УДК 531.53

© 1996 г. А.П. Маркеев

О КОЛЕБАНИЯХ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ПОДВЕШЕННОЙ НА ИДЕАЛЬНОЙ НИТИ

Изучается движение материальной точки, подвешенной на идеальной нити в однородном поле тяжести. Решена задача об орбитальной устойчивости периодического движения точки вдоль вертикали. Рассмотрены нелинейные колебания в окрестности периодического движения в случае его неустойчивости. При исследовании используется способ нормализации функции Гамильтона при помощи симплектических отображений.

1. Постановка задачи. Пусть материальная точка массы m закреплена на одном из концов абсолютно гибкой невесомой нерастяжимой нити длины l, другой конец которой прикреплен к неподвижной точке O. Движение точки происходит в однородном поле тяжести в фиксированной вертикальной плоскости Oxy (фиг. 1).

Пусть x, y – координаты точки m. Условие нерастяжимости нити дает одностороннюю связь $l^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. За обобщенные координаты примем полярный угол θ и величину $\xi = l - (x^2 + y^2)^{1/2}$. Соответствующими импульсами будут величины

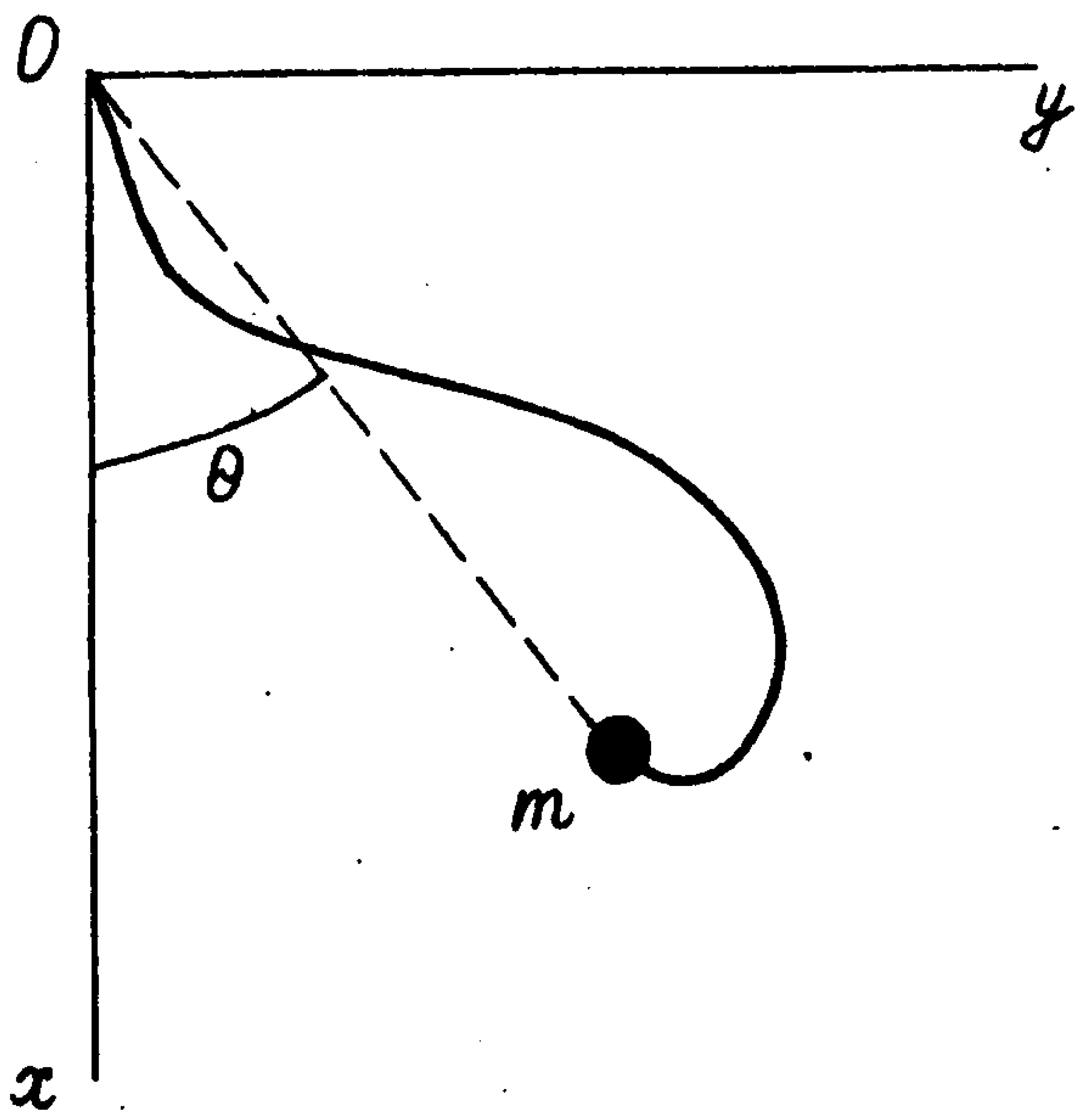
$$p_\theta = m(l-\xi)^2\dot{\theta}, \quad p_\xi = m\dot{\xi}$$

При ослабленной связи, когда $\xi > 0$, движение описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{(l-\xi)^2}\right] - mg(l-\xi)\cos\theta \tag{1.1}$$

Если в момент выхода на связь $\xi = 0$ величина p_ξ отлична от нуля, происходит удар. При ударе выполняется соотношение

$$p_\xi^+ = -p_\xi^-$$



Фиг. 1

где индексами "минус" и "плюс" отмечены значения импульса p_ξ перед ударом и после него.

Уравнения движения допускают частное решение, соответствующее периодическому движению точки m вдоль фиксированной вертикали Ox (фиг. 1). Период τ равен $2(2h/g)^{1/2}$, где g – ускорение свободного падения, а h – высота подскока точки вдоль вертикали при ослабленной после удара нити. Чтобы исключить соударения точки m с точкой O закрепления нити, будем считать, что $h < l$.

