ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 60, Вып.2, 1996

УДК 531.38:62-50

© 1996 г. А.М. Формальский

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ ПОВОРОТОМ ПЛОСКОГО ДВУЗВЕННИКА

Рассматривается задача о быстрейшем перемещении (повороте) плоского двузвенного механизма с грузом на конце из заданной начальной в заданную конечную конфигурацию. Управляющие моменты в неподвижном и межзвенном шарнирах ограничены по модулю. Показано, что оптимальными являются движения, при которых звенья остаются сложенными в течение всего времени. Для случая, когда в краевых конфигурациях звенья не совмещены, численно построено удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина управление, при котором второе звено в процессе поворота двузвенника колеблется около первого, не будучи совмещенным с ним ни на каком промежутке времени.

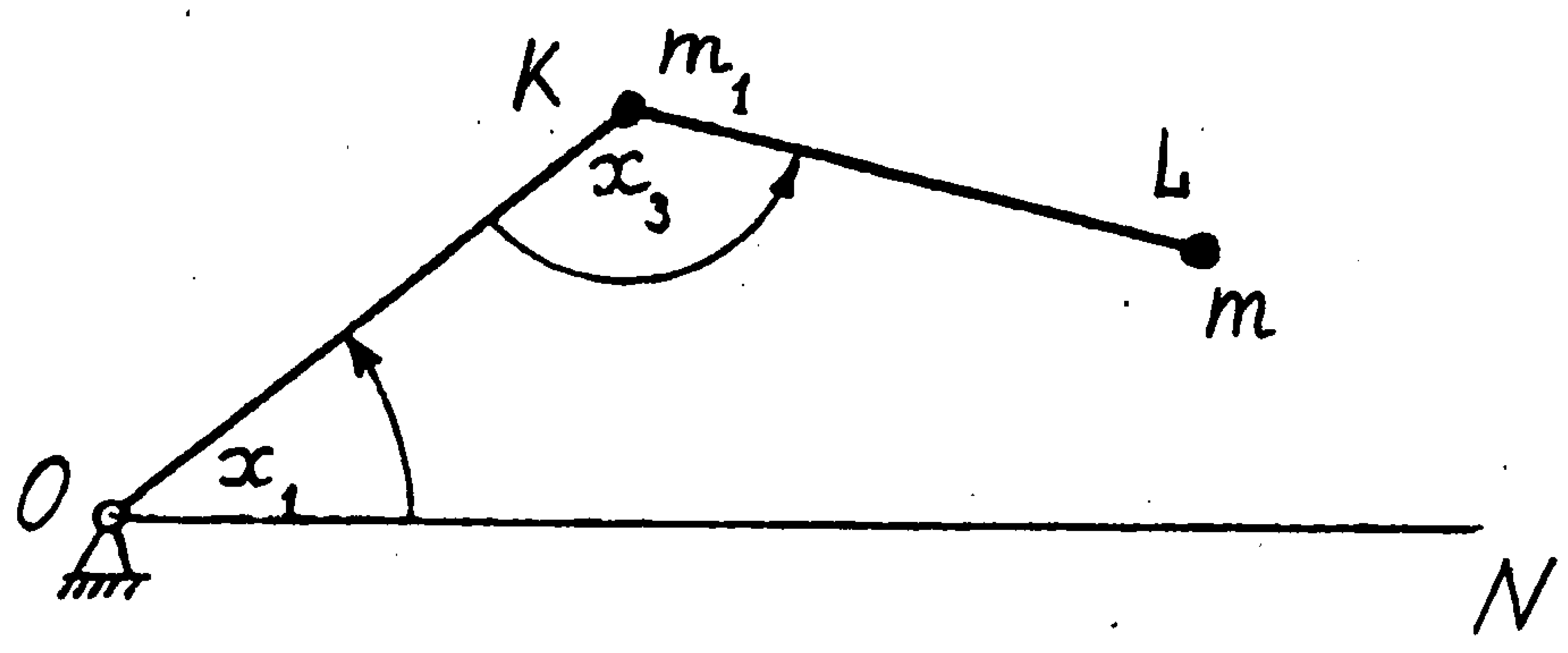
Момент инерции плоского двузвенного механизма с двумя степенями свободы относительно его неподвижной оси минимален, когда звенья сложены. Поэтому напрашивается утверждение о том, что существуют оптимальные по быстродействию движения двузвенника, при которых на целом промежутке времени звенья вращаются, оставаясь сложенными (совмещенными). Ниже показано, что такие оптимальные движения действительно существуют. Подобные движения возможны, если в заданных краевых конфигурациях звенья также совмещены. Для случая, когда в краевых конфигурациях звенья не совмещены, было построено [1] движение, состоящее из трех участков. На первом участке второе звено вращается до совмещения с первым, на втором участке звенья вращаются, будучи сложенными, на третьем – второе звено "отворачивается" от первого на заданный угол; при этом на первом и третьем участках межзвенный управляющий момент имеет конечное число переключений. Утверждалось [1], что такое движение и соответствующее управление оптимально.

Ниже для некоторых случаев, когда в краевых конфигурациях звенья не совмещены, численно построено управление и соответствующее движение, при котором второе звено в процессе поворота двузвенника колеблется около первого, не будучи совмещенным с ним ни на каком промежутке времени. Построенное движение происходит за меньшее время, нежели рассмотренное ранее [1], при котором имеет место особый режим движения со сложенными звеньями, а на первом и третьем участках межзвенный момент переключается один раз. Численные исследования показывают, что построенное движение удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Это дает основания полагать, что оно оптимально. Если в краевых конфигурациях звенья не совмещены, то особый режим в оптимальном движении двузвенника может существовать по-видимому, как в [2, 3], лишь в "окружении", так называемых [4, 5] режимов "дребезжания" (chattering) управления, содержащих бесконечное число переключений управляющего межзвенного момента.

При управлении, рассматриваемом в [1], затраты времени на перемещение двузвенника незначительно превышают затраты времени при построенном здесь, по-видимому оптимальном, управлении. Подобная ситуация имеет место также и для систем, рассматриваемых в [6, 7]. Построение оптимального управления, однако, представляется интересным, хотя бы для получения такой оценки.

Задача об управлении системами с переменной инерционной характеристикой, но для других механических объектов рассматривалась в [2, 3, 6–9].

1. Уравнения движения. Рассмотрим движущийся в горизонтальной плоскости двузвенный механизм OKL с грузом m на конце (фиг. 1), обладающий двумя степенями



Фиг. 1

свободы. Угол x_1 характеризует отклонение звена OK от какого-то неподвижного направления ON, x_3 – угол между звеньями OK и KL. Звенья считаются абсолютно твердыми телами. Пусть l_1 и J_1 – соответственно длина звена OK и его момент инерции относительно точки O; m_1 – сосредоточенная масса в шарнире K; l_2, m_2, J_2 и r – соответственно длина звена KL, его масса, его момент инерции относительно точки K и расстояние от точки K до его центра масс. Введем необходимые для дальнейшего безразмерные параметры механизма

$$A = \frac{J_1}{ml_1^2} + 1 + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m}, \quad B = \frac{J_2}{ml_1^2} + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2, \quad C = \frac{l_2}{l_1} + \frac{m_2 r}{ml_1} \tag{1.1}$$

В шарнирах O и K действуют моменты M_1 и M_2, ограниченные по абсолютной величине

$$|M_1| \leqslant M_{10}, \quad |M_2| \leqslant M_{20} \tag{1.2}$$

Вводя безразмерное время τ и моменты μ_1, μ_2 по формулам

$$t = T\tau \left(T^2 = \frac{ml_1^2}{M_{10}}\right), \quad \mu_1 = \frac{M_1}{M_{10}}, \quad \mu_2 = \frac{M_2}{M_{10}} \tag{1.3}$$

