УДК 531.36:534

© 1996 г. В.Н. Пилипчук

К РАСЧЕТУ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Решения дифференциальных уравнений для нелинейных систем с периодическим импульсным возбуждением предлагается разыскивать в специальной форме, содержащей стандартную пару негладких периодических функций и обладающей структурой алгебры без деления. Форма пригодна и в случае возбуждений с периодической серией разрывов первого рода.

Действие мгновенных импульсов на механическую систему моделируется обычно одним из следующих двух способов: подчинением координат и скоростей дополнительным условиям в окрестностях точек локализации импульсов, например заданием скачков скоростей в моменты внешних ударов, либо введением в уравнения сингулярных членов типа δ-функций Дирака.

Основное достоинство первого подхода состоит в том, что описывающие систему дифференциальные уравнения такие же, как и при отсутствии импульсов [1]. Однако эти уравнения рассматриваются отдельно на каждом из интервалов между импульсами и, таким образом, вместо одной системы анализируется целая последовательность систем. Второй способ дает единую систему уравнений на всем временном интервале без введения упомянутых выше условий, накладываемых на переменные, но соответствующий анализ может быть выполнен корректно в рамках теории обобщенных функций (распределений) [2; 3], требующей в нелинейных случаях дополнительных математических обоснований [4].

В данной работе описывается метод, позволяющий, с одной стороны, исключить сингулярные члены в уравнениях, а с другой – путем анализа краевой задачи на стандартном отрезке получить решения в виде единого аналитического выражения на всем временном интервале.

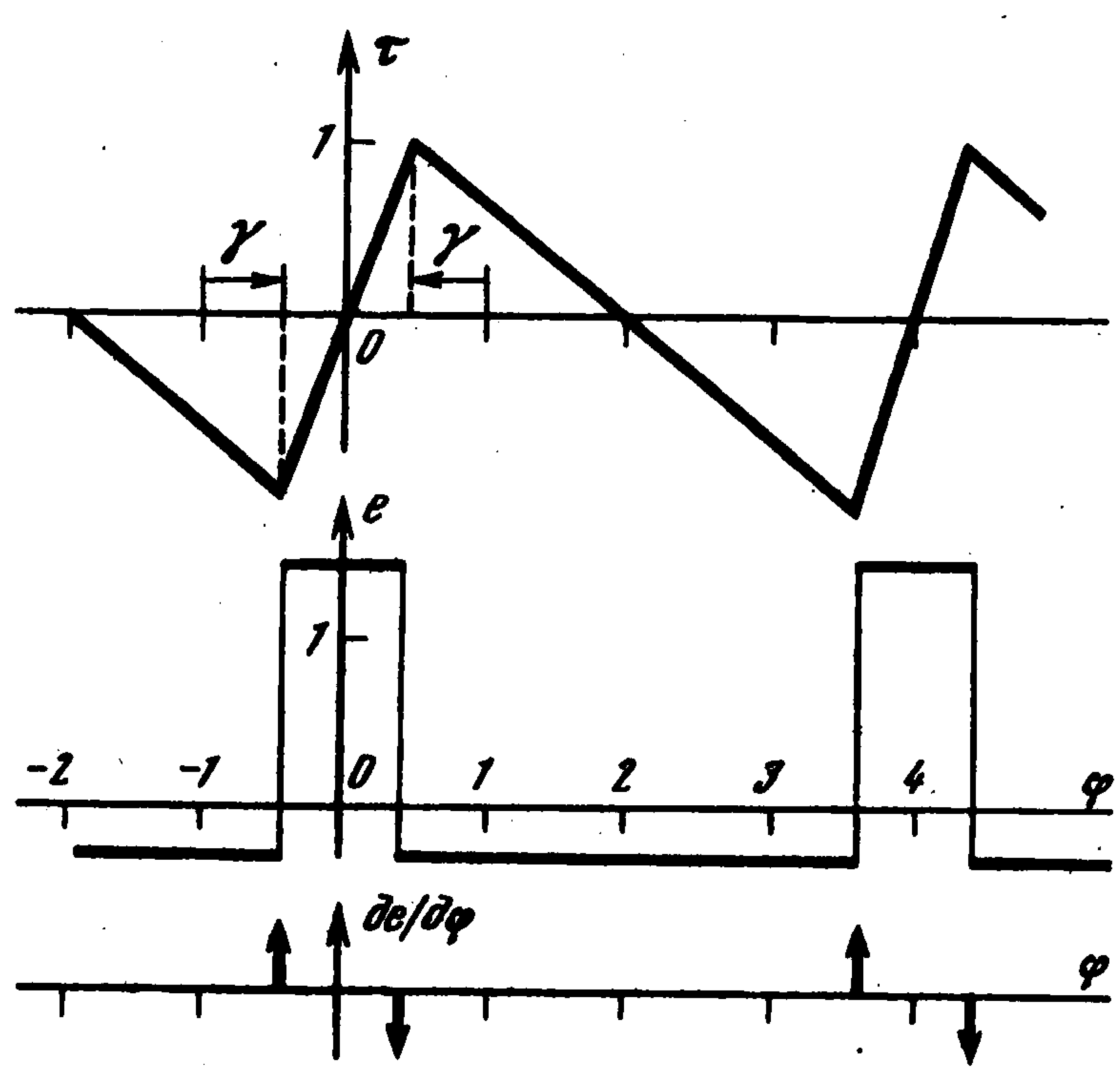
В связи с этим отметим работу [5], где решения квазилинейных систем $x(t)$ под действием импульсного или разрывного (с особенностью в точке $t = a$) воздействия разыскивается в форме