Упомянутое τ-периодическое движение на промежутке времени $0 \leqslant t < \tau$ описывается равенствами

$$\theta = 0, \ p_\theta = 0 \tag{1.3}$$

$$\xi = -\tfrac{1}{2} g t^2 + (2gh)^{1/2} t, \quad p_\xi = -mgt + m(2gh)^{1/2}$$

Функции $\xi(t), p_\xi(t)$ при $\xi > 0$ удовлетворяют каноническим уравнениям с гамильтонианом

$$\Gamma = \frac{1}{2m} p_\xi^2 + mg\xi \tag{1.4}$$

а при $\xi = 0$ выполняется равенство (1.2). При ударах, которые происходят в моменты времени, кратные τ, величина $\xi = 0$, а величина p_ξ меняется скачком от $p_\xi^- = -m(2gh)^{1/2}$ до $p_\xi^+ = m(2gh)^{1/2}$.

Цель работы – строгое аналитическое решение нелинейной задачи об орбитальной устойчивости периодического движения (1.3) для всех значений h из интервала $0 < h < l$. Изучены также нелинейные колебания точки в окрестности движения (1.3), когда значение h лежит в области его орбитальной неустойчивости. Устойчивость движения (1.3) в линейной постановке задачи рассматривалась ранее [1–3]. В [2, 3] исследован также ряд других типов периодических движений, отличных от (1.3), и изучено явление хаотизации движения.

2. Гамильтониан возмущенного движения. Следуя [4], сделаем в (1.1) каноническую замену переменных, оставляющую величины θ, p_θ неизменными и вводящую вместо переменных p_ξ, ξ величины J, v по формулам

$$p_\xi = (3m^2\pi g)^{1/3} J^{1/3} f_1(v), \quad \xi = \left(\frac{9\pi^2}{8m^2 g}\right)^{1/3} J^{2/3} f_2(v) \tag{2.1}$$

где f_1, f_2 – 2π-периодические функции v, причем для $0 \leqslant v < 2\pi$ имеем: $f_1 = 1 - v\pi^{-1}$, $f_2 = v\pi^{-1}(2 - v\pi^{-1})$.

В невозмущенном движении с гамильтонианом (1.4) переменные J, v будут переменными действие – угол I, w. При этом

$$\Gamma = \left(\frac{9m\pi^2 g^2}{8}\right)^{1/3} I^{2/3}, \quad I = \frac{2m(2g)^{1/2}}{3\pi} h^{3/2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial I} = \frac{2\pi}{\tau}, \quad w = \frac{2\pi}{\tau} t = \pi \sqrt{\frac{g}{2h}} t$$

Для получения функции Гамильтона, описывающей движение в окрестности периодического движения (1.3), введем возмущения q, p, r при помощи канонического преобразования $\theta, p_\theta, J, v \to q, p, r, v$, определяемого равенствами

$$\theta = q, \quad p_\theta = \frac{ml^2}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{h}} p, \quad J = I + \frac{ml^2}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{h}} r, \quad v = v \tag{2.3}$$

Если еще перейти от t к новой безразмерной независимой переменной $\pi(g/2h)^{1/2} t$, то из (1.1), (2.1–2.3) получим гамильтониан возмущенного движения в виде ряда по формам четных степеней относительно $q, p, |r|^{1/2}$:

$$H = r + h_2(q, p, v) + \ldots \tag{2.4}$$

$$h_2 = \tfrac{1}{2}\varkappa(1 - \varkappa f_2) q^2 + \pi^{-2}(1 - \varkappa f_2)^{-2} p^2, \quad \varkappa = h/l \quad (0 < \varkappa < 1)$$

где многоточием обозначена совокупность членов четвертой и более высоких степеней. Не зависящее от q, p, r, v слагаемое в (2.4) отброшено.

Орбитальная устойчивость (неустойчивость) периодического движения (1.3) означает устойчивость (неустойчивость) решения $q = p = r = 0$ системы с гамильтонианом (2.4) по отношению к возмущениям величин q, p, r.

3. О способе нормализации. Пусть возмущенное движение происходит на том же уровне энергии, что и невозмущенное периодическое движение (1.3). Тогда $H = 0$, где H – функция (2.4). Из уравнения $H = 0$ находим $r = -K(q, p, v)$. На рассматриваемом изоэнергетическом уровне возмущенное движение описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом K (уравнениями Уиттекера [5]), роль независимой переменной играет величина v. Исследуемому периодическому движению (1.3) отвечает решение $q = p = 0$ этих уравнений. Из устойчивости (неустойчивости) решения $q = p = 0$ следует орбитальная устойчивость (неустойчивость) периодического движения (1.3).

В окрестности точки $q = p = 0$ функция K представляется в виде сходящегося ряда по степеням q, p:

$$K = K_2 + K_4 + \ldots + K_s + \ldots \tag{3.1}$$

где K_s – форма степени s с 2π-периодическими по v коэффициентами, причем $K_2 = h_2$. Согласно известным алгоритмам [6], при решении задачи об устойчивости равновесия $q = p = 0$ требуется нормализация нескольких первых форм разложения (3.1), что является весьма громоздкой процедурой. В частности, при нормализации квадратичной формы K_2 нужно находить (численно или аналитически) фундаментальную матрицу решений соответствующей 2π-периодической по v линейной системы дифференциальных уравнений. Правда, в рассматриваемой задаче эту матрицу можно выписать в явном виде, но и при известной матрице фундаментальных решений нормализация форм выше второй степени в (3.1) требует вычисления некоторых определенных интегралов на промежутке $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Это может оказаться очень сложным, особенно если требуется получить явные выражения коэффициентов нормальной формы через параметры задачи.

