УДК 531.36

© 1996 г. А.А.Зевин

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Дан краткий обзор результатов, относящихся к поведению частот колебаний гамильтоновых систем при изменении жесткости и инерции. Найдено число частот первого и второго рода, выраженное через число положительных и отрицательных собственных значений гамильтониана. Из этих результатов, в частности, следует, что для гироскопической системы классическая теорема Релея справедлива только тогда, когда число ее частот равно числу частот системы без гироскопических сил. Найдена степень неустойчивости гироскопической системы при наличии малых диссипативных сил.

1. Рассмотрим линейную гироскопическую систему

$$M\ddot{\mathbf{x}} + G\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, M и C – симметрические матрицы инерции и жесткости, G – кососимметрическая матрица гироскопических сил; матрица M предполагается положительно определенной ($M > 0$).

Пусть $r_0 \leqslant n$ – число положительных собственных значений матрицы C. Тогда при отсутствии гироскопических сил ($G = 0$) система имеет r_0 частот колебаний ω_k^0. В соответствии с теоремой Релея [1] при увеличении жесткости и уменьшении инерции (т.е., при возрастании потенциальной и убывании кинетической энергии) частоты возрастают. Релей доказал эту теорему методом возмущений; другое известное доказательство, основанное на минимаксимальном свойстве собственных значений, принадлежит Куранту [2].

Приведем некоторые результаты, посвященные анализу и обобщению этой замечательной теоремы. Прежде всего отметим, что условие симметрии матриц M и C существенно; в противном случае, как показано в [3], для любой частоты ω_k^0 может быть найдено такое увеличение C либо уменьшение M, что ω_k^0 убывает. Таким образом, теорема Релея не может быть обобщена на системы с неконсервативными позиционными силами. Легко показать, что условие положительной определенности матрицы M также необходимо.

Первая попытка обобщить теорему Релея на системы с гироскопическими силами [4] привела к выводам, содержащим ошибку, которая осталась незамеченной, несмотря на то, что эти результаты продолжают использоваться и обсуждаться (см., например, [5]). Поэтому поясним существо предложенного [4] подхода.

Пусть $i\omega_k$ – мнимый корень характеристического уравнения, $\mathbf{x}_k$ – соответствующий собственный вектор, т.е.

$$(-\omega_k^2 M + i\omega_k G + C)\mathbf{x}_k = 0 \tag{1.2}$$

Умножив равенство (1.2) скалярно на $\mathbf{x}_k$, найдем, что ω_k удовлетворяет квадратному уравнению

$$m_k\omega^2 - g_k\omega - c_k = 0 \tag{1.3}$$

где $m_k = (M\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k)$, $g_k = (iG\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k)$ и $c_k = (C\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k)$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ означает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Так как M и C – действительные симметрические матрицы, а матрица iG эрмитова, то m_k, g_k и c_k – действительные числа, причем $m_k > 0$ в силу $M > 0$. Учитывая, что корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, можно считать, что $\omega_k > 0$, т.е. ω_k совпадает с положительным корнем уравнения (1.3). Можно показать, что ω_k имеет стационарное значение по компонентам вектора $\mathbf{x}_k$, поэтому последний можно не варьировать при вариациях жесткости и инерции.

Предположим сначала, что система статически устойчива ($C > 0$); тогда корни ω' и ω'' уравнения (1.3) противоположны по знаку. Так как $-\omega'\omega'' = c_k / m_k$ возрастает по c_k, а $\omega' + \omega'' = g_k / m_k$ не зависит от c_k, то положительный корень $\omega' = \omega_k$ возрастает при возрастании c_k, т.е., при возрастании жесткости. Аналогично показывается, что ω_k убывает при возрастании инерции.

Предположим теперь, что система статически неустойчива (среди собственных значений матрицы C есть отрицательные). Если при этом $g_k > 0, c_k < 0$ и $g_k^2 + 4c_k m_k > 0$ для некоторого вектора $\mathbf{x}_k$, то оба корня ω' и ω'' положительны. С помощью приведенных выше рассуждений можно показать, что при возрастании жесткости и убывании инерции больший корень возрастает, меньший убывает. Так как априорно неизвестно, какому из этих корней отвечает частота ω_k, то нельзя сделать вывод о ее поведении. Это обстоятельство не было учтено [4], поэтому сделанное утверждение о возрастании частот при возрастании жесткости необоснованно. Покажем, что в общем случае оно неверно.