можно выписать уравнения движения двузвенника в форме Коши в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \frac{x_2 - \beta x_4}{\delta}, \quad \dot{x}_2 = \mu_1, \quad \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\delta}{\alpha}\mu_2 - \frac{\beta}{\alpha}\mu_1 + \frac{C\sin x_3}{\alpha\delta}(x_2^2 + \beta\gamma x_4^2) \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$(\alpha = AB - C^2\cos^2 x_3, \quad \beta = B - C\cos x_3, \quad \gamma = A - C\cos x_3, \quad \delta = \beta + \gamma).$$

Точками здесь обозначено дифференцирование по безразмерному времени, x_2 – безразмерный момент количества движения системы относительно точки O

$$x_2 = (A + B - 2C\cos x_3)\dot{x}_1 + (B - C\cos x_3)\dot{x}_3$$

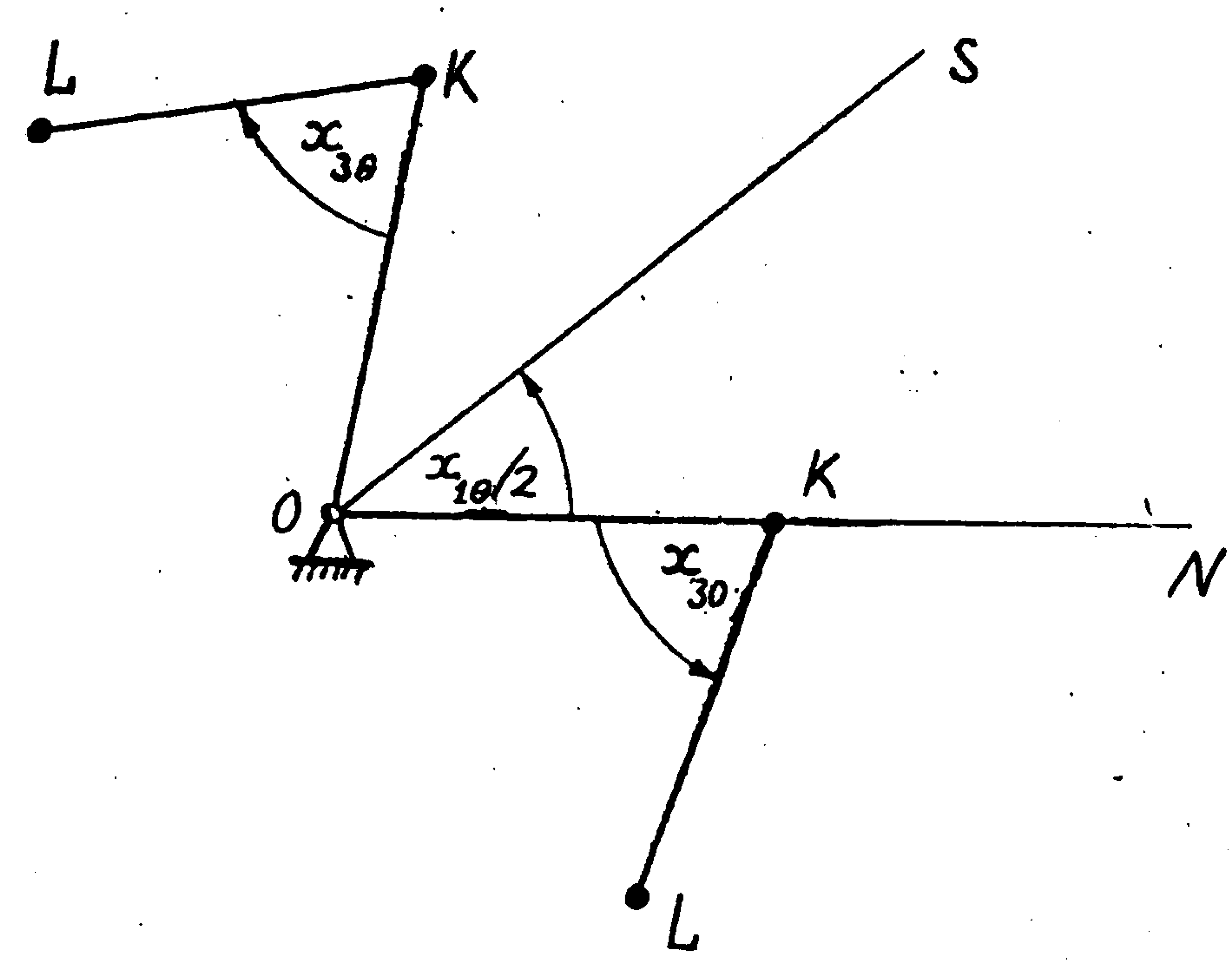
В уравнениях (1.4) α и δ – безразмерные определитель матрицы кинетической энергии двузвенника и его момент инерции относительно точки O. Угол x_1 является циклической координатой.

Соотношения (1.2) при учете обозначений (1.3) приобретают вид

$$|\mu_1| \leqslant 1, \quad |\mu_2| \leqslant \mu_{20} \quad (\mu_{20} = M_{20} / M_{10}) \tag{1.5}$$

2. Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени система покоится в заданном положении

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = x_{30}, \quad x_4(0) = 0 \tag{2.1}$$



Фиг. 2

Пусть задано также конечное желаемое состояние системы

$$x_1(\theta)=x_{1\theta},\quad x_2(\theta)=0,\quad x_3(\theta)=x_{3\theta},\quad x_4(\theta)=0 \tag{2.2}$$

Поставим задачу отыскания управляющих моментов $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, обеспечивающих перевод двузвенника из начального состояния (2.1) в конечное (2.2) за минимальное время θ.

Будем считать, что

$$x_{3\theta}=-x_{30},\quad x_{30}\geqslant 0 \tag{2.3}$$

т.е. начальная (2.1) и конечная (2.2) конфигурации двузвенника симметричны одна другой относительно прямой OS, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $x_1=x_{1\theta}/2$ (фиг. 2).

Задачи оптимального управления двузвенником изучаются во многих исследованиях. Обзор ряда из них содержится в [10].

Функция Понтрягина [11] для поставленной задачи имеет вид

$$H=\psi_1\frac{x_2-\beta x_4}{\delta}+\psi_2\mu_1+\psi_3x_4+\psi_4\left[\frac{\delta}{\alpha}\mu_2-\frac{\beta}{\alpha}\mu_1+\frac{C\sin x_3}{\alpha\delta}(x_2^2+\beta\gamma x_4^2)\right] \tag{2.4}$$