В работе используется иной способ нормализации. Он основан на изучении нелинейного симплектического отображения, задаваемого движениями системы с гамильтонианом K за период изменения v от 0 до 2π. Кратко, суть предлагаемого способа состоит в следующем. Пусть q_0, p_0 – начальные (при $v = 0$ или, что то же, при $t = 0$) значения переменных q, p, а q_1, p_1 – их значения при $v = 2\pi$ (или, что то же, при $t = t_1$, где t_1 – момент выхода точки m на связь $x^2 + y^2 = l^2$). Функции $q_1 = q_1(q_0, p_0)$, $p_1 = p_1(q_0, p_0)$ задают симплектическое отображение $q_0, p_0 \to q_1, p_1$. Это отображение имеет неподвижную точку $q_0 = p_0 = 0$, а функции q_1, p_1 аналитичны в окрестности этой точки. При помощи канонического преобразования это отображение приводится к нормальной форме, по виду которой находится затем соответствующая нормальная форма гамильтониана K.

Похожий подход к задаче нормализации периодических по времени гамильтоновых систем был предложен в работе [7], где симплектическое отображение получалось при помощи численного интегрирования соответствующих канонических уравнений методом Якоби. В изучаемой же здесь задаче отображение $q_0, p_0 \to q_1, p_1$ получается без численного интегрирования. Процедура его построения использует тот факт, что при изменении v от 0 до 2π нить, на которой подвешена точка m, ослаблена и движение точки полностью известно. Оно задается равенствами:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + \dot{x}_0 t + x_0, \quad y(t) = \dot{y}_0 t + y_0 \tag{3.2}$$
$$\dot{x}(t) = gt + \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t) = \dot{y}_0$$

где $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ – значения соответствующих величин при $v = 0$.

4. Отображение. Используя равенство $r_0 = -K(q_0, p_0, 0)$, приведенные в разд. 1, 2 формулы, связывающие исходные переменные $\theta, p_\theta, \xi, p_\xi$ и переменные q, p, r, v, а также невыписываемые здесь соотношения между $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ и $\theta, p_\theta, \xi, p_\xi$ получаем следующие выражения величин $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ через величины q_0, p_0:

$$x_0 = l(1 - \tfrac{1}{2}q_0^2 + O_4), \quad y_0 = l(q_0 - \tfrac{1}{6}q_0^3 + O_4) \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_0 = -\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{2\varkappa+1}{4\varkappa}q_0^2 + \frac{1}{\pi\varkappa}q_0p_0 - \frac{1}{2\pi^2\varkappa^2}p_0^2 + O_4\right)$$

$$\dot{y}_0 = -\sqrt{2gh}\left(q_0 - \frac{1}{\pi\varkappa}p_0 - \frac{2\varkappa+3}{12\varkappa}q_0^3 + \frac{1}{2\pi\varkappa}q_0^2p_0 - \frac{1}{2\pi^2\varkappa^2}q_0p_0^2 + O_4\right)$$

где O_4 – совокупность членов выше третьей степени относительно q_0, p_0.

Соотношение $x^2 + y^2 = l^2$ при учете (3.2) и (4.1) дает уравнение для нахождения момента времени t_1 выхода точки m на связь. Решив его, находим

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 - \frac{8\varkappa^2 - 2\varkappa + 1}{4\varkappa}q_0^2 + \frac{4}{\pi}q_0p_0 - \frac{4\varkappa+1}{2\pi^2\varkappa^2}p_0^2 + O_4\right)$$

Положив в (3.2) $t = t_1$ и учтя (4.1), получим значения $x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1$ величин $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ в момент выхода на связь, выраженные через q_0, p_0. Пройдя затем взятую в обратном порядке цепочку замен переменных, пройденную при получении соотношений (4.1), найдем следующие, задающие искомое отображение, выражения q_1, p_1 переменных q, p при $v = 2\pi$ через их значения при $v = 0$:

$$q_1 = (1 - 4\varkappa)q_0 + 4/\pi p_0 + a_{30}q_0^3 + a_{21}q_0^2p_0 + a_{12}q_0p_0^2 + a_{03}p_0^3 + O_4 \tag{4.2}$$

$$p_1 = -2\pi\varkappa(1 - 2\varkappa)q_0 + (1 - 4\varkappa)p_0 + b_{30}q_0^3 + b_{21}q_0^2p_0 + b_{12}q_0p_0^2 + b_{03}p_0^3 + O_4$$

$$\begin{gathered} a_{30} = -\tfrac{2}{3}(16\varkappa^3 - 24\varkappa^2 + 5\varkappa - 3), \quad a_{21} = \varkappa^{-1}\pi^{-1}(32\varkappa^3 - 40\varkappa^2 + 2\varkappa - 1) \\ a_{12} = -4\varkappa^{-1}\pi^{-2}(8\varkappa^2 - 8\varkappa - 1), \quad a_{03} = \tfrac{2}{3}\varkappa^{-2}\pi^{-3}(16\varkappa^2 - 12\varkappa - 3) \\ b_{30} = -\tfrac{1}{6}\pi(96\varkappa^3 - 44\varkappa^2 + 22\varkappa - 3), \quad b_{21} = 2(24\varkappa^2 - 5\varkappa + 1) \\ b_{12} = -\varkappa^{-1}\pi^{-1}(48\varkappa^2 + 2\varkappa - 1), \quad b_{03} = 4\varkappa^{-1}\pi^{-2}(4\varkappa + 1) \end{gathered} \tag{4.3}$$

5. Устойчивость в линейном приближении. Фундаментальная матрица линеаризованных уравнений возмущенного движения с гамильтонианом K_2, вычисленная при $v = 2\pi$, совпадает с матрицей линеаризованного отображения (4.2). Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2(1 - 4\varkappa)\rho + 1 = 0 \tag{5.1}$$

При выполнении неравенства

$$0 < \varkappa < \tfrac{1}{2} \tag{5.2}$$

корни (мультипликаторы) уравнения (5.1) – комплексно сопряженные числа с модулями, равными единице: $\rho_1 = \exp(i2\pi\lambda)$, $\rho_2 = \bar{\rho}_1$, где $\pm i\lambda$ – характеристические показатели линейных уравнений с гамильтонианом K_2. В области (5.2) движение (1.3) орбитально устойчиво в линейном приближении [8].