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)H(t-a) \qquad (0.1)$$

где $H(\cdot)$ – функция скачка Хэвисайда.

Аналогичная (0.1) форма решения используется для описания движущихся разрывов в теории волн [6].

Для систем с жесткими ограничителями были построены [7, 8] специальные (негладкие) преобразования, мгновенно поворачивающие координатные оси в моменты ударов системы об ограничитель. В результате преобразования система освобождается от связей, а соответствующие дифференциальные уравнения не содержат каких-либо "ударных" членов. Исполь-



Фиг. 1

зуемое ниже представление для решения мгновенно изменяет направление и масштаб времени, а не пространственных координат, в моменты действия внешних импульсов. После введения соответствующего параметра времени пространственная переменная приобретает форму элемента алгебры. Как показано далее, это позволяет легко оперировать новой пространственной переменной в преобразованиях, связанных с решением дифференциальных уравнений.

Описанные ниже соотношения получены ранее для симметричного случая [9, 10] ($\gamma = 0$; фиг. 1) и использовались при расчете колебаний сильно нелинейных механических систем [11]. Вопрос об обобщении соотношений с целью учета асимметрии ($\gamma \neq 0$) поставлен Г.А. Старушенко при исследовании статики упругих систем периодически неоднородной структуры.

1. Кусочно-линейный периодический аргумент. Пусть $\tau(\varphi; \gamma)$ – пилообразная кусочно-гладкая функция аргумента φ с единичной амплитудой и периодом, равным четырем (такая нормировка периода удобна для дальнейших преобразований):

$$\tau(\varphi;\gamma)=\begin{cases}\varphi/(1-\gamma), & -1+\gamma\leq\varphi\leq 1-\gamma\\ (-\varphi+2)/(1+\gamma), & 1-\gamma\leq\varphi\leq 3+\gamma\end{cases} \tag{1.1}$$

$$\tau(\varphi+4;\gamma)\equiv\tau(\varphi;\gamma)$$

где γ ($-1 < \gamma < 1$) – параметр, характеризующий наклон "пилы" (фиг. 1). При $\gamma = 0$ "пила" становится симметричной.

Обозначим $e(\varphi; \gamma) = \partial\tau(\varphi; \gamma)/\partial\varphi$ обобщенную производную по аргументу φ (используемые здесь обозначения связаны с ролью функций τ, e в контексте данной работы: далее τ – новая временная переменная, e – базисный элемент алгебры).