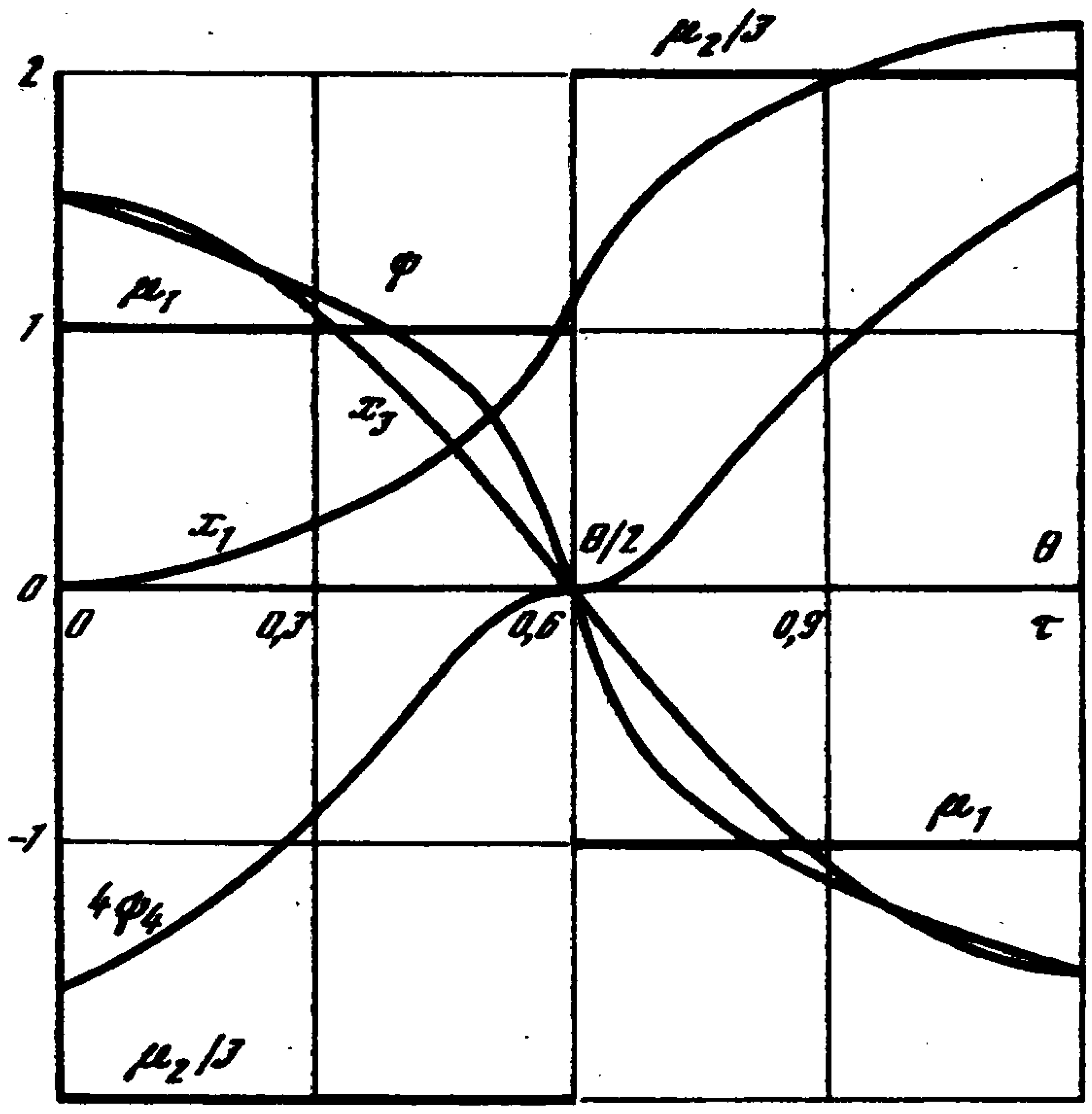
Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&\dot\psi_1=0,\quad \dot\psi_2=-\frac{\psi_1}{\delta}-2C\psi_4x_2\frac{\sin x_3}{\alpha\delta}\\
&\dot\psi_3=-\psi_1x_2\frac{d(1/\delta)}{dx_3}+\psi_1x_4\frac{d(\beta/\delta)}{dx_3}-\psi_4\mu_2\frac{d(\delta/\alpha)}{dx_3}+\\
&+\psi_4\mu_1\frac{d(\beta/\alpha)}{dx_3}-C\psi_4x_2^2\frac{d}{dx_3}\left(\frac{\sin x_3}{\alpha\delta}\right)-C\psi_4x_4^2\frac{d}{dx_3}\left(\frac{\beta\gamma\sin x_3}{\alpha\delta}\right)\\
&\dot\psi_4=\psi_1\frac{\beta}{\delta}-\psi_3-2C\psi_4x_4\frac{\beta\gamma\sin x_3}{\alpha\delta}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

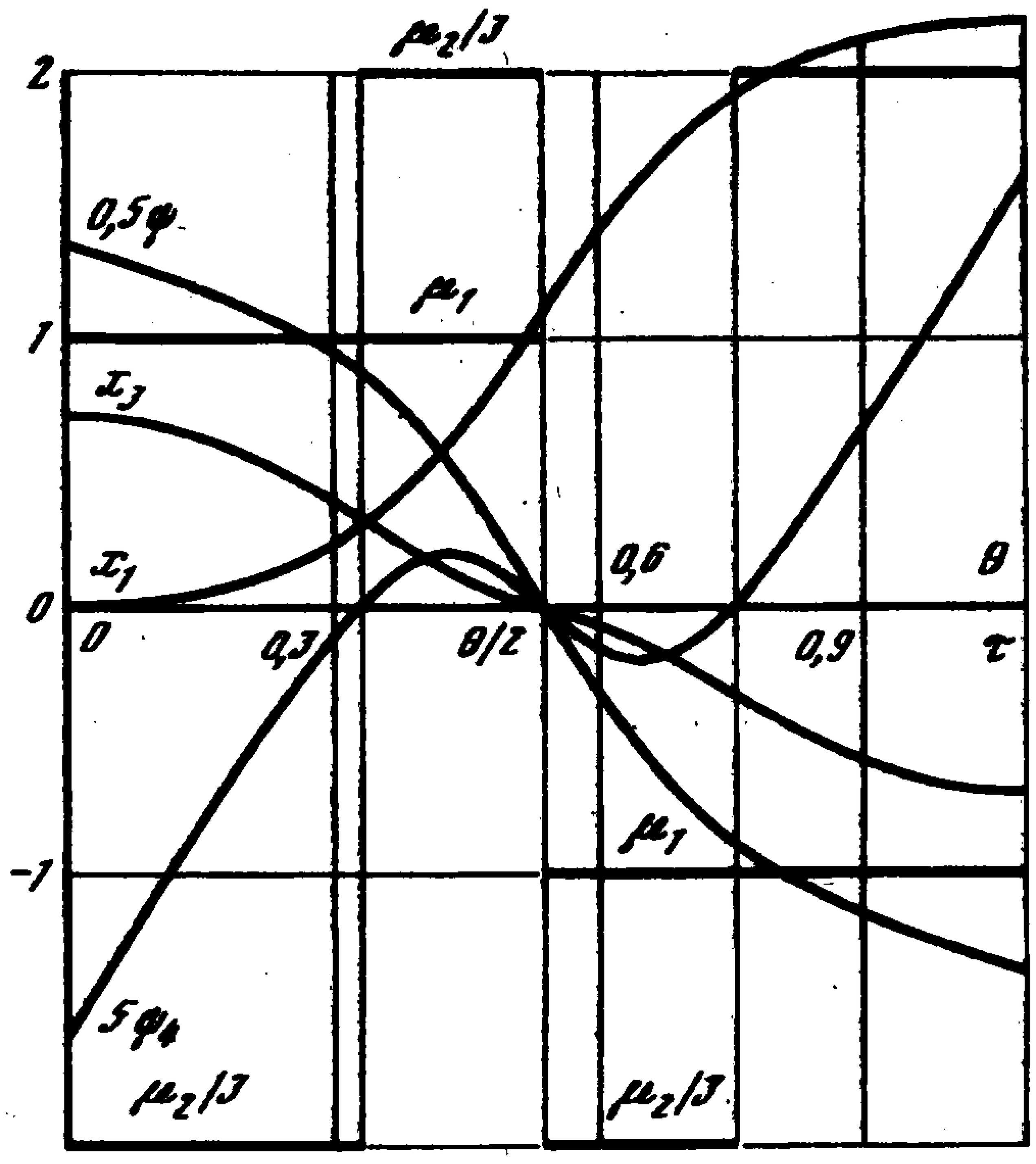
Из принципа максимума следует, что оптимальное управление должно удовлетворять условиям

$$\mu_1(\tau)=\operatorname{sign}\psi(\tau),\quad \mu_2(\tau)=\mu_{20}\operatorname{sign}\psi_4(\tau) \tag{2.6}$$

$$(\psi(\tau)=\psi_2(\tau)-\psi_4(\tau)\beta(\tau)/\alpha(\tau))$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Из первого уравнения (2.5) следует, что $\psi_1(\tau) \equiv \text{const}$. Можно считать, что $\psi_1 = 1$, 0 или –1.