На границе $\varkappa = \tfrac{1}{2}$ области (5.2) мультипликаторы кратны: $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Здесь имеет место неустойчивость в линейном приближении, так как матрица линеаризованного отображения (4.2) не приводится к диагональной форме.

При выполнении неравенства $\varkappa > \frac{1}{2}$ уравнение (5.1) имеет корень с модулем, большим единицы, и, следовательно [8], имеет место неустойчивость (в строгой нелинейной постановке задачи, а не только в ее линейном приближении). Это означает, что если в невозмущенном периодическом движении (1.3) высота послеударного подскока точки m превосходит половину длины нити, то рассматриваемое периодическое движение орбитально неустойчиво.

При $0 < \varkappa \leqslant \frac{1}{2}$ имеем критический случай теории устойчивости и для строгого решения задачи об орбитальной устойчивости движения (1.3) требуется нелинейный анализ.

6. Нелинейный анализ в области устойчивости в первом приближении. Пусть $\varkappa$ лежит внутри области (5.2). Из (5.1) тогда следует, что $\cos 2\pi\lambda = 1 - 4\varkappa$. Отсюда (при учете того, что для $\varkappa = 0$ имеем $K_2 = \pi^{-2}p^2$ и, следовательно, при $\varkappa \to 0$ величина $\lambda \to 0$) получаем, что в области (5.2)

$$\lambda = (2\pi)^{-1}\arccos(1 - 4\varkappa) \tag{6.1}$$

Замена переменных $q = \mu^{-1}q'$, $p = \mu p'$, где $\mu = \frac{1}{2}(\pi \sin 2\pi\lambda)^{1/2}$, приводит линейную часть отображения (4.2) к нормальной форме – повороту на угол $2\pi\lambda$. Отображение принимает следующий вид (штрихи в обозначениях новых переменных опускаем):

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos 2\pi\lambda q_0 + \sin 2\pi\lambda p_0 + c_{30}q_0^3 + c_{21}q_0^2 p_0 + c_{12}q_0 p_0^2 + c_{03}p_0^3 + O_4 \\ p_1 &= -\sin 2\pi\lambda q_0 + \cos 2\pi\lambda p_0 + d_{30}q_0^3 + d_{21}q_0^2 p_0 + d_{12}q_0 p_0^2 + d_{03}p_0^3 + O_4 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &c_{30} = \mu^{-2}a_{30}, \quad c_{21} = a_{21}, \quad c_{12} = \mu^2 a_{12}, \quad c_{03} = \mu^4 a_{03} \\ &d_{30} = \mu^{-4}b_{30}, \quad d_{21} = \mu^{-2}b_{21}, \quad d_{12} = b_{12}, \quad d_{03} = \mu^2 b_{03} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Коэффициенты c_{kl} и d_{kl} связаны тождествами

$$\begin{aligned} &\cos 2\pi\lambda(3c_{30} + d_{21}) = \sin 2\pi\lambda(3d_{30} - c_{21}), \quad \cos 2\pi\lambda(c_{21} + d_{12}) = \sin 2\pi\lambda(d_{21} - c_{12}) \\ &\cos 2\pi\lambda(c_{12} + 3d_{03}) = \sin 2\pi\lambda(d_{12} - 3c_{03}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Эти тождества – следствие симплектичности отображения (4.2).

Теперь приведем к нормальной форме члены третьей степени в отображении (6.2). Для этого удобно предварительно перейти от q, p к комплексно-сопряженным переменным $z, \bar{z}$: $z = q - ip$, $\bar{z} = q + ip$. В переменных $z, \bar{z}$ отображение запишется в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1 z_0 + f_{30}z_0^3 + f_{21}z_0^2\bar{z}_0 + f_{12}z_0\bar{z}_0^2 + f_{03}\bar{z}_0^3 + O_4 \\ \bar{z}_1 &= \rho_2 \bar{z}_0 + g_{30}z_0^3 + g_{21}z_0^2\bar{z}_0 + g_{12}z_0\bar{z}_0^2 + g_{03}\bar{z}_0^3 + O_4 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} &f_{kl} = \mu_{kl} + i\nu_{kl}, \quad g_{kl} = \bar{f}_{lk} \\ &\mu_{30} = \tfrac{1}{8}(c_{30} - c_{12} + d_{21} - d_{03}), \quad \nu_{30} = -\tfrac{1}{8}(d_{30} - c_{21} - d_{12} + c_{03}) \\ &\mu_{21} = \tfrac{1}{8}(3c_{30} + c_{12} + d_{21} + 3d_{03}), \quad \nu_{21} = -\tfrac{1}{8}(3d_{30} - c_{21} + d_{12} - 3c_{03}) \\ &\mu_{12} = \tfrac{1}{8}(3c_{30} + c_{12} - d_{21} - 3d_{03}), \quad \nu_{12} = -\tfrac{1}{8}(3d_{30} + c_{21} + d_{12} + 3c_{03}) \\ &\mu_{03} = \tfrac{1}{8}(c_{30} - c_{12} - d_{21} + d_{03}), \quad \nu_{03} = -\tfrac{1}{8}(d_{30} + c_{21} - d_{12} - c_{03}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Сделаем каноническое преобразование $z, \bar{z} \to z^*, \bar{z}^*$, задаваемое неявно равенствами

$$z^* = \partial S / \partial \bar{z}^*, \quad \bar{z} = \partial S / \partial z$$

где

$$S = z\bar{z}^* + s_{40}z^4 + s_{31}z^3\bar{z}^* + s_{22}z^2\bar{z}^{*2} + s_{13}z\bar{z}^{*3} + s_{04}\bar{z}^{*4}$$

коэффициенты s_{mn} подберем так, чтобы максимально упростить структуру отображения.