Предположим, что матрица C имеет p отрицательных собственных значений; остальные значения положительны. Как известно [6], при четном p матрица G может быть выбрана таким образом, что все корни характеристического уравнения

$$\det\left\| M\lambda^2 + G\lambda + C \right\| = 0 \tag{1.4}$$

чисто мнимые ($\lambda_k = \pm i\omega_k$, $k = 1, \ldots, n$); т.е. имеет место гироскопическая стабилизация. Покажем, что в такой системе некоторые частоты могут убывать при возрастании C.

Без ограничения общности полагаем, что M – единичная, а C – диагональная матрица ($C = \mathrm{diag}[c_1, \ldots, c_n]$), причем, по условию, $c_k < 0$ при $k \leqslant p$, $c_k > 0$ при $k > p$. Тогда свободный член уравнения (1.4) равен

$$a_0 = \omega_1^2\omega_2^2 \ldots \omega_n^2 = \det C = c_1 c_2 \ldots c_n \tag{1.5}$$

Положим $C(\mu) = \mathrm{diag}[c_1 + \mu, c_2, \ldots, c_n]$, тогда $da_0(\mu)/d\mu = c_2 \ldots c_n$. В этом произведении нечетное число $(p-1)$ множителей c_k отрицательны, остальные положительны; поэтому $da_0(\mu)/d\mu < 0$ и, следовательно, $d\omega_k^2(\mu)/d\mu < 0$ для некоторого k. Матрица $dC(\mu)/d\mu = \mathrm{diag}[1, 0, \ldots, 0]$ неотрицательно определенная; ясно, что сколь угодно малым возмущением, не нарушающим неравенства $d\omega_k^2(\mu)/d\mu < 0$, можно сделать ее положительно определенной. Таким образом, при возрастании жесткости отдельные частоты гироскопически стабилизированной системы могут убывать. Ниже показано, что такие частоты всегда существуют.

В результате строгого решения задачи [7] было доказано, что теорема Релея полностью переносится на гироскопические системы с неотрицательно определенной матрицей жесткости ($C \geqslant 0$). В дальнейшем было получено [8] другое доказательство этого утверждения.

Рассмотрим более общую гамильтонову систему

$$J\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{y} \in R^{2n}$, J – неособая кососимметрическая матрица, A – симметрическая матрица.

Как известно, заменой

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}, \quad M\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{y} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}] \tag{1.7}$$

уравнение (1.1) приводится к виду (1.6) с

$$J = \begin{Vmatrix} -G & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} C & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Заметим, что если матрица M убывает, то M^{-1} возрастает [9], поэтому A возрастает при возрастании C и убывании M.

Пусть в (1.6) $A = A(\mu) = A_0 + \mu A_1$, причем $A_1 > 0$ (т.е. $A(\mu)$ возрастает по μ). Если λ_k – простой корень характеристического уравнения при $\mu = 0$, то $\lambda_k(\mu)$ – аналитическая функция. Стандартная процедура метода возмущений дает [10]

$$\left.\frac{d\lambda_k(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=0} = \frac{(A_1\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)}{(J\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{y}_k = [\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k]$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_k (A_0\mathbf{y}_k = \lambda_k J\mathbf{y}_k)$. Если корень λ_k кратный, но ему отвечают простые элементарные делители матрицы $J^{-1}A_0$, то при соответствующем выборе векторов $\mathbf{y}_k$ значения $d\lambda_k(\mu)/d\mu$ при $\mu = 0$ также определяются выражениями (1.9).

Пусть $\lambda_k = i\omega_k$, тогда $\lambda_k(\mu) = i\omega_k(\mu)$. Так как числитель в (1.9) положителен ($A_1 >$ > 0), то знак $d\omega_k(\mu)/d\mu$ при $\mu = 0$ совпадает со знаком $l_k = i(J\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k) = (A_0\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k) / \omega_k$.

Если $A_0 > 0$, то все корни чисто мнимые и все элементарные делители матрицы $J^{-1}A_0$ простые [10]. Поэтому все частоты ω_k возрастают с возрастанием A_0. Таким образом, теорема Релея справедлива для гамильтоновых систем с положительно определенным гамильтонианом. Напротив, если $A_0 < 0$, то все частоты убывают с возрастанием A_0.