3. Симметрия уравнений. Если $x_i(\tau)$, $\psi_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – решение на каком-то отрезке $[0, \theta]$ системы (1.4), (2.5) при каких-то управляющих функциях $\mu_k(\tau)$ ($k = 1, 2$), то $(-1)^i x_i(\theta-\tau)$, $(-1)^{i+1}\psi_i(\theta-\tau)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) – также решение этой системы на том же отрезке при управляющих функциях $-\mu_k(\theta-\tau)$ ($k = 1, 2$).

Имея в виду условие (2.3), будем в дальнейшем искать решение поставленной задачи быстродействия, обладающее свойством симметрии

$$\begin{gathered} x_1(\tau) = x_{1\theta} - x_1(\theta-\tau), \quad x_j(\tau) = (-1)^j x_j(\theta-\tau) \quad (j = 2, 3, 4) \\ \mu_k(\tau) = -\mu_k(\theta-\tau) \quad (k = 1, 2) \\ \psi_i(\tau) = (-1)^{i+1}\psi_i(\theta-\tau) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Свойство симметрии (3.1) облегчает решение задачи. При условиях (2.1)–(2.3) можно строить решение системы (1.4), (2.5), (2.6) лишь на отрезке $[0, \theta/2]$ и затем с помощью соотношений (3.1) продлевать его на отрезок $[\theta/2, \theta]$. Из равенств (3.1) вытекают следующие условия, накладываемые на функции $x_i(\tau)$, $\psi_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) в момент $\tau = \theta/2$, которые помогают решить краевую задачу на отрезке $[0, \theta/2]$:

$$x_1(\theta/2) = x_{1\theta}/2, \quad x_3(\theta/2) = 0, \quad \psi_2(\theta/2) = \psi_4(\theta/2) = 0 \tag{3.2}$$

Благодаря последним двум условиям (3.2), при численных исследованиях легко проверить, удовлетворяют ли управления $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, построенные из каких-то соображений, принципу максимума или нет. Дело в том, что постоянную ψ_1 можно определить, исходя из физических соображений, и тогда подобная проверка сводится к перебору лишь одной величины $\psi_3(\theta/2)$.

Заметим, что свойством симметрии (обратимости) типа (3.1) обладает в отсутствие сил диссипации ряд механических систем [12, 13].

4. Численные исследования. При численных исследованиях рассматривается двузвенник с равными по длине безмассовыми звеньями

$$l_1 = l_2, \quad J_1 = J_2 = m_2 = 0 \tag{4.1}$$

При этом, как следует из (1.1), $A = 1 + m_1/m$, $B = C = 1$. Отношение массы груза m к массе m_1, сосредоточенной в шарнире K, считается равным 10, величина $\mu_{20} = 6$.

Прежде всего, строим численно решение краевой задачи (1.4), (2.5), (2.6) при условиях

$$x_{1\theta} = 2{,}20003, \quad x_{30} = 1{,}49929 \tag{4.2}$$

Соотношение между величинами (4.2) таково, что функции $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$ являются управлениями типа "разгон – торможение", т.е. каждая имеет на отрезке $[0, \theta]$ ровно два интервала постоянства и единственное переключение при $\tau = \theta/2$ ($\theta = 1{,}19826$):

$$\mu_1(\tau) = 1 \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \theta/2, \ \mu_1(\tau) = -1 \text{ при } \theta/2 < \tau \leqslant \theta \tag{4.3}$$

$$\mu_2(\tau) = -1 \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \theta/2, \ \mu_2(\tau) = 1 \text{ при } \theta/2 < \tau \leqslant \theta \tag{4.4}$$

На фиг. 3 показаны переменные $x_1(\tau)$, $x_3(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\psi_4(\tau)$, $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, отвечающие построенному решению. При этом решении $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = \dot{\psi}_4(\theta/2) = 0$. Существует множество значений $x_{1\theta}$, x_{30}, при которых управления имеют вид (4.3), (4.4).

Пусть теперь $x_{1\theta} = 2{,}20003$, как в (4.2), а $x_{30} < 1{,}49929$. При этом "лимитирующим" время является движение по координате x_1. На фиг. 4 показаны переменные $x_1(\tau)$, $x_3(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\psi_4(\tau)$, $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, отвечающие решению краевой задачи (1.4), (2.5), (2.6) при условии $x_{30} = 0{,}7$ ($\theta = 1{,}08182$, $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0{,}528$). Так же как при условиях (4.2), угол x_1 со временем возрастает, а угол x_3 убывает строго монотонно. Управление $\mu_1(\tau)$ по-прежнему переключается только один раз в середине $\tau = \theta/2$ интервала движения, т.е. имеет вид (4.3). Управление же $\mu_2(\tau)$, в отличие от (4.4), имеет четыре интервала постоянства ($\tau_1 = 0{,}32806$):

$$\mu_2(\tau) = -1 \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, \ \mu_2(\tau) = 1 \text{ при } \tau_1 < \tau \leqslant \theta/2 \tag{4.5}$$
$$\mu_2(\tau) = -1 \text{ при } \theta/2 < \tau \leqslant \theta - \tau_1, \ \mu_2(\tau) = 1 \text{ при } \theta - \tau_1 < \tau \leqslant \theta$$