В новых переменных отображение (6.5) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
z_1^* &= \rho_1 z_0^* + [f_{30} + \rho_1(\rho_1^2 - 1)s_{31}]z_0^{*^3} + f_{21} z_0^{*^2} \bar{z}_0^* + \\
&+[f_{12} + 3\rho_1(\rho_2^2 - 1)s_{13}]z_0^* \bar{z}_0^{*^2} + [f_{03} + 4\rho_1(\rho_2^4 - 1)s_{04}]\bar{z}_0^{*^3} + O_4 \\
\bar{z}_1^* &= \rho_2 \bar{z}_0^* + [g_{30} - 4\rho_2(\rho_1^4 - 1)s_{40}]z_0^{*^3} + [g_{21} - 3\rho_2(\rho_1^2 - 1)s_{31}]z_0^{*^2} \bar{z}_0^* + \\
&+ g_{12} z_0^* \bar{z}_0^{*^2} + [g_{03} - \rho_2(\rho_2^2 - 1)s_{13}]\bar{z}_0^{*^3} + O_4
\end{aligned}
\qquad (6.7)
$$

Для значений параметра $\varkappa$ из области (5.2) имеем $\rho_1^2 \neq 1$, $\rho_2^2 \neq 1$. Величины же ρ_1^4 и ρ_2^4 отличны от единицы для всех значений $\varkappa$ из области (5.2) кроме $\varkappa = 1/4$, для которого $\rho_1^4 = \rho_2^4 = 1$. При этом значении $\varkappa$ имеет место резонанс четвертого порядка $4\lambda = 1$.

Рассмотрим сначала нерезонансный случай $\varkappa \neq 1/4$. Тогда коэффициенты s_{mn} производящей функции S можно выбрать так, что в правых частях каждого из равенств (6.7) останется только по одному одночлену третьей степени и отображение примет следующую (нормальную) форму:

$$
z_1^* = \rho_1 z_0^* + f_{21} z_0^{*^2} \bar{z}_0^* + O_4, \quad \bar{z}_1^* = \rho_2 \bar{z}_0^* + g_{12} z_0^* \bar{z}_0^{*^2} + O_4
$$

Этому отображению отвечает нормализованная до членов четвертой степени функция Гамильтона (3.1)

$$
K = i\lambda z^* \bar{z}^* + \tfrac{1}{2} i c_2 (z^* \bar{z}^*)^2 + \ldots \qquad (6.8)
$$

где $c_2 = -i\rho_2(2\pi)^{-1} f_{21}$. Из (6.4), (6.6) следует, что величина c_2 вещественна и может быть вычислена по формуле

$$
c_2 = -(3c_{30} + d_{21} + 3d_{03} + c_{12})/(8\mu)^2 \qquad (6.9)
$$

В канонически сопряженных вещественных переменных φ^*, R^*, вводимых каноническим преобразованием

$$
z^* = -i(2R^*)^{1/2} \exp(i\varphi^*), \quad \bar{z}^* = i(2R^*)^{1/2} \exp(-i\varphi^*) \qquad (6.10)
$$

гамильтониан (6.8) имеет вид

$$
K = \lambda R^* + c_2 R^{*^2} + O(R^{*^3}) \qquad (6.11)
$$

Если величина c_2 в (6.11) отлична от нуля, то положение равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (3.1) устойчиво [9, 10]. Вычисления по формулам (6.9), (6.3) и (4.3) показывают, что выражение для c_2 можно преобразовать к виду

$$
c_2 = -\frac{\varkappa + 4}{8\pi^2 \varkappa (1 - 2\varkappa)}
$$

В области (5.2) имеем $c_2 < 0$ и, следовательно, при $\varkappa \neq 1/4$ в этой области периодическое движение (1.3) орбитально устойчиво.

Пусть теперь $\varkappa = 1/4$. Тогда имеет место резонанс $4\lambda = 1$ и нормальная форма отображения будет такой:

$$
z_1^* = \rho_1 z_0^* + f_{21} z_0^{*^2} \bar{z}_0^* + f_{03} \bar{z}_0^{*^3} + O_4, \quad \bar{z}_1^* = \rho_2 \bar{z}_0^* + g_{12} z_0^* \bar{z}_0^{*^2} + g_{30} z_0^{*^3} + O_4
$$

Для соответствующей нормализованной до членов четвертой степени функции Гамильтона (3.1) получаем выражение

$$
K = i\lambda z^* \bar{z}^* + \tfrac{1}{2} i c_2 (z^* \bar{z}^*)^2 + (8\pi)^{-1} \rho_2 f_{03} e^{iv} \bar{z}^{*^4} - (8\pi)^{-1} \rho_1 g_{30} e^{-iv} z^{*^4} + \ldots
$$

В переменных φ^*, R^*, определяемых равенствами (6.10), имеем

$$K = \lambda R^* + c_2 R^{*^2} -$$

$$-(2\pi)^{-1}[\mu_{03}\sin(2\pi\lambda + 4\varphi^* - \nu) - \nu_{03}\cos(2\pi\lambda + 4\varphi^* - \nu)]R^{*^2} + O(R^{*^3}) \tag{6.12}$$

При $\varkappa = 1/4$ величина $c_2 = -17(2\pi)^{-2}$, $\mu_{03} = -(2\pi)^{-1}$, $\nu_{03} = 0$. В переменных $R = R^*$, $\varphi = \varphi^* - \nu/4$ вместо (6.12) получаем такой гамильтониан:

$$K = (c_2 + b_2\cos 4\varphi)R^2 + O(R^3)$$

где $b_2 = (2\pi)^{-2}$. Так как $|c_2| > b_2$, то [7] в рассматриваемом резонансном случае периодическое движение (1.3) орбитально устойчиво.