В соответствии с введенной в [11] классификацией, частоты колебаний ω_k гамильтоновой системы, для которых $l_k > 0$ или $l_k < 0$, называются соответственно частотами первого и второго рода. Таким образом, при возрастании гамильтониана частоты первого рода возрастают, второго убывают.

Была рассмотрена [12] гамильтонова система с периодическими коэффициентами

$$\begin{gathered} J\dot{\mathbf{x}} = A(\omega t, \mu)\mathbf{x}, \\ A = A(\omega t, \mu) = A_0(\omega t) + \mu A_1(\omega t) \end{gathered} \tag{1.10}$$

где симметрические положительно определенные матрицы $A_0(\omega t)$ и $A_1(\omega t)$ периодичны по t. Доказано, что критические частоты параметрического резонанса $\omega_p(\mu)$, $p = 1$, 2,... (отвечающие границам областей устойчивости уравнения (1.10)) возрастают по μ; этот результат обобщает теорему Релея на параметрически возбуждаемые системы.

В этой же работе поставлена задача о поведении частот свободных колебаний нелинейной гамильтоновой системы

$$J\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mu) \tag{1.11}$$

при возмущении гамильтониана H. При этом предполагалось, что гессиан $H_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, \mu) = \| \partial^2 H / \partial x_p \partial x_k \|_1^{2n} > 0$ и $\partial H_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, \mu) / \partial\mu > 0$ (эти неравенства аналогичны условиям $A_0 > 0$ и $A_1 > 0$ в линейном случае). Так как здесь частоты колебаний зависят от полной энергии h, то последняя фиксировалась ($H(\mathbf{x}, \mu) = h$). Установлено, что в общем случае частота $\omega_k(h, \mu)$ может не возрастать по μ даже в системе с одной степенью свободы. Однако для значений h, при которых $\omega_k(h, \mu)$ стационарна по $h(\partial\omega_k(h, \mu)/\partial h = 0)$, имеет место неравенство $\partial\omega_k(h, \mu)/\partial\mu > 0$, т.е. справедливо утверждение, аналогичное теореме Релея.

2. Исследуем поведение частот колебаний системы (1.1) при изменении жесткости и инерции. Как отмечено выше, обобщение теоремы Релея на такую систему справедливо в предположении, что система статически устойчива, в то время как при отсутствии гироскопических сил такое предположение излишне. Это связано с тем, что при $G = 0$ все частоты первого рода.

Действительно, учитывая, что при этом $C\mathbf{x}_k = \omega_k^2 M\mathbf{x}_k$, $\mathbf{p}_k = i\omega_k M\mathbf{x}_k$ и $M > 0$, найдем

$$l_k = (A\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)/\omega_k = [(C\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) + (M^{-1}\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k)]/\omega_k = 2\omega_k(M\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) > 0 \tag{2.1}$$

Следующая теорема устанавливает число частот n_1 и n_2 первого и второго рода гамильтоновой системы (1.6) с неособой матрицей A. Заметим, что известные результаты такого типа (принадлежащие К.Р. Коваленко и М.Г. Крейну [11]), относятся к устойчивой системе (общее число частот которой $s = n$) и заключаются в следующем: число r положительных собственных значений матрицы A четно, $n_1 = r/2$ и $n_2 = n - n_1$.

В силу симметрии матрицы A ее собственные значения действительны; так как $\det A \neq 0$, то $2n - r$ значений отрицательны.

Теорема 1. Число частот колебаний системы (1.6) удовлетворяет неравенству $s \geqslant |r - n|$, причем величина $s - |r - n|$ четна; $(s + r - n)/2$ частот имеют первый род, $(s - r + n)/2$ – второй.

Доказательство. Как известно [10], существуют неособые матрицы S и D такие, что

$$J = S^T J' S, \quad A = D^T A' D \tag{2.2}$$

где J – любая неособая кососимметрическая матрица, A' – любая симметрическая матрица, имеющая то же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, что и A; индекс ^{T} означает транспонирование.

Замена $\mathbf{y} = S\mathbf{z}$ с учетом (2.2) приводит (1.6) к виду

$$J'\dot{\mathbf{z}} = R^T A' R\mathbf{z}, \quad R = DS \tag{2.3}$$

Будем считать, что

$$J' = \operatorname{diag}(J_2, \ldots, J_2), \quad J_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

а A' – диагональная матрица с элементами 1 и -1, общее число которых соответственно равно r и $2n - r$.