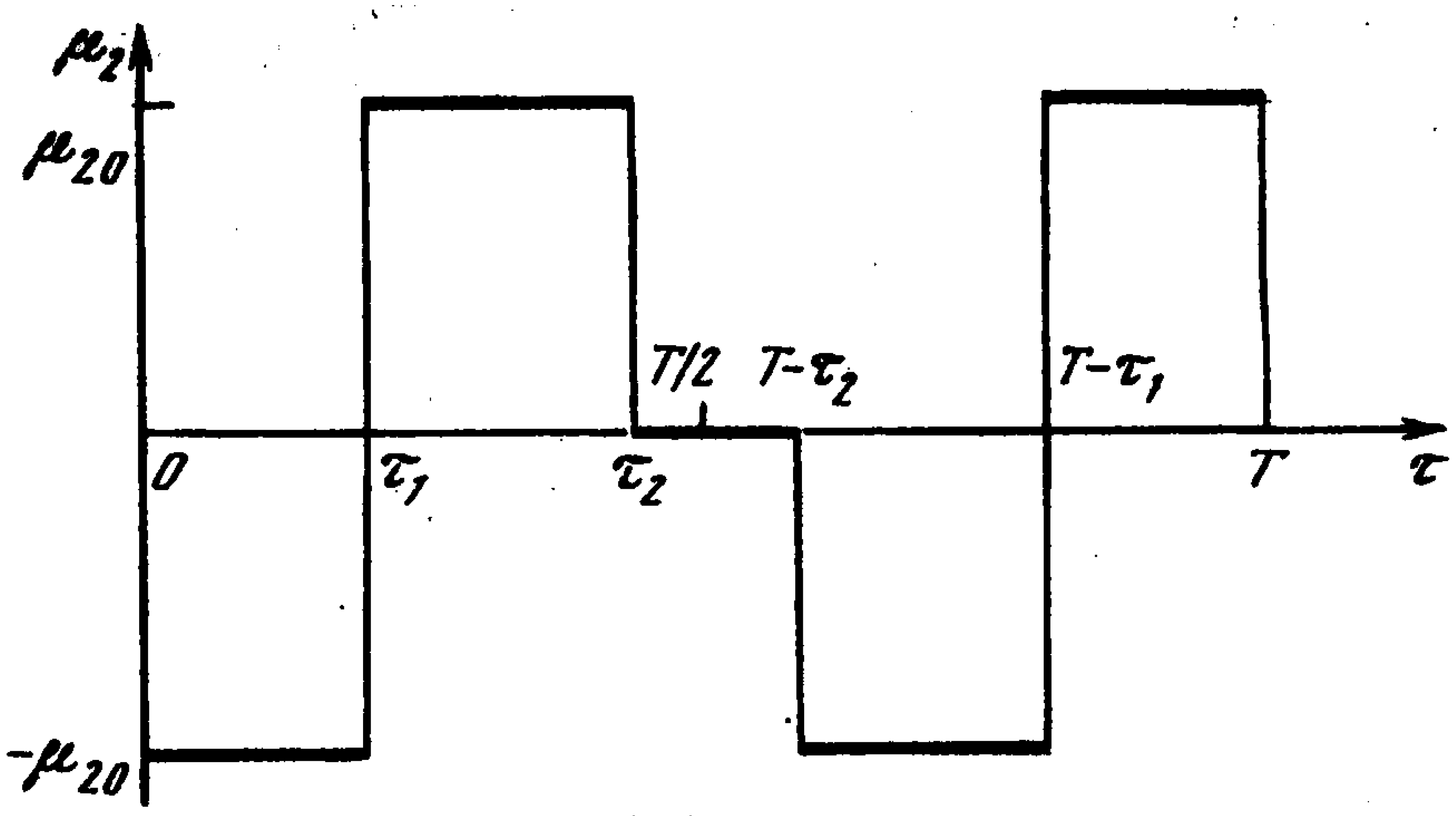
Задача численного построения управления (4.5) состоит в отыскании момента переключения τ_1, при котором в некоторый момент времени выполняются равенства $x_1 = x_{1\theta}/2$, $x_3 = 0$ (см. первые два условия (3.2)). Этот момент времени считается равным $\theta/2$ ($\mu_1(\tau) \equiv 1$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \theta/2$). Затем отыскивается значение $\psi_3(\theta/2)$ (см. последние два условия (3.2)), при котором найденное управление $\mu_2(\tau)$, а также $\mu_1(\tau)$ удовлетворяет условиям (2.6).

При условиях (4.2) и $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0$ график функции $\psi_4(\tau)$ единственный раз при $\tau = \theta/2$ пересекает ось абсцисс (см. фиг. 3) и при этом касается ее, поскольку $\dot{\psi}_4(\theta/2) = \psi_3(\theta/2) = 0$. Подобное поведение функции $\psi_4(\tau)$ "подсказывает", что при $x_{30} < 1{,}49929$ управление (4.4) видоизменяется, "приобретая" новые точки переключения и интервалы постоянства. На фиг. 4 график функции $\psi_4(\tau)$ уже совершает "около" момента $\tau = \theta/2$ колебания, которые и "приводят" к появлению этих новых точек переключения τ_1 и $\theta - \tau_1$ (см. управление (4.5)). При этом по обе стороны от точки $\tau = \theta/2$ появляются дополнительные интервалы $(\tau_1, \theta/2)$, $(\theta/2, \theta - \tau_1)$ постоянства управления $\mu_2(\tau)$.

