) и производя с ними аналогичную операцию, а затем подставляя полученные выражения для $\Phi_{2*}(t)$ и $\Psi_{2*}(t)$ в условия (10), получим

$$\Phi_*^{-}(t) - \Psi_*^{+}(t) = f_{1*}(t) \tag{11}$$

$$\Phi_*^{+}(t) - (1+\beta)\Psi_*^{-}(t) + \alpha\Phi_*^{-}(t) - \delta\Psi_*^{+}(t) = f_{2*}(t) \quad (t \in L)$$

$$\Phi_*(t) = \Phi_{1*}(t), \quad \Psi_*(t) = \Psi_{1*}(t)$$

$$\alpha = \frac{\varkappa_2 - \lambda\varkappa_1}{1 + \lambda\varkappa_1}, \quad \delta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda\varkappa_1}; \quad \beta = \alpha - \delta$$

Умножая правую и левую части первого из равенств (11) на $1 + \alpha$, а затем вычитая из правой и левой частей полученного равенства правую и левую части второго равенства (11), будем иметь

$$[\Phi_*(t) + (1+\beta)\Psi_*(t)]^{+} - [\Phi_*(t) + (1+\beta)\Psi_*(t)]^{-} =$$

$$= f_{2*}(t) - (1+\alpha)f_{1*}(t) = F(t) \tag{12}$$

Таким образом, для функции $\Omega(t) = \Phi_*(t) + (1+\beta)\Psi_*(t)$ получаем задачу сопряжения, которая имеет простое решение [5]

$$\Phi_*(\zeta) + (1+\beta)\Psi_*(\zeta) = F_1(\zeta) + A \tag{13}$$

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\tau)\omega(\zeta,\tau)}{\zeta - \tau}d\tau \quad (\zeta \in L)$$

где $A = 0$ при условии, что $\Phi_*(\zeta) = \Psi_*(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \to \infty$. Последнее справедливо при условии, что напряжения на бесконечности равны нулю [1], $W(\zeta, \tau)$ – обобщенное ядро Коши [1], которое может быть записано в виде

$$W(\zeta,\tau) = \omega(\zeta,\tau)/(\zeta - \tau)$$

$$\omega(\zeta,\tau) = \begin{cases} \left|\dfrac{\tau - \bar{\tau}}{\tau - \bar{\zeta}}\right| B(k) & (\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\zeta \operatorname{Im}\tau) > 0) \\ \left|\dfrac{\tau - \bar{\tau}}{\tau - \zeta}\right| D(k_0) & (\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\zeta \operatorname{Im}\tau) < 0) \end{cases}$$

$$B(k) = K(k) - D(k), \quad D(k) = (K(k) - E(k))/k^2$$

$$k = \sqrt{|\zeta - \bar{\zeta}||\tau - \bar{\tau}|}/|\tau - \bar{\zeta}|, \quad k_0 = \sqrt{|\zeta - \bar{\zeta}||\tau - \bar{\tau}|}/|\tau - \zeta|$$

На линии $z = 0$ имеем

$$k = 2\sqrt{rx}/(r + x), \quad k_0 = 2\sqrt{rx}/(r - x) \quad (t = z + ir, \quad \tau = y + ix)$$

Подставляя $\Psi_*(\zeta)$ из (13) в первое равенство (11), получим

$$\gamma\Phi_*^{+}(t) + \Phi_*^{-}(t) = F_*(t); \quad \gamma = 1/(1+\beta), \quad F_*(t) = f_{1*}(t) + \gamma F_1^{+}(t) \tag{14}$$

где $F^{+}(t)$ – предельное значение $F(t)$ на L_+ – верхней границе щелей.