Предложение 1. Любая периодическая функция $x(\varphi)$ с периодом $T = 4$ может быть представлена в виде

$$x = X(\tau) + Y(\tau)e; \quad \tau = \tau(\varphi; \gamma), \quad e = e(\varphi; \gamma) \tag{1.2}$$

Доказательство. Определим $X(\tau)$, $Y(\tau)$ так:

$$X=\frac{1}{2\alpha}\left\{\frac{1}{1+\gamma}x[(1-\gamma)\tau]+\frac{1}{1-\gamma}x[2-(1+\gamma)\tau]\right\}$$

$$Y=\frac{1}{2\alpha}\{x[(1-\gamma)\tau]-x[2-(1+\gamma)\tau]\}, \quad \alpha=\frac{1}{1-\gamma^2}$$

Тогда на периоде имеем:
при $-1 + \gamma \leq \varphi \leq 1 - \gamma$

$$x(\varphi)=X\left(\frac{\varphi}{1-\gamma}\right)+Y\left(\frac{\varphi}{1-\gamma}\right)\frac{1}{1-\gamma}\equiv x(\varphi)$$

при $1 - \gamma \leq \varphi \leq 3 + \gamma$

$$x(\varphi)=X\left(\frac{-\varphi+2}{1+\gamma}\right)-Y\left(\frac{-\varphi+2}{1+\gamma}\right)\frac{1}{1+\gamma}\equiv x(\varphi)$$

Замечание 1. Если функция $x(\varphi)$ имеет период $4a$, то в выражениях для X, Y следует произвести замену

$$\tau(\varphi; \gamma) \to a\tau(\varphi/a; \gamma)$$

Предложение 2. Элементы (1.2) обладают алгебраической структурой (с базисными элементами алгебры 1, e), так что для какой-либо регулярной функции $f(x)$ имеет место соотношение

$$f(X + Ye) = R_f + I_f e \tag{1.3}$$

$$R_f = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{1+\gamma} f(Z_+) + \frac{1}{1-\gamma} f(Z_-)\right]$$

$$I_f = \frac{1}{2\alpha}[f(Z_+) - f(Z_-)], \quad Z_\pm = X \pm \frac{Y}{1 \mp \gamma}$$

Доказательство. Эти соотношения могут быть непосредственно проверены, так как почти всюду по φ либо $e = 1/(1-\gamma)$, либо $e = -1/(1-\gamma)$. "Таблица умножения" данной алгебры такова:

$$e^2 = \alpha + \beta e, \quad \beta = 2\gamma\alpha \tag{1.4}$$

В случае симметричной пилы, $\gamma = 0$ равенство (1.4) приобретает наиболее простой вид ($e^2 = 1$) и элементы (1.2) образуют алгебру гиперболических чисел [12]. Такой вариант представления периодических решений использовался ранее [9–11].

Предложение 3. Результат дифференцирования представления (1.2) для непрерывной функции $x(\varphi)$ остается в рассматриваемой алгебре.

Доказательство. Этот факт очевиден, поскольку производная непрерывной периодической функции есть функция, удовлетворяющая условиям Предложения 1. Для дальнейшего изложения приведем, однако, соответствующее выражение для производной:

$$dx/d\varphi = \alpha Y' + (X' + \beta Y')e + Y\partial e/\partial\varphi$$

где штрих означает дифференцирование по переменной τ. Поскольку исходное выражение (1.2) содержит функцию $e = e(\varphi)$ с разрывами первого рода в точках $\Lambda = \{\varphi \cdot \tau(\varphi) = \pm 1\}$, результат дифференцирования формально содержит периодический сингулярный (последний в правой части) член. В случае непрерывной функции $x(\varphi)$ этот член следует отбросить, так как δ-импульсы

$$\frac{\partial e}{\partial\varphi} = 2\alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\varphi + 1 - \gamma - 4k) - \delta(\varphi - 1 + \gamma - 4k)] \tag{1.5}$$

"сосредоточены" в точках, где Y-составляющая функции $x(\varphi)$ обращается в нуль: $Y|_{\varphi \in \Lambda} = Y|_{\tau = \pm 1} = 0$. Если же допустить наличие разрывов первого рода у исходной функции $x(\varphi)$ в точках Λ, то появившимся сингулярным членом можно, как показано далее, распорядиться с целью исключения сингулярных слагаемых в уравнениях движения.

Предложение 4. При условии

$$\int_{-1}^{1} X(\tau)d\varphi = 0$$

результат интегрирования выражения (1.2) остается в рассматриваемой алгебре:

$$\int (X + Ye)d\varphi = Q(\tau) + P(\tau)e$$

$$Q = \int\left[Y(\tau) - \frac{\beta}{\alpha}X(\tau)\right]d\tau, \quad P = \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{\tau} X(\xi)d\xi$$

Доказательство. Равенство может быть проверено дифференцированием по переменной φ.