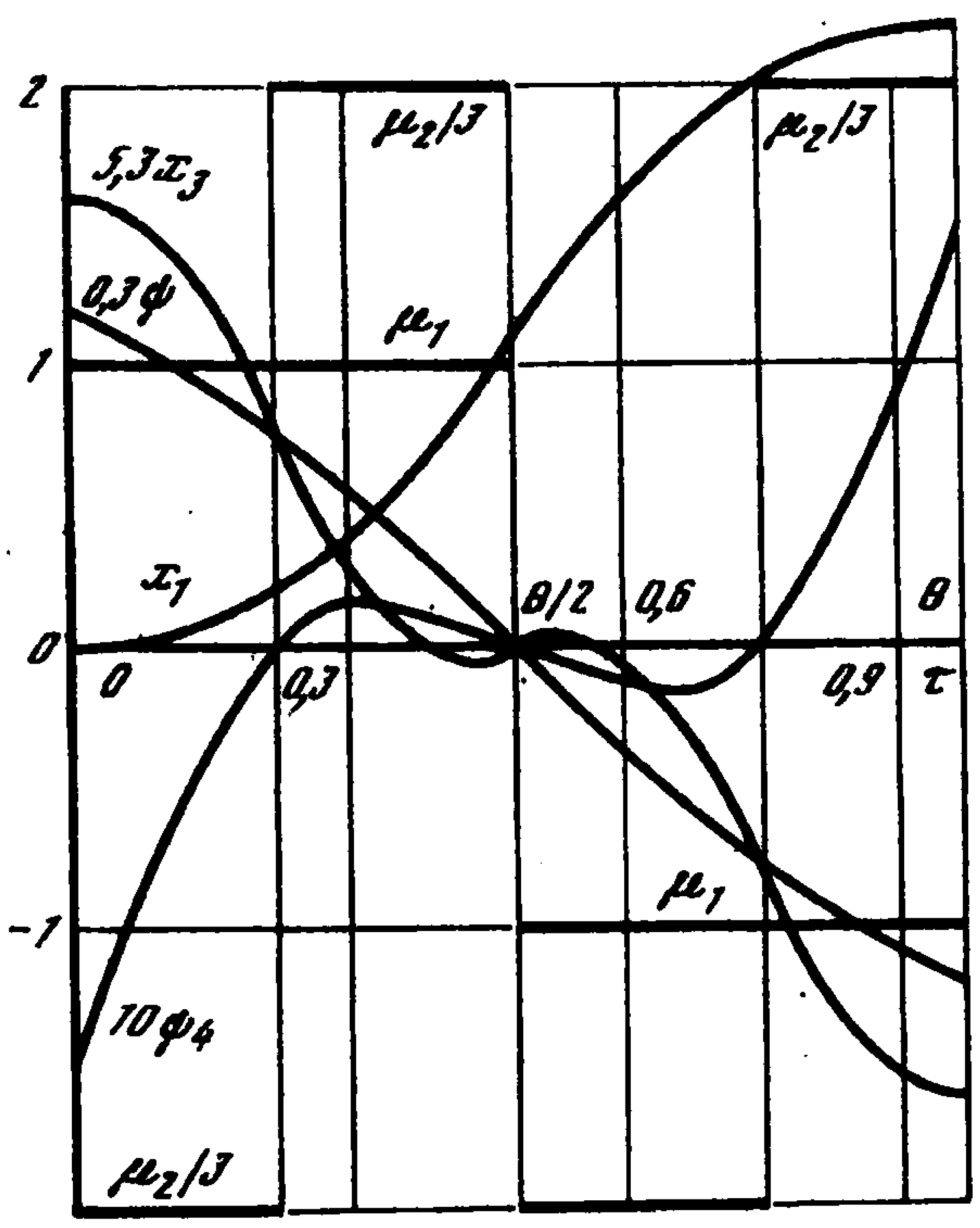
При

$$x_{1\theta} = 2{,}20003, \quad x_{30} = 0{,}3 \tag{4.6}$$

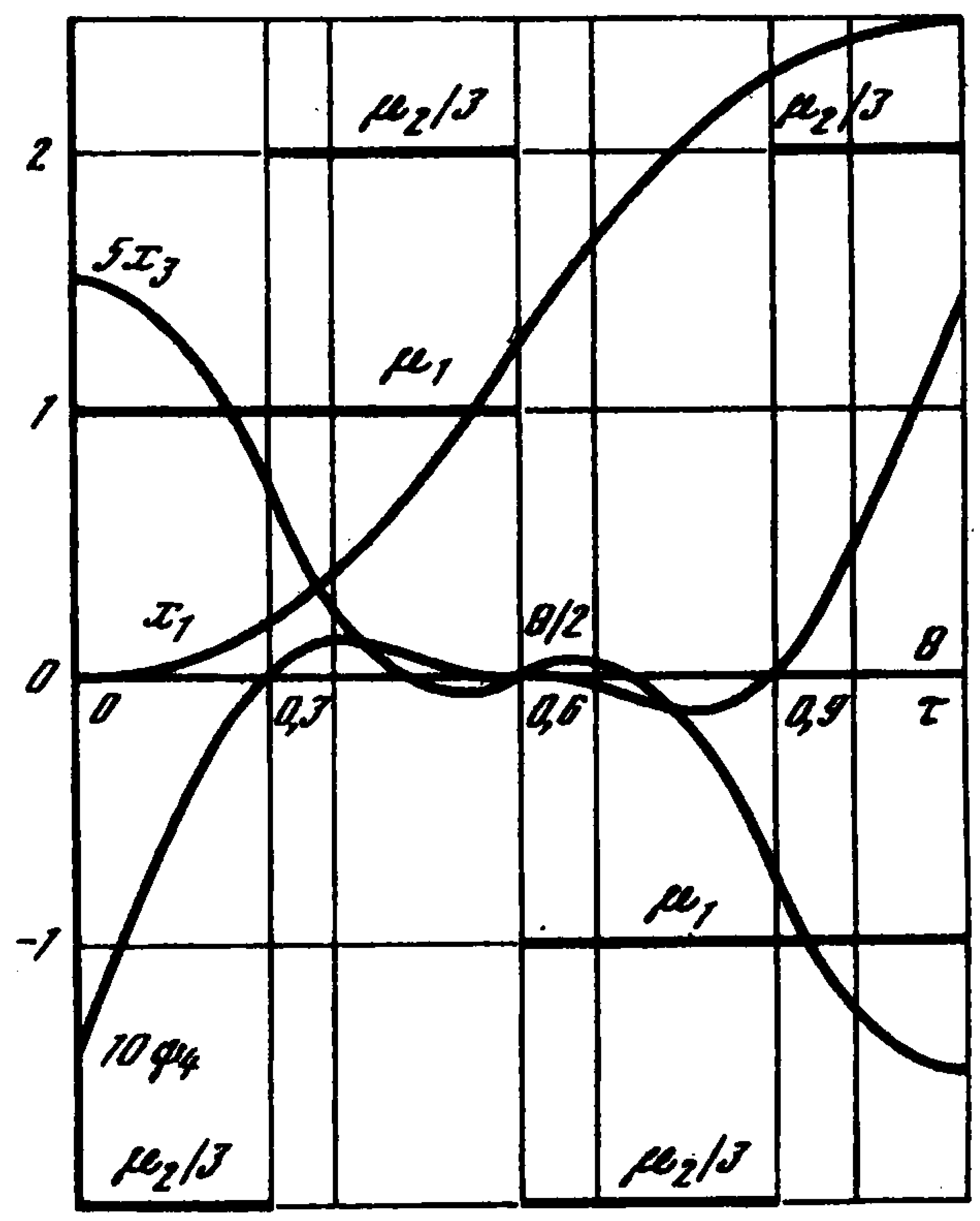
уже возможно движение двузвенника, содержащее участок особого режима, когда звенья сложены. (При условиях $x_{1\theta} = 2{,}20003$, $x_{30} = 0{,}7$ такое движение не существует, поскольку при управлении (4.5) скорость $x_4 < 0$ вплоть до момента, когда $x_1 = x_{1\theta}/2$, $x_3 = 0$.) В начале такого движения, которое построено численно, второе звено KL поворачивается до совмещения с первым OK, угол x_3 при этом строго монотонно убывает и в момент совмещения звеньев скорость x_4 обращается в нуль, угол x_1 строго монотонно возрастает. Затем звенья "короткое" время вращаются вместе, будучи сложенными ($x_3 \equiv 0$, $\dot{x}_1 > 0$). На последнем, третьем, участке звено KL "отворачивается" от звена OK и занимает к конечному моменту T заданное положение, угол x_3 на третьем участке строго монотонно убывает и ко времени T ско-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

рость x_4 обращается в нуль; угол x_1 на последнем участке по-прежнему строго монотонно возрастает. В процессе движения звено KL не совершает колебаний относительно звена OK. Время описанного движения $T = 0{,}96856$. Управление $\mu_1(\tau)$ имеет вид (4.3) (обозначение θ надо заменить на T). Управление $\mu_2(\tau)$ имеет вид ($\tau_1 = 0{,}21776$, $\tau_2 = 0{,}44238$):

$$\begin{aligned} &\mu_2(\tau) = -1 \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, \ \mu_2(\tau) = 1 \text{ при } \tau_1 < \tau \leqslant \tau_2 \\ &\mu_2(\tau) = 0 \text{ при } \tau_2 < \tau \leqslant T - \tau_2 \\ &\mu_2(\tau) = -1 \text{ при } T - \tau_2 < \tau \leqslant T - \tau_1, \ \mu_2(\tau) = 1 \text{ при } T - \tau_1 < \tau \leqslant T \end{aligned} \tag{4.7}$$

Оно схематически показано на фиг. 5. Как раз при $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant T - \tau_2$ звенья сложены и момент инерции двузвенника относительно шарнира O минимален.

При условиях (4.6), однако, меньше времени занимает удовлетворяющее принципу максимума движение, показанное на фиг. 6 ($\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0{,}08873$). При таком движении звено KL совершает колебания около звена OK, т.е. угол x_3 убывает не строго монотонно ($x_4(\theta/2) > 0$). Время этого, по-видимому оптимального, движения $\theta = 0{,}96830$. Оно меньше, хотя и незначительно, времени $T = 0{,}96856$ движения, содержащего особый режим – выигрыш во времени составляет всего $2{,}6 \cdot 10^{-4}$. Управление $\mu_1(\tau)$ имеет вид (4.3), а $\mu_2(\tau)$ – (4.5). При этом время переключения

$\tau_1 = 0{,}21938$ несколько больше времени переключения $\tau_1 = 0{,}21776$ для движения с участком особого режима, т.е. торможение звена KL при управлении вида (4.5) начинается позже, чем при управлении (4.7).