Соединим матрицу R непрерывной кривой с единичной матрицей I_{2n}, т.е., положим $R = R(\varepsilon)$, где $R(\varepsilon)$ – неособая матрица такая, что $R(0) = I_{2n}$, $R(1) = R$. При $\varepsilon = 0$ система (2.3) распадается на n систем вида

$$J_2\dot{\mathbf{z}}_k = \begin{Vmatrix} a_k & 0 \\ 0 & b_k \end{Vmatrix} \mathbf{z}_k \tag{2.5}$$

где a_k и b_k принимают значения 1 и -1. Если $a_k = b_k = 1$ или $a_k = b_k = -1$, то уравнени

(2.5) отвечает частота $\omega_k = 1$ соответственно первого или второго рода; в противном случае корни характеристического уравнения равны ± 1. Очевидно, что минимальное число пар $a_k = b_k$ равно $|r - n|$, причем соответствующие частоты имеют первый ($r > n$) или второй ($r < n$) род.

Полагая, что при $\varepsilon = 0$ число частот равно $|r - n|$, рассмотрим поведение системы при возрастании параметра ε на $[0, 1]$. Так как система (2.3) каноническая, то, наряду с корнем $\alpha_p(\varepsilon) + i\omega_p(\varepsilon)$, существует корень $-\alpha_p(\varepsilon) + i\omega_p(\varepsilon)$. Поэтому только кратные корни $i\omega_k(\varepsilon)$ могут сходить с мнимой оси, причем они заведомо остаются на оси, если соответствующие частоты одного рода [13]. Так как матрица $R^T(\varepsilon)A'R(\varepsilon)$ неособая, то $\omega_k(\varepsilon) \neq 0$, поэтому число частот не меняется до тех пор, пока некоторая величина $\alpha_p(\varepsilon)$ не обратится в нуль. При этом появляется двукратная (или, в общем случае, $2m$-кратная) частота $\omega_p(\varepsilon)$, "состоящая" из одинакового числа частот первого и второго рода; при дальнейшем увеличении ε эти частоты, вообще говоря, расходятся. Аналогично только мнимые корни, отвечающие частотам разного рода, могут после встречи сойти с мнимой оси. Из приведенных соображений следует, что число частот s не может быть меньше $|r - n|$, а число дополнительных частот $s - |r - n|$ четно, причем половина из них первого, половина второго рода. Следовательно, число частот первого и второго рода равно $(s + r - n)/2$ и $(s - r + n)/2$. Теорема доказана.

Учитывая, что $s \leqslant n$ при четном и $s \leqslant n - 1$ при нечетном r, найдем, что числа частот первого и второго рода удовлетворяют неравенствам

$$r - n \leqslant n_1 \leqslant [r/2], \quad n - r \leqslant n_2 \leqslant [(2n - r)/2] \tag{2.6}$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Как видно из доказательства, теорема справедлива и для неособой комплекснозначной эрмитовой матрицы A.

Проиллюстрируем теорему на примере гироскопической системы (1.1). Так как $M > 0$, то число положительных собственных значений матрицы A равно $r = n + r_0$, где r_0 – число положительных собственных значений матрицы C. Следовательно, из s частот системы (1.1) $(s + r_0)/2$ имеют первый род и $(s - r_0)/2$ – второй. В соответствии с формулой (1.9) при возрастании матрицы A (т.е., при возрастании C и убывании M) $(s + r_0)/2$ частот системы (1.1) возрастают, $(s - r_0)/2$ частот убывают. Заметим, что векторы $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{p}_k = i\omega_k M\mathbf{x}_k$ ненулевые, поэтому указанное изменение частот также имеет место, если изменяется только матрица C или M.

Из полученного результата вытекает следующее условие справедливости теоремы Релея для системы (1.1).

Следствие. В гироскопической системе теорема Релея справедлива тогда и только тогда, когда число ее частот равно числу частот системы при отсутствии гироскопических сил.

Это условие заведомо выполняется, если система статически устойчива ($C > 0$, $s = r_0 = n$), а также если степень неустойчивости (число отрицательных собственных значений матрицы C) равна единице (здесь $s = r_0 = n - 1$).