Как известно [1], функция, являющаяся ОАФ всюду в плоскости, кроме линии L, может быть представлена в виде интеграла типа Коши

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{\omega(\zeta,\tau)}{\zeta-\tau}d\tau \tag{15}$$

и по формуле Сохоцкого – Племеля для граничных значений $\Phi^-(t)$, $\Phi^+(t)$ из формулы (15) имеем

$$\Phi^{\pm}(\zeta)=\pm\varphi(\zeta)/2+\Phi(\zeta) \tag{16}$$

Подставляя выражения для $\Phi_*^+(t)$ и $\Phi_*^-(t)$ в условие (14), получаем сингулярное уравнение для функции $\varphi_*(t)$

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\varphi_*(t)+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_*(\tau)d\tau}{t-\tau}+\int_L K(t,\tau)\varphi_*(\tau)d\tau=F_*(t) \tag{17}$$

Здесь

$$K(t,\tau)=k_*(t,\tau)/\left|\tau-\bar{t}\right|^{\alpha} \tag{18}$$

Функция $k_*(t,\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ ($\alpha<1$) по обеим переменным [1].

Характеристическое уравнение для уравнения (17) согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [2] имеет в рассматриваемом здесь случае следующее решение, исчезающее на бесконечности:

$$X(t)=\prod_{k=1(0)}^{2n}((t-ia_k)(t-ib_k))^{-1/2}\left(\frac{t-ia_k}{t-ib_k}\right)^{\varepsilon i}(t^2+b_0^2)^{-1/2} \tag{19}$$

при наличии круговой щели ($a_0=0$). При отсутствии круговой щели последний множитель в (19) заменяется на единицу. Индекс характеристического уравнения p равен $2n+1$ при наличии щели и $2n+2$ при ее отсутствии, $\varepsilon=\ln p/(2\pi)$.

Под выражениями типа (19) следует понимать ветви, голоморфные на разрезанной вдоль дуг L плоскости $t=z+ir$ и фиксированные, например, на L_-.

Обозначим через K^* оператор [1]

$$K^*F=A^*(t_0)F(t_0)-B^*(t_0)\frac{Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{F(t)dt}{Z(t)(t-t_0)}$$

$$A^*(t_0)=\frac{1-\gamma}{2\gamma},\quad B^*(t_0)=-\frac{1+\gamma}{2\gamma}$$

$$Z(t_0)=\gamma X^+(t_0),\quad X^+(t_0)=\left(-\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2}X(t_0)$$

Согласно теории сингулярных интегральных уравнений [6] уравнение (17) (при условии (18)) эквивалентно уравнению Фредгольма

$$\begin{aligned}&\varphi_*(t_0)+K^*K\varphi_*(t_0)=f^*(t_0)\quad(t_0\in L)\\&f^*(t_0)=K^*F_*(t_0)+Q_{p-1}(t_0)B^*(t_0)Z(t_0)\end{aligned} \tag{20}$$

причем $Q_{p-1}(t_0)$ – произвольный полином степени не выше $(p-1)$. Для нахождения неизвестных коэффициентов полинома $Q_{p-1}(t)$ следует использовать условия однозначности перемещений. Эти условия заключаются в том, что выражение $Y(t)$, определяе-

мое формулой

$$Y(t) = \varkappa_k \Phi_{k*}(t) - t\overline{\Phi'_{k*}(t)} - \overline{\Psi_{k*}(t)} / (2G_k)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z < 0 \\ 2 & \text{при} \quad z > 0 \end{cases}$$

должно возвращаться к своему первоначальному значению, когда точка t описывает замкнутые контуры Λ_k, охватывающие отрезки $L_k = a_k b_k$.