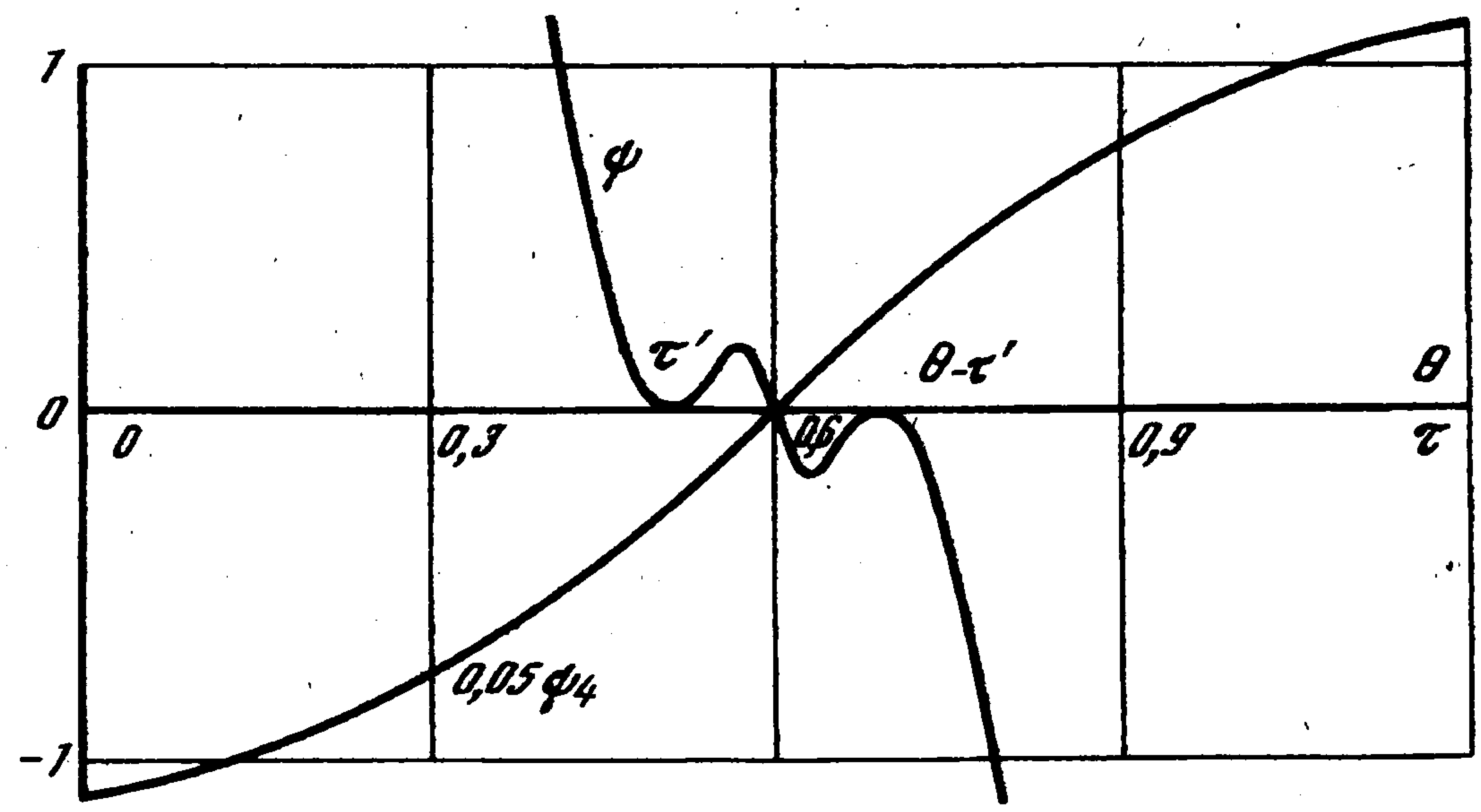
Если $x_{1\theta} = 2{,}20003$, $x_{30} = 0{,}256$, то решение краевой задачи (1.4), (2.5), (2.6) получается при $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0{,}0017$. График функции $\psi_4(\tau)$ "почти" касается при $\tau = \theta/2$ оси абсцисс ($\dot\psi_4(\theta/2) = 0{,}0017$). Наличие такого касания позволяет предположить, что при $x_{30} < 0{,}256$ управление (4.5) видоизменяется, "приобретая" около момента $\theta/2$ новые точки переключения и интервалы постоянства. Можно ожидать, что с уменьшением величины x_{30} количество точек переключения и интервалов постоянства управления $\mu_2(\tau)$ увеличивается, а начиная с некоторого достаточно малого значения x_{30} их число, как и в [2–5], становится бесконечным; при этом возникает также особый режим движения со сложенными звеньями.

На фиг. 7 показано еще одно движение, удовлетворяющее принципу максимума. Здесь приведены переменные $x_1(\tau)$, $x_3(\tau)$, $\psi_4(\tau)$, $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, отвечающие решению краевой задачи (1.4), (2.5), (2.6) в случае $x_{1\theta} = 2{,}49384$, $x_{30} = 0{,}3$. При таком решении $\theta = 1{,}02708$, $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0{,}01289$. Время движения при управлении вида (4.7) $T = 1{,}02754 = \theta + 0{,}00046$. Относительный выигрыш во времени при управлении (4.5) в этом случае несколько больше, чем в случае (4.6).

В рассмотренных выше случаях при управлении $\mu_2(\tau)$ вида (4.7) затраты времени оказываются большими, нежели при управлении вида (4.5), когда $\mu_2(\tau) \not\equiv 0$ ни на каком промежутке времени. Относительный выигрыш во времени при этом оказывается однако крайне малым, и может возникнуть вопрос, не является ли разница во времени результатом неточности вычислений. Для того чтобы ответить на этот вопрос, исследования проводились при различных шагах счета, с одинарной и двойной точностью счета, рассматривалось много различных краевых конфигураций двузвенника. Во всех рассмотренных вариантах затраты времени оказываются меньшими при управлении вида (4.5). Кроме того, в разд. 5 приведено аналитическое доказательство того, что управление вида (4.7) не является оптимальным. Сказанное дает основания считать, что с точки зрения быстродействия управление (4.5) действительно лучше управления (4.7).

С помощью приведенных в [6, 7] физических соображений можно, по-видимому, объяснить, почему при колебательном движении звена KL, которое осуществляется с помощью управления (4.5), двузвенник удается повернуть быстрее, чем при движении со сложенными звеньями, которое происходит с управлением (4.7). До начала особого режима при управлении (4.7) сначала происходит разгон звена KL, а затем торможение. Во время разгона момент инерции двузвенника уменьшается максимально быстро, а во время торможения – медленнее. При движении с колебаниями (при управлении (4.5)) момент инерции также сначала уменьшается максимально быстро, но торможение начинается позже, нежели при управлении (4.7). И хотя звено OK совмещается со звеном KL лишь на мгновения, при движении с управлением (4.5) момент инерции оказывается как бы меньше "в среднем", чем при управлении (4.7). Поэтому движение с колебаниями предпочтительнее с точки зрения быстродействия, нежели движение со сложенными звеньями.