7. Устойчивость на границе области (5.2). При $\varkappa = 1/2$ величина λ равна $1/2$, т.е. реализуется резонанс второго порядка. В этом случае приведение квадратичной части функции Гамильтона (3.1) к гамильтониану, не зависящему от ν, в классе 2π-периодических по ν линейных канонических преобразований невозможно [11]. Но такое приведение можно осуществить в классе 4π-периодических преобразований. В соответствии с этим при нормализации функции K вместо отображения $q_0, p_0 \to q_1, p_1$ за период изменения ν от 0 до 2π будем рассматривать отображение $q_0, p_0 \to q_2, p_2$ за удвоенный период изменения ν от 0 до 4π. Из (4.2) при $\varkappa = 1/2$ получаем

$$q_2 = q_0 - 8\pi^{-1}p_0 + F(q_0, p_0) + O_4, \quad p_2 = p_0 + G(q_0, p_0) + O_4$$

$$F = -12q_0^3 + 96\pi^{-1}q_0^2 p_0 - 384\pi^{-2}q_0 p_0^2 + 1808(3\pi^3)^{-1}p_0^3 \tag{7.1}$$

$$G = 3\pi q_0^3 - 36q_0^2 p_0 + 192\pi^{-1}q_0 p_0^2 - 384\pi^{-2}p_0^3$$

Сделаем каноническую замену переменных $q, p \to q^*, p^*$, задаваемую равенствами

$$q^* = \partial S/\partial p^*, \quad p = \partial S/\partial q$$

$$S = (\pi\sqrt{2}/2)qp^*(1 - (11/60)p^{*^2})$$

В переменных q^*, p^* отображение (7.1) принимает следующую форму:

$$q_2^* = q_0^* - 4\pi p_0^* + F^*(q_0^*, p_0^*) + O_4, \quad p_2^* = p_0^* + G^*(q_0^*, p_0^*) + O_4$$

$$F^* = -24\pi^{-2}q_0^{*^3} + 96\pi^{-1}q_0^{*^2}p_0^* - 192q_0^* p_0^{*^2} + 768\pi/5p_0^{*^3} \tag{7.2}$$

$$G^* = 12\pi^{-3}q_0^{*^3} - 72\pi^{-2}q_0^{*^2}p_0^* + 192\pi^{-1}q_0^* p_0^{*^2} - 192p_0^{*^3}$$

Это отображение порождается (за промежуток изменения ν от 0 до 4π) нормализованным до членов четвертой степени гамильтонианом (3.1)

$$K = -\tfrac{1}{2}p^{*^2} - \tfrac{3}{4}\pi^{-4}q^{*^4} + O_6 \tag{7.3}$$

Так как знаки у коэффициентов при p^{*^2} и q^{*^4} в (7.3) одинаковы, то, согласно [12], равновесие $q = p = 0$ в системе с функцией Гамильтона (3.1) устойчиво.

Проведенное выше исследование позволяет сформулировать следующий окончательный результат: если в невозмущенном периодическом движении точки вдоль вертикали высота ее послеударного подскока не превосходит половины длины нити, то это периодическое движение орбитально устойчиво, в противном случае неустойчиво. Ранее этот результат был получен численно[1].

---

[1] *Иванов А.П.* Качественная теория движения в системах с неудерживающими связями. Дис. ... д-ра физико-матем. наук: 14.11.90. М., 1990. 27 с.

8. О нелинейных колебаниях в окрестности неустойчивой траектории. Пусть $\varkappa = 1/2 + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$. В этом случае периодическое движение (1.3) орбитально неустойчиво. Зафиксируем уровень энергии, отвечающий траектории (1.3) и рассмотрим характер нелинейных колебаний точки m в ее окрестности. Функцию Гамильтона, описывающую колебания, получим снова при помощи соответствующего симплектического отображения. Так как значения параметра $\varkappa$ предполагаются близкими к его граничному значению, то, как и в разд. 7, следует изучать отображение за промежуток изменения υ от 0 до 4π.

Полагая $q = \varepsilon^{1/2}X$, $p = \varepsilon^{1/2}Y$, получаем из (4.2), (4.3) отображение $X_0, Y_0 \to X_2, Y_2$ в виде

$$X_2 = (1+16\varepsilon)X_0 - 8\pi^{-1}(1+4\varepsilon)Y_0 + \varepsilon F(X_0, Y_0) + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{8.1}$$

$$Y_2 = -4\pi\varepsilon X_0 + (1+16\varepsilon)Y_0 + \varepsilon G(X_0, Y_0) + O(\varepsilon^{3/2})$$

где F и G – функции из (7.1).

После двух канонических замен переменных: $X, Y \to X', Y'$ по формулам

$$X = \sqrt{2}\pi^{-1}(1+2\varepsilon)X', \quad Y = \sqrt{2}\pi[2(1+2\varepsilon)]^{-1}Y'$$

и $X', Y' \to X^*, Y^*$, задаваемой производящей функцией

$$S = X'Y^*(1-(11/60)\varepsilon Y^{*2})$$

отображение (8.1) принимает следующий вид:

$$X_2^* = (1+16\varepsilon)X_0^* - 4\pi Y_0^* + \varepsilon F^*(X_0^*, Y_0^*) + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$Y_2^* = -8\varepsilon\pi^{-1}X_0^* + (1+16\varepsilon)Y_0^* + \varepsilon G^*(X_0^*, Y_0^*) + O(\varepsilon^{3/2})$$

где F^*, G^* – функции из (7.2). Этому отображению соответствует функция Гамильтона

$$K = -\tfrac{1}{2}Y^{*2} + \varepsilon(\pi^{-2}X^{*2} + \tfrac{8}{3}Y^{*2}) - \varepsilon\tfrac{3}{4}\pi^{-4}X^{*4} + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{8.2}$$

Величины $O(\varepsilon^{3/2})$ в (8.2) 4π-периодичны по υ.