Стягивая контуры Λ_k к отрезкам, видим, что условия однозначности сводятся к равенствам

$$\int_{L_k} (\varkappa_1 \Phi^-_{1*}(\tau) + \Psi^+_{1*}(\tau)) G_1^{-1} d\tau + \int_{L_k} (\varkappa_2 \Phi^+_{2*}(\tau) + \Psi^-_{2*}(\tau)) G_2^{-1} d\tau = 0 \tag{21}$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

где $\Phi^+_{2*}(\tau)$ и $\Psi^-_{2*}(\tau)$ определяются по формулам, следующим из формул (7):

$$\Phi_{2*}(\tau) = \frac{1 + \lambda\varkappa_1}{1 + \varkappa_2} \Phi^+_{1*}(\tau) - \frac{1 - \lambda}{1 + \varkappa_2} \Psi^-_{1*}(\tau)$$

$$\Psi_{2*}(\tau) = \frac{\varkappa_2 + \lambda}{1 + \varkappa_2} \Psi^+_{1*}(\tau) + \frac{\lambda\varkappa_1 - \varkappa_2}{1 + \varkappa_2} \Phi^-_{1*}(\tau) \tag{22}$$

В формулах (21) достаточно учитывать контуры L_k, лежащие в правой половине комплексной плоскости $r > 0$, поскольку коэффициенты полинома $Q_{p-1}(\tau)$ действительны.

При наличии круговой щели учитывается и ее контур L_0.

Принимая во внимание формулы (11) и формулы Сохоцкого – Племеля для функций $\Phi_{1*}(\tau)$, $\Psi_{1*}(\tau)$ и подставляя выражения для $\Phi^+_{2*}(\tau)$, $\Psi^-_{2*}(\tau)$ из (22) в условия (21), получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов полинома.

Эта система всегда разрешима.

В самом деле, однородная система, получаемая в случае $f^*(t_0) = 0$, не может иметь решения, кроме $C_0 = C_1 = \ldots = C_{2n} = 0$ ($C_0 = C_1 = \ldots = C_{2n+1} = 0$), ибо исходная задача имеет лишь тривиальное решение $\Phi_*(\tau) = \Psi_*(\tau) = 0$, а, значит, как следует из формул Сохоцкого – Племеля (16), $\varphi_*(\tau) = 0$, что и доказывает утверждение (C_k – коэффициенты полинома $Q_{p-1}(\tau)$ ($k = 0, 1, \ldots, 2n(2n + 1)$).

Совершенно аналогичным образом решается антисимметричная задача для функций $\Phi_{k**}(\tau) = \Phi_k(\tau) - \Phi_k(-\tau)$, $\Psi_{k**}(\tau) = \Psi_k(\tau) - \Psi_k(-\tau)$. Для определения перемещений и напряжений необходимо найти еще $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ путем интегрирования.

Поскольку предполагается, что перемещения на бесконечности исчезают, то можно взять $t_0 = -\infty + ir_0$ при $k = 1$ и $t_0 = +\infty + ir_0$ при $k = 2$. Тогда из определения интегрирования ОАФ [1] получим

$$\varphi_k(t) = \int_{t_0}^{t=z+i\eta_0} \Phi_k(\tau) dz, \quad \psi_k(t) = \int_{t_0}^{t=z+i\eta_0} \Psi_k(\tau) dz, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z < 0 \\ 2 & \text{при} \quad z > 0 \end{cases}$$

Видно, что условия исчезновения перемещений на бесконечности удовлетворяются. После того как перемещения u_z, u_r вычислены по последней из формул (5), напряжения находятся по первым трем формулам (5).

В случае, когда имеется только одна круговая щель, решение задачи может быть

получено в замкнутом виде непосредственно из задачи сопряжения (12). В плоскости с отверстием, пересекающим ось z и симметричным относительно нее (в рассматриваемом случае границей отверстия служат L_+ и L_- – соответственно верхний и нижний берега щели), обобщенная аналитическая функция $\Phi_*(t)$ вне отверстия и исчезающая на бесконечности, может быть представлена в виде [1]

$$\Phi_*(t) = S(\varphi_0(\zeta)) = -\frac{2}{\pi|t-\bar{t}|}\int_{\bar{t}}^{t}\varphi_0(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta-\bar{t}}{\zeta-t}}d\zeta \tag{23}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ – функция, голоморфная всюду в плоскости, исключая L, будем считать также, что линия разветвления радикала совпадает с нижней границей, а линия интегрирования проходит ниже L_- либо выше L_+. Тогда величина интеграла в (23) не зависит от пути интегрирования при условии $\lim \zeta\varphi_0(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \to \infty$, что выполняется при условии $\lim\Phi_*(t) = 0$ при $|t| \to \infty$ [1]. Интегрируя в (23) соответственно по верхнему и нижнему берегам щели, получим