2. Система с периодическим импульсным возбуждением. Рассмотрим механическую систему с периодическим возбуждением, описываемую уравнением

$$\dot{x} = f(x, \varphi) + p\partial e/\partial\varphi; \quad x \in R^n, \quad \varphi = \omega t \tag{2.1}$$

где точка означает дифференцирование по переменной t, период правой части по переменной φ равен четырем, $\gamma(-1 < \gamma < 1)$ – заданный параметр, p – постоянный n-мерный вектор, вектор-функция f – регулярная составляющая правой части предполагается непрерывной по каждой из совокупности переменных x и кусочно-непрерывной по переменной φ: допускаются разрывы первого рода в точках локализации периодически действующих δ-импульсов $\partial e/\partial\varphi$ (1.5).

Сделанные допущения позволяют рассматривать равенство (2.1) в смысле распределения (по переменной t).

Будем разыскивать периодическое решение уравнения (2.1) в форме

$$x = X(\tau) + Y(\tau)e;\ \ \tau = \tau(\varphi;\gamma),\ \ e = e(\varphi;\gamma) \tag{2.2}$$

где X, Y – подлежащие определению вектор-функции. Идея представления искомого решения в форме (2.2) основана на возможности представления любой периодической функции в форме (1.2) (Предложение 1).

Подставляя (2.2) в (2.1) и принимая во внимание соотношения (1.2)–(1.4), будем иметь

$$\omega\alpha Y' - R_f + [\omega(X' + \beta Y') - I_f]e + (Y\omega - p)\partial e/\partial\varphi = 0 \tag{2.3}$$

$$R_f = \frac{1}{2\alpha}\left\{\frac{1}{1+\gamma}f[Z_+,(1-\gamma)\tau] + \frac{1}{1-\gamma}f[Z_-,2-(1+\gamma)\tau]\right\}$$

$$I_f = \frac{1}{2\alpha}\left\{f[Z_+,(1-\gamma)\tau] - f[Z_-,2-(1+\gamma)\tau]\right\}$$

Исключив в левой части уравнения (2.3) последнее слагаемое (периодический сингулярный член) посредством условий, налагаемых на Y – составляющую искомого решения

$$Y|_{\tau=\pm1} = p/\omega \tag{2.4}$$

заметим, что оставшиеся слагаемые образуют элемент рассматриваемой алгебры. Приравнивая нулю отдельно коэффициенты при базисных элементах, получаем систему уравнений

$$\omega\alpha Y' = R_f,\ \ \omega(X' + \beta Y') = I_f \tag{2.5}$$

Таким образом, выполнен переход от исходной системы с периодическим импульсным воздействием к краевой задаче (2.4), (2.5) на стандартном интервале $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, не содержащей каких-либо сингулярных членов. Если $p = 0$, т.е. сингулярная периодическая составляющая в исходном уравнении отсутствует, краевые условия становятся однородными.

Пример. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Mx + p\partial e/\partial\varphi,\ \ \varphi = \omega t$$

где M – постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица, имеющая ортонормированную систему собственных векторов e_j:

$$Me_j = \lambda_j e_j\ \ (j = 1,\dots,n)$$

Уравнения (2.5) в данном случае имеют вид

$$X = \omega M^{-1}Y',\ \ \omega(X' + \beta Y') = MY \tag{2.6}$$

Исключив из второго уравнения вектор X при помощи первого уравнения, будем иметь уравнение

$$\omega^2 Y'' + \omega\frac{\beta}{\alpha}MY' - \frac{1}{\alpha}M^2 Y = 0$$

решение которого при краевых условиях (2.4) находим в виде

$$Y=\frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{n}p^j e_j\left[\operatorname{ch}(\gamma\zeta_j)\frac{\operatorname{ch}(\zeta_j)}{\operatorname{ch}\zeta_j}+\operatorname{sh}(\gamma\zeta_j)\frac{\operatorname{sh}(\zeta_j)}{\operatorname{sh}\zeta_j}\right]\exp(-\gamma\zeta_j\tau),\quad \zeta_j=\frac{\lambda_j}{\omega} \tag{2.7}$$

где $p^j=e_j^T p$ – координаты вектора p в базисе $\{e_1,..., e_n\}$. X – составляющую решения дает первое равенство (2.6).