Канонические уравнения с гамильтонианом (8.2) описывают нелинейные колебания в окрестности траектории (1.3). Если не пользоваться отображениями, то переход от переменных q, p к переменных X^*, Y^* может быть получен 4π-периодическим по υ, аналитическим по q, p каноническим преобразованием, которое приводит гамильтониан (3.1) к виду (8.2).

Для удобства дальнейших вычислений сделаем еще одну каноническую замену переменных $X^*, Y^* \to Q, P$, положив

$$X^* = (\tfrac{2}{3})^{1/2}(1-\tfrac{8}{3}\varepsilon)\pi Q, \quad Y^* = (1-\tfrac{8}{3}\varepsilon)^{-1}P$$

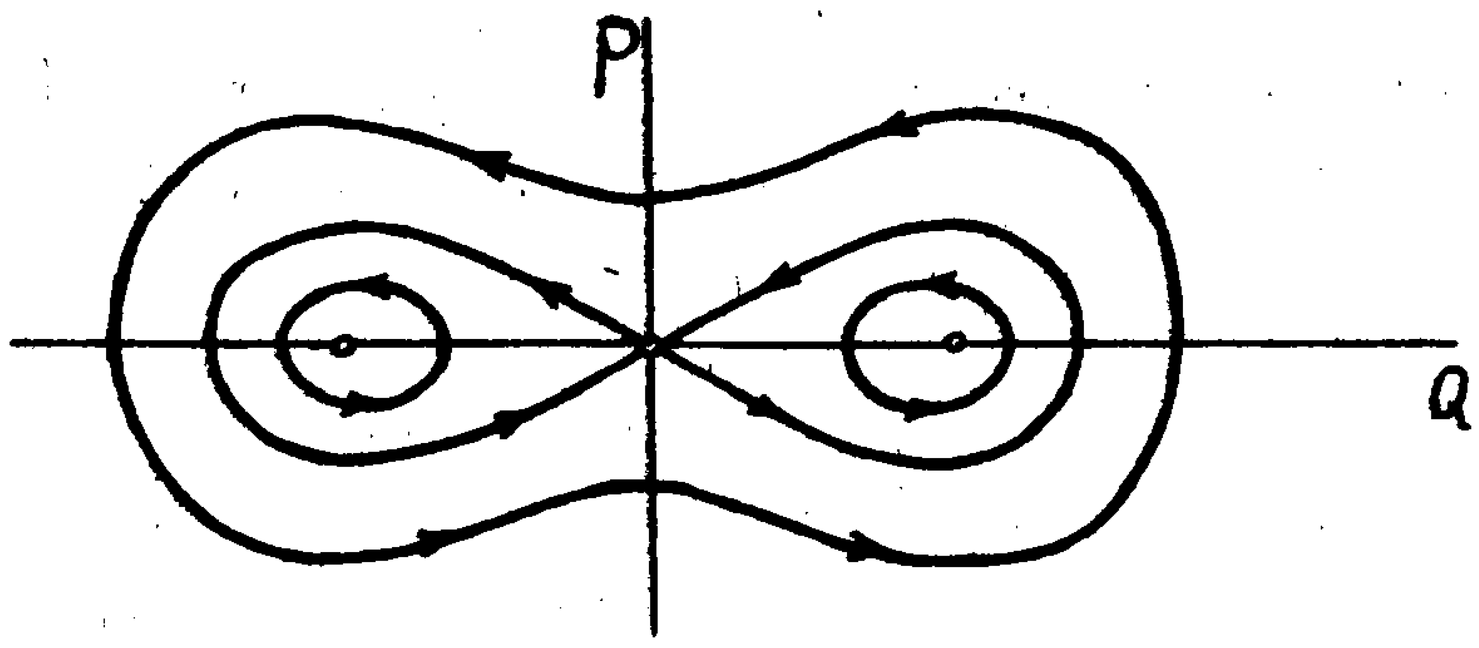
и введем новую независимую переменную $\varsigma = (3/2)^{1/2}\pi^{-1}\upsilon$. В новых переменных движение описывается гамильтонианом вида

$$K = -\tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon(2Q^2 - Q^4) + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{8.3}$$

Отбросив в (8.3) слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$, придем к приближенной ("невозмущенной") системе с гамильтонианом

$$K^{(0)} = -\tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon(2Q^2 - Q^4) \tag{8.4}$$

Невозмущенная система имеет интеграл $K^{(0)} = c$ =const. Фазовый портрет показан на фиг. 2. При $c > \varepsilon/3$ движение невозможно. Если $c = \varepsilon/3$, то система находится в од-



Фиг. 2

ном из положений равновесия $Q = \pm 1$, $P = 0$. В фазовой плоскости им отвечают устойчивые особые точки – центры.

При $0 < c < \varepsilon/3$ (область колебаний) происходят колебания в окрестности положений равновесия. Эти колебания описываются при помощи эллиптических функций Якоби:

$$Q = \pm a\,\mathrm{dn}(\eta, k), \quad P = \pm \tfrac{2}{3}[6(\varepsilon - 3c)]^{1/2}\,\mathrm{sn}(\eta, k)\,\mathrm{cn}(\eta, k)$$
$$k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \quad (0 < k < 1), \quad \eta = (2\varepsilon/3)^{1/2} a(\zeta + \zeta_0) \tag{8.5}$$
$$a^2 = 1 + (1 - 3c/\varepsilon)^{1/2}, \quad b^2 = 1 - (1 - 3c/\varepsilon)^{1/2} \quad (a > b > 0)$$

Здесь и ниже ζ_0 – произвольная постоянная, верхний и нижний знаки относятся к траекториям в правой и левой полуплоскостях фазового портрета соответственно.

Частота (по ζ) колебаний величин q, p задается равенством

$$\omega = \tfrac{1}{3}\pi a(6\varepsilon)^{1/2} K^{-1}(k) \tag{8.6}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. При $c \to \varepsilon/3$ из (8.6) получаем частоту малых колебаний в окрестности равновесий $Q = \pm 1$, $P = 0$, равную $\tfrac{2}{3}(6\varepsilon)^{1/2}$.

Значение $c = 0$ интеграла $K^{(0)} = \mathrm{const}$ отвечает либо неустойчивому равновесию $Q = P = 0$ (седло на фазовой плоскости), либо двоякоасимптотическим гомоклинным траекториям – сепаратрисам. На них

$$Q = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^{-1}\eta, \quad P = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{6\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{ch}^{-2}\eta$$
$$\eta = \tfrac{2}{3}\sqrt{3\varepsilon}(\zeta + \zeta_0)$$

При $c < 0$ (область вращений) происходят нелинейные колебания, для которых фазовые траектории на фиг. 2 охватывают все три положения равновесия. На этих траекториях

$$Q = a\,\mathrm{cn}(\eta, k), \quad P = \tfrac{2}{3}a[9\varepsilon(\varepsilon - 3c)]^{1/4}\,\mathrm{sn}(\eta, k)\,\mathrm{dn}(\eta, k)$$
$$k^2 = a^2/(a^2 + b^2) \quad (\sqrt{2}/2 < k < 1), \quad \eta = \tfrac{2}{3}[9\varepsilon(\varepsilon - 3c)]^{1/4}(\zeta + \zeta_0) \tag{8.7}$$
$$a^2 = 1 + (1 - 3c/\varepsilon)^{1/2}, \quad b^2 = -1 + (1 - 3c/\varepsilon)^{1/2} \quad (a > b > 0)$$

В области вращений частота задается выражением

$$\omega = \tfrac{1}{3}\pi[9\varepsilon(\varepsilon - 3c)]^{1/4} K^{-1}(k) \tag{8.8}$$

В областях колебаний и вращений функцию Гамильтона (8.4) можно привести к переменным действие – угол I', w'. В этих переменных $K^{(0)} = c(I')$, причем $\omega = \partial K^{(0)}/\partial I'$. Гамильтониан $K^{(0)}$ удовлетворяет условию невырожденности $\partial^2 K^{(0)}/\partial I'^2 \neq 0$. Действительно, в области колебаний получаем из (8.5), (8,6), что

$$\frac{\partial\omega}{\partial I'} = \frac{\pi^2(2 - k^2)}{2k^4(1 - k^2)K^3}[(2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K] \tag{8.9}$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Замечая, что производная по k от выражения в квадратных скобках в (8.9) равна $3k(K - E)$ и положительна при всех k, а при $k = 0$ это выражение равно нулю, получаем, что оно положительно при всех k из интервала (0, 1). Следовательно, $\partial\omega/\partial I' > 0$ и условие невырожденности выполняется.

В случае вращений имеем из (8.7), (8.8)

$$\frac{\partial\omega}{\partial I'} = -\frac{\pi^2(2k^2-1)}{8k^2(1-k^2)K^3}[(1-k^2)K+(2k^2-1)E] \tag{8.10}$$

Учитывая, что в области вращений $1/2 < k^2 < 1$, из (8.10) получаем, что $\partial\omega/\partial I' < 0$ и условие невырожденности здесь тоже выполнено.

Рассмотрим теперь возмущенную систему с полным гамильтонианом (8.3). Неустойчивое равновесие $Q = P = 0$ существует и в возмущенной системе, оно соответствует периодическому движению (1.3) точки m. При помощи теории периодических движений Пуанкаре [13] и теоремы Мозера об инвариантных кривых [10] можно показать, что из устойчивых равновесий $Q = \pm 1$, $P = 0$ невозмущенной системы рождается орбитально устойчивое периодическое движение точки m с периодом, равным удвоенному периоду движения (1.3).

Из невырожденности гамильтониана $K^{(0)}$ и теоремы Мозера об инвариантных кривых следует также, что если положительная величина ε достаточно мала, то траектории точки m, начинающиеся достаточно близко к неустойчивой траектории (1.3), всегда остаются в ограниченной ее окрестности. Оценку размеров этой окрестности можно получить на основании проведенного выше анализа невозмущенной системы: если траектории невозмущенной системы с гамильтонианом (8.3) начинаются достаточно близко к началу координат $Q = P = 0$, то при дальнейшем движении $|Q| < \sqrt{2}(1+g_1)$, $|P| < \frac{1}{3}\sqrt{6\varepsilon}(1+g_2)$, где g_1 и g_2 сколь угодно малы, когда ε и Q_0, P_0 стремятся к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда (MFG300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А.П., Маркеев А.П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632–636.
2. *Beletsky V.V., Kasatkin G.V., Starostin E.L.* Billiardball in a gravitational field: normal and chaotic motion // Abstracts. EUROMECH: Ist Europ. Nonlinear Oscillations Conf., Hamburg, Germany, 1993. Progr. and Abstr. P. 11.
3. *Beletsky V.V.* Regulare und Chaotische Bewegung starrer Korper. Stuttgart: Teubner-Verlag, 1995. 148 S.
4. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.
5. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
6. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. *Маркеев А.П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в системе Солнца–Юпитер // Астрон. журн. 1974. Т. 51. Вып. 3. С. 627–634.
8. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
10. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
11. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. P. 81–114.
12. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.
13. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1995