$$\Phi^{\pm}(t) = -\frac{2}{\pi|t-\bar{t}|}\int_{\bar{t}}^{t}\varphi_0^{\pm}(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta-\bar{t}}{\zeta-t}}d\zeta = S(\varphi_0^{\pm}(\zeta))$$

Аналогично предыдущему имеем

$$\Psi^{\pm}(t) = S(\psi_0^{\pm}(\zeta))$$

или, как следует из (13),

$$-\frac{2}{\pi|t-\bar{t}|}\int_{\bar{t}}^{t}(\gamma\varphi_0^{+}(\zeta)+\psi_0^{-}(\zeta))\sqrt{\frac{\zeta-\bar{t}}{\zeta-t}}d\xi = F_*(t) \quad (t \in L) \tag{24}$$

Применяя оператор S^{-1}, обратный к S [1] на линии $z = 0$ к обеим сторонам равенства (24), получим задачу сопряжения для голоморфной функции $\varphi_0(\zeta)$

$$\gamma\varphi_0^{+}(\zeta)+\varphi_0^{-}(\zeta) = S^{-1}(F_*(t)) = f(\zeta) \quad (\zeta \in L) \tag{25}$$

В предположении, что $f(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $|\zeta| \leqslant b_0$, и что $\lim\zeta\varphi_0(\zeta) = \lim\zeta\psi_0(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \to \infty$, решение задачи (25) запишем следующим образом [5]:

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{(1+\beta)X(\zeta)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\sigma)d\sigma}{X(\sigma)(\sigma-\zeta)} + X(\zeta)P_1(\zeta) \tag{26}$$

где под $X(t)$ понимаются значения, принимаемые функцией

$$X(t) = (t-b_0)^{-1/2-i\lambda}(t+b_0)^{-1/2+i\lambda}$$

на верхней границе L_+, $\lambda = -\ln(1+\beta)/(2\pi)$, $P_1(\zeta) = C_1\zeta + C_2$, C_1, C_2 – неизвестные постоянные.

Поскольку $\lim\zeta\varphi_0(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \to \infty$, то $C_1 = C_2 = 0$.

Применяя теперь к обеим частям равенства (26) оператор S, получаем

$$\Phi_*(t) = S\left(\frac{(1+\beta)X(\zeta)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\sigma)d\sigma}{X(\sigma)(\sigma-\zeta)}\right) = -\frac{2}{\pi|t-\bar{t}|}\int_L\varphi_0(\zeta)\sqrt{\frac{\zeta-\bar{t}}{\zeta-t}}d\zeta. \tag{27}$$

Функция $\Psi_*(t)$ находится из равенства (13), если использовать соотношение (27). Функции $\Phi_{**}(t)$ и $\Psi_{**}(t)$ находятся аналогично.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (N2J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука,1978. 462 с.
2. *Капшивый А.А., Копыстыра Н.П.* Осесимметричные задачи для упругого пространства с системой соосных круговых разрезов // Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 10. С. 113–119.
3. *Капшивый А.А., Маслюк Г.Ф.* О решении первой основной задачи осесимметричной теории упругости для пространства с плоскими трещинами методом *p*-аналитических функций // Вычислительная и прикладная математика. Киев, Изд-во Киев. ун-та, 1969. Вып. 8. С. 65–79.
4. *Положий Г.Н.* Об одной задаче теории осесимметричного потенциала и о системе кругового и кольцевого штампов // Прикл. механика. 1967. Т. 3. Вып. 12. С. 16–27.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

Подольск

Поступила в редакцию
26.1.1995