3. Параметрическое возбуждение. Рассмотрим случай параметрического возбуждения на примере линейной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x}+[q(\varphi)+p\partial e/\partial\varphi]x=0;\quad x\in R^n,\ \ \varphi=\omega t \tag{3.1}$$

где p – постоянная $(n\times n)$-матрица, $q(\varphi)$ – периодическая с периодом $T = 4$ кусочно-непрерывная матрица-функция такой же размерности (допускаются разрывы первого рода в точках Λ действия импульсов).

Представим регулярную составляющую параметрического возбуждения в виде

$$q(\varphi)=Q(\tau)+P(\tau)e \tag{3.2}$$

и периодические с периодом 4 по переменной $\varphi = \omega t$ решения уравнения (3.1) будем разыскивать в форме (2.2).

Подставляя (2.2), (3.2) в уравнение (3.1) и принимая во внимание равенство $e^2 = \alpha+\beta e$, при необходимом условии непрерывности вектор-функции $x(t)$

$$Y|_{\tau=\pm1}=0 \tag{3.3}$$

получим равенство, связывающее e, $\partial e/\partial\varphi$, $e\partial e/\partial\varphi$.

Поскольку в смысле распределений имеет место соотношение

$$e\frac{\partial e}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\beta\frac{\partial e}{\partial\varphi} \tag{3.4}$$

принимая во внимание (3.3), из упомянутого выше равенства получаем

$$\begin{gathered}\omega^2(\alpha X''+\alpha\beta Y'')+QX+\alpha PY=0\\ \omega^2[(\alpha+\beta^2)Y''+\beta X'']+PX+QY+\beta PY=0\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$[\omega^2(X'+\beta Y')+pX]|_{\tau=\pm1}=0 \tag{3.6}$$

Вместе с условием (3.3) эти соотношения образуют краевую задачу для определения вектор-функций X, Y и соответствующих связей между параметрами, при которых периодические решения существуют.

Заметим, что в случае импульсов постоянного направления в условии (3.6) необходимо вместо p подставить $\pm p$ или $\mp p$ в зависимости от направления действия импульсов.

Покажем, что в смысле распределений справедливо равенство (3.4), полученное в результате формального дифференцирования обеих частей равенства (1.4). В теории обобщенных функций произведение δ-функции Дирака на функцию, имеющую разрыв в "точке локализации" δ-импульса в общем случае не имеет определенного смысла [2–4]. Поскольку именно такие функции, с особенностями в точках $\Lambda=\{t:\ \tau(\omega t)=\pm1\}$, и перемножаются в левой части равенства (3.4), рассмотрим последнее с позиций теории обобщенных функций локально, в окрестности одной из точек множества Λ, а именно, $t = 1-\gamma$ (принимаем $\omega = 1$).

Возможность придать определенный смысл левой части (3.4) обусловлена в конечном счете тем, что оба сомножителя порождены одной и той же допредельной последовательностью гладких функций. Так, пусть $\omega_\varepsilon(\varphi)$ – последовательность гладких функций ("шапочек" [2]), равных нулю вне интервала $-\varepsilon < \varphi < \varepsilon$ и таких, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(\varphi) d\varphi = 1 \quad \text{при всех } \varepsilon$$

В смысле слабого предела имеем $\omega_\varepsilon(\varphi) \to \delta(\varphi)$ при $\varepsilon \to 0$. Последовательности гладких функций, аппроксимирующие функции e и e' в окрестности точки $t = 1 - \gamma$ могут быть выбраны так:

$$e_\varepsilon = \frac{1}{1-\gamma} - \beta\theta_\varepsilon(t-1+\gamma), \quad \frac{\partial e_\varepsilon}{\partial\varphi} = -\beta\omega_\varepsilon(t-1+\gamma); \quad \theta_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{\varphi} \omega_\varepsilon(\xi) d\xi \tag{3.7}$$