Если $x_{30} = 1{,}49929$, как в (4.2), а $x_{1\theta} < 2{,}20003$, то "лимитирующим" время является движение по углу x_3. В связи с этим вернемся к случаю (4.2). Численные исследования показывают, что в этом случае функции (4.3), (4.4) удовлетворяют условиям (2.6) не только при $\psi_1 \equiv 1$, $\psi_3(\theta/2) = 0$, но и при $\psi_1 \equiv 1$, $-59{,}845 \leqslant \psi_3(\theta/2) \leqslant 0$. Если величина $\psi_3(\theta/2)$ равна правому крайнему значению, т.е. $\psi_3(\theta/2) = 0$, то, как говорилось выше, график функции $\psi_4(\tau)$ единственный раз, при $\tau = \theta/2$ пересекает ось абсцисс, касаясь ее. График же функции $\psi(\tau)$ при этом единственный раз, также в точке $\tau = \theta/2$, пересекает ось абсцисс, не касаясь ее (см. фиг. 3). Если же величина $\psi_3(\theta/2)$ принимает левое крайнее значение, т.е. $\psi_3(\theta/2) = -59{,}845$, то функции $\psi_4(\tau)$ и $\psi(\tau)$ в



Фиг. 8

некотором смысле меняются ролями: график функции $\psi_4(\tau)$ один раз без касания пересекает ось абсцисс при $\tau = \theta/2$, график же функции $\psi(\tau)$ касается оси абсцисс при $\tau = \tau' = 0{,}50744$ и $\tau = \theta - \tau'$, не пересекая ее, и единственный раз пересекает ее при $\tau = \theta/2$, не касаясь (фиг. 8). Такое поведение функций $\psi_4(\tau)$ и $\psi(\tau)$ позволяет предположить, что при $x_{1\theta} < 2{,}20003$ управление $\mu_1(\tau)$ "приобретает" около точек $\tau' \in [0, \theta/2]$ и $\theta - \tau' \in [\theta/2, \theta]$ дополнительные интервалы постоянства и их становится не два, как в (4.3), а шесть, управление же $\mu_2(\tau)$ имеет по-прежнему два интервала постоянства, как (4.4).

5. Об особом управлении. Пусть

$$x_3(0) = x_3(\theta) = 0 \tag{5.1}$$

т.е. в начальной и конечной конфигурациях звенья сложены. Если управляющие моменты $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ переводят двузвенник из состояния (2.1) в состояние (2.2) за время θ, то при условии (5.1)

$$\int_0^\theta \frac{\beta x_4}{\delta} d\tau = \int_0^0 \frac{\beta}{\delta} dx_3 = 0 \tag{5.2}$$

Рассмотрим при условии (5.1), вместо задачи быстродействия, задачу максимизации угла поворота $x_1(\theta)$ при заданном времени θ и $x_2(0) = x_2(\theta) = x_4(0) = x_4(\theta) = 0$. Пользуясь первыми двумя уравнениями (1.4) и равенством (5.2), можно показать, что при условии (5.1) угол $x_1(\theta)$ будет максимальным, когда на всем отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \theta$ момент инерции δ остается минимальным. В этом случае при $0 \leqslant \tau \leqslant \theta$ двузвенник движется со сложенными звеньями, и его движение описывается уравнениями

$$(A + B - 2C)\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu_1, \quad x_3(\tau) \equiv 0 \tag{5.3}$$

Как видно из уравнений (5.3), управляющий момент $\mu_1(\tau)$, максимизирующий величину $x_1(\theta)$ за заданное время θ, имеет одно переключение и описывается выражением (4.3), а управляющий момент $\mu_2(\tau)$ при условиях $l_1 = l_2, J_2 = m_2 = 0$ (см. (4.1)) равен нулю.

Максимальная величина $x_1(\theta)$ – строго монотонно возрастающая функция времени θ. Отсюда следует, что в случае (5.1) при заданном угле $x_1(\theta) = x_{1\theta}$ оптимальным для задачи быстродействия является управление $\mu_1(\tau)$ вида (4.3) и, при условии (4.1), управление $\mu_2(\tau) = 0$.

Таким образом, при условиях (4.1), (5.1) в течение всего времени движения имеет место особое управление $\mu_2(\tau)$. При значениях параметров двузвенника, не удовлетворяющих условию (4.1), подобная ситуация имеет место, если момент

$$\mu_2(\tau) = \frac{B-C}{A+B-2C}\mu_1(\tau)$$

удерживающий звенья сложенными, удовлетворяет ограничению (1.5).

Если величины $|x_3(0)|$, $|x_3(\theta)|$ не равны нулю, но малы, по сравнению с величиной $x_1(\theta)$, то можно предполагать, что оптимальное по быстродействию движение также содержит особый режим движения со сложенными звеньями, который можно назвать магистральным [14].

Для того чтобы выяснить, может ли управление (4.7), содержащее конечное число переключений и особый участок, быть оптимальным, найдем производную

$$L_q = \frac{\partial}{\partial\mu_2}\left(\frac{\partial^{2q}}{\partial\tau^{2q}}\frac{\partial H}{\partial\mu_2}\right)$$

в силу системы (1.4), (2.5) при $q = 1, 2$ на участке особого управления. Вычислить выражения L_q ($q = 1, 2$) "вручную" трудно из-за громоздкости уравнений (2.5). Их удается найти в случае (4.1) с помощью программ, реализующих символьные вычисления[1]. При этом оказывается, что

$$L_1 = 0, \quad L_2 = -Dx_2\psi_1$$

где $D > 0$ – постоянная, зависящая от параметров системы. Поскольку на траектории, отвечающей управлению (4.7), $x_2(\tau) > 0$, $\psi_1 > 0$, то $L_2 < 0$. Из [15, 16] следует, что на оптимальной траектории особый участок при условии $L_2 < 0$ не может сопрягаться с кусочно-гладким неособым участком, если управление в точке сопряжения разрывно. Отсюда вытекает, что управление (4.7) не может быть оптимальным. Не может быть таковым и любое другое управление, содержащее конечное число переключений и особый участок. Следовательно, если при $|x_3(0)|$, $|x_3(\theta)| \neq 0$ особый режим существует, то он, так же как для систем, рассматриваемых в [2, 3, 5–7], "окружен" с обеих сторон режимами с "дребезжащим" управлением. В каждом из этих режимов управление $\mu_2(\tau)$ имеет бесконечное число моментов переключения, которые сгущаются к точке сопряжения с особым участком. Подобное управление невозможно реализовать технически. Однако описанные выше исследования дают основания полагать, что при замене такого оптимального управления управлением вида (4.7) проигрыш в быстродействии будет невелик.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geering H.P., Guzzella L., Hepner S., Onder C.H.* Time-optimal motions of robots in assembly tasks // IEEE Trans. Automat. Contr. 1986. V. AC-31. No. 6. P. 512–518.
2. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И.* Режимы с учащающимися переключениями в задаче управления роботом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 939–946.
3. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1991. Т. 197. С. 85–166.
4. *Fuller A.T.* Study of an optimal nonlinear control system // J. Electron. Contr. 1963. V. 15. № 1. P. 63–71.
5. *Marchal C.* Chatterring arcs and chattering controls // J. Optimiz. Theory Appl., 1973. V. 11. № 5. P. 441–468.
6. *Осипов С.Н., Формальский А.М.* Задача о быстрейшем повороте манипулятора // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 929–938.
7. *Formal'sky A.M., Osipov S.N.* On the problem of the time-optimal manipulator arm turning // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. AC-35. No. 6. P. 714–719.

[1] Необходимые вычисления проделал студент МГУ *В.В. Матвеев.*

8. *Баничук Н.В., Мамалыга В.М.* Оптимальное управление в нелинейной механической системе с переменной инерционной характеристикой // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 6–12.
9. *Воробьев Е.И., Щеголева А.Н.* Оптимизация по быстродействию пневматического манипулятора выбором моментов переключения приводов // Машиноведение. 1978. № 3. С. 24–26.
10. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Техн. кибернетика. 1990. № 1. С. 189–238.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
12. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
13. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
14. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977. 204 с.
15. *Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G.* Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. by G. Leitmann, New York: Acad. Press. 1967. P. 63–101.
16. *McDanell J.P., Powers W.F.* Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs // SIAM J. Gontrol. 1971. V. 9. No. 2. P. 161–173.

Москва

Поступила в редакцию
16.VI.1994