Предположим теперь, что матрица C (и, следовательно, соответствующая матрица A) особая. Число нулевых корней характеристического уравнения не зависит от матриц M и G и равно числу l нулевых собственных значений матрицы C. Поэтому при возрастании G от нуля до заданного значения частоты $\omega_k(\varepsilon)$ не обращаются в ноль; в результате рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, сохраняются. Учитывая, что матрица A имеет $n + r_0$ положительных и $n - r_0 - l$ отрицательных собственных значений, можно подсчитать минимальное и максимальное число пар $a_k = b_k \neq 0$ и тем самым найти нижнюю и верхнюю оценку числа частот системы:

$$r_0 \leqslant s \leqslant [(n + r_0)/2] + [(n - r_0 - l)/2] \tag{2.7}$$

При этом, как и в случае неособой матрицы C, $(s + r_0)/2$ частот имеют первый и $(s - r_0)/2$ второй род.

При возрастании матрицы C нулевые собственные значения становятся положительными, поэтому число частот увеличивается на l, причем все они первого рода.

3. Рассмотрим гироскопическую систему с диссипативными силами

$$M\ddot{\mathbf{x}} + \mu F\dot{\mathbf{x}} + G\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{3.1}$$

где F – симметрическая положительно определенная матрица, μ – малый параметр.

Предположим, что система статически неустойчива. При $G = 0$ число корней уравнения (1.4) с положительной вещественной частью (и, следовательно, число неограниченно возрастающих решений) равно степени неустойчивости $n - r_0$. Если последняя четна, то при определенных гироскопических силах система становится устойчивой, однако, в соответствии с четвертой теоремой Томсона–Тета [6], введение сколь угодно малых диссипативных сил разрушает эту устойчивость. Естественно степень неустойчивости полученной системы определять числом корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью. Следующая теорема показывает, что эта величина не зависит от конкретного вида диссипативных сил и равна степени статической неустойчивости.

Теорема 2. При введении малых диссипативных сил степень неустойчивости гироскопически стабилизированной системы становится равной $n - r_0$.

Доказательство. Так как, по предположению, при $\mu = 0$ система устойчива, то все корни характеристического уравнения (1.2) мнимые, причем в случае кратных корней им отвечают простые элементарные делители.

Замена (1.7) приводит уравнение (3.1) к виду

$$J\dot{\mathbf{y}} = (A_0 + \mu A_1)\mathbf{y}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & FM^{-1} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(J и A определяются по формулам (1.8)).

Пусть $\mathbf{y}_k = [\mathbf{x}_k, i\omega_k M\mathbf{x}_k]$ – собственный вектор, отвечающий корню $i\omega_k$. Формула (1.9) справедлива и в случае несимметрической матрицы A_1, поэтому

$$d\lambda_k(\mu) / d\mu\big|_{\mu=0} = -\omega_k(F\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) / l_k$$

Так как $F > 0$, то эта величина положительна, если частота ω_k второго рода ($l_k < 0$). Учитывая, что корни уравнения (3.1) комплексно сопряженные, найдем, что при малых μ число корней с положительной вещественной частью равно удвоенному числу частот второго рода, т.е., $n - r_0$ (в гироскопически стабилизированной системе $s = n$). Теорема доказана.

Как видно из доказательства, введение малых диссипативных сил увеличивает степень неустойчивости на величину $s - r_0$, равную числу дополнительных частот. Поэтому и в общем случае ($s \neq n$) степень неустойчивости гироскопической системы с неособой матрицей C при наличии малых диссипативных сил равна степени статической неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
2. *Курант Р., Гильберт Д*. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
3. *Зевин А.А*. К теории линейных неконсервативных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 386–391.

4. *Метелицын И.И.* Влияние изменения параметров линейных гироскопических систем на частоты колебаний и коэффициенты затухания // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 540–542.
5. *Сейранян А.П.* О теоремах Метелицына // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 39–43.
6. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
7. *Журавлев В.Ф.* Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606–610.
8. *Балинский А.И.* Поведение частот гироскопических систем // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 20–21.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
10. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
11. *Крейн М.Г., Якубович В.А.* Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Аналитические методы теории нелинейных колебаний: Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. Т. 1. С. 277–305.
12. *Zevin A.A.* Generalization of the Rayleigh theorem to non-linear and parametrically excited systems // J. Sound and Vibration. 1994. V. 171. N 4. P. 473–482.
13. *Крейн М.Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // В кн.: Памяти А.А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 413–498.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
23.II.1995