$(-1 + \gamma < t < 3 + \gamma)$

В смысле слабого предела имеем

$e_\varepsilon \to e$, $\partial e_\varepsilon/\partial\varphi \to \partial e/\partial\varphi$ при $\varepsilon \to 0$

$(-1 + \gamma < t < 3 + \gamma)$

Рассмотрим допредельное равенство (3.4). Заменив e, e' на e_ε, e'_ε, после алгебраических преобразований получим

$$\theta_\varepsilon\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon/2 \tag{3.8}$$

Сместим для простоты начало отсчета в точку $t = 1 - \gamma$ и покажем, что в смысле слабого предела левая часть равенства при $\varepsilon \to 0$ дает $\delta(t)/2$ [4], т.е. то же, что и правая.

Заметим, что (всюду далее интегрирование ведется от $-\varepsilon$ до ε)

$$\int \theta_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t)dt = \int \theta_\varepsilon(d\theta_\varepsilon / dt)dt = \theta_\varepsilon^2 / 2|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1/2 \tag{3.9}$$

Пусть $\phi(t)$ – непрерывная пробная функция. В ε-окрестности точки $t = 0$ имеем $|\phi(t) - \phi(0)| < 2\eta$. Отсюда при учете (3.9) получаем оценку

$$\left|\int \theta_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t)\phi(t)dt - \phi(0)/2\right| = \leq \int \theta_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t)\left|\phi(t) - \phi(0)\right|dt \leq \eta$$

Это и означает, что

$$\int \theta_\varepsilon(t)\omega_\varepsilon(t)\phi(t)dt \to \phi(0)/2 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

Без сужения общности преобразований далее будем считать, что $\omega = 1$ ($\varphi \equiv t$). Этого всегда можно добиться масштабным преобразованием переменных.

Пример. В качестве примера рассмотрим случай системы с одной степенью свободы. Пусть P, $Q = \text{const}$. Уравнение (3.1) при этом принимает вид

$$\ddot{x} + [Q + Pe + p\partial e/\partial t]x = 0; \quad e = e(t; \gamma), \quad x \in R \tag{3.10}$$

Изучим связь между параметрами регулярной (кусочно-линейной) и импульсной составляющих воздействия, при которой возможны периодические колебания системы с периодом, равным периоду воздействия.

Положим

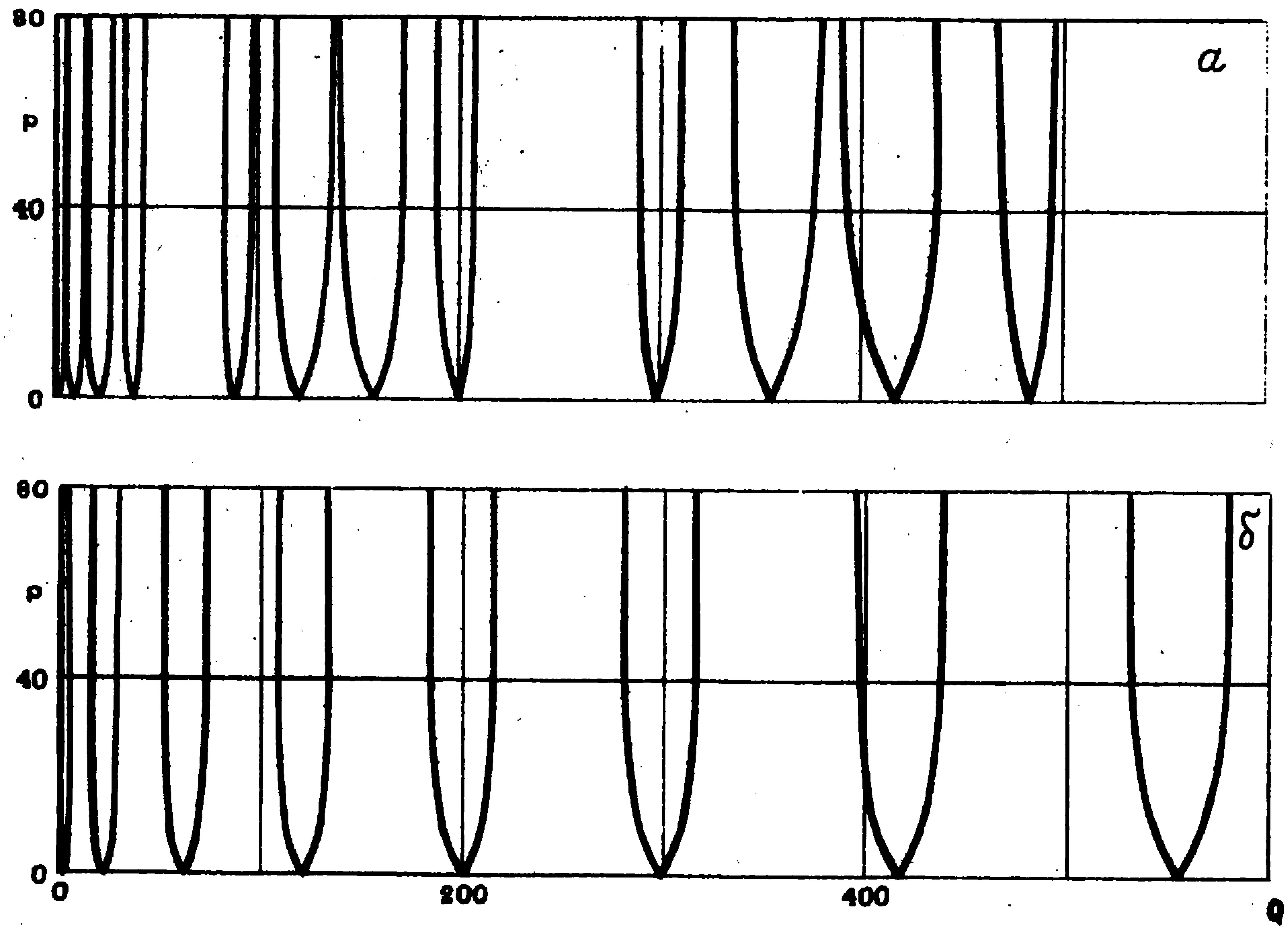
$x = X + Ye$; $X = B\exp(\lambda\tau)$, $Y = B\mu\exp(\lambda\tau)$; $B, \mu, \lambda = \text{const}$.

Из дифференциальных уравнений для X, Y (3.5) при условии $B \neq 0$ получаем характеристическое уравнение, имеющее следующие две пары корней:

$$\lambda^2 = -(1-\gamma)P - (1-\gamma)^2 Q \equiv \pm k^2, \quad \lambda^2 = (1+\gamma)P - (1+\gamma)^2 Q \equiv \pm l^2$$

Рассмотрим случай отрицательных пар. Это означает, что регулярная часть коэффициента при x в уравнении (3.10) положительна:

$Q + Pe(t; \gamma) > 0$ при всех t



Фиг. 2

Общее решение системы уравнений при этом условии будет иметь вид

$$X = B_1 \sin k\tau + B_2 \cos k\tau + B_3 \sin l\tau + B_4 \cos l\tau$$

$$Y = \mu_1 (B_1 \sin k\tau + B_2 \cos k\tau) + \mu_2 (B_3 \sin l\tau + B_4 \cos l\tau)$$

$$\mu_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{-\alpha k^2 + Q}{-\beta k^2 + P}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{\alpha}\frac{-\alpha l^2 + Q}{-\beta l^2 + P}$$

Ввиду однородности краевых условий требование нетривиальности решения приводит к следующей зависимости $p = p(P, Q; \gamma)$:

$$p^2 = -\{[2(k^2\mu_1\mu_1^2 + l^2\mu_1^2\mu_2)\beta + (k^2 + l^2)\beta^2\mu_1^2\mu_2^2 + k^2\mu_2^2 + l^2\mu_1^2]\times$$

$$\times\frac{1}{4}\sin 2k \sin 2l - [(\mu_1^2\mu_2 + \mu_1\mu_2^2)\beta + \beta^2\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1\mu_2]\times$$

$$\times[\cos^2 k \sin^2 l + \cos^2 l \sin^2 k]kl\}[(\mu_1 - \mu_2)^2 \frac{1}{4}\sin 2k \sin 2l]^{-1} \qquad (3.11)$$

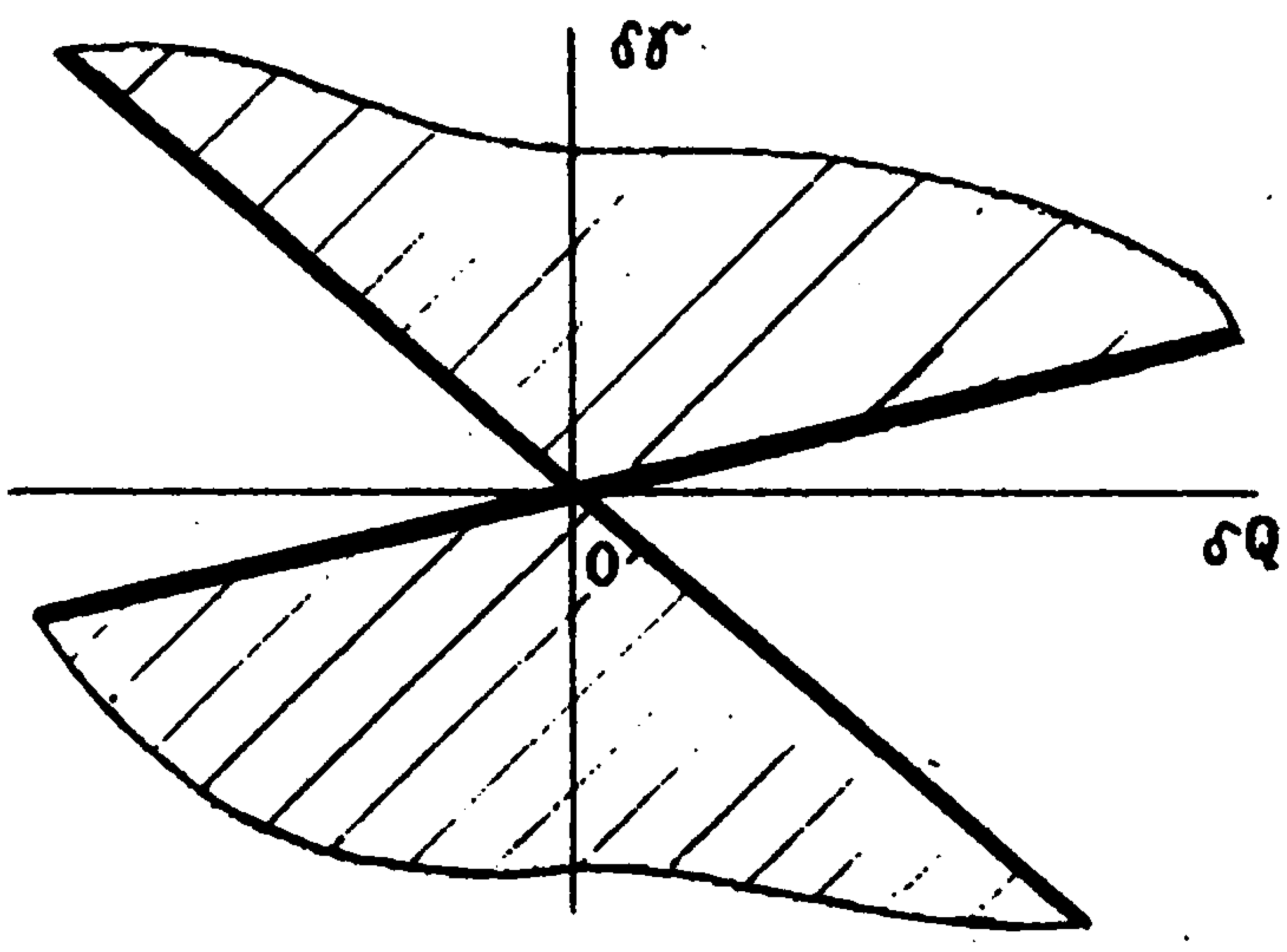
Зависимость p от Q (при фиксированных P, γ) имеет характерную для подобных задач ветвистую (зонную) структуру (см. фиг. 2, где ввиду симметрии показана только верхняя полуплоскость, вычисления выполнены при значении $P = 10^{-4}$). Любопытный эффект наблюдается при варьировании параметра γ $(-1 < \gamma < 1)$, характеризующего наклон "пилы". Речь идет о поочередном "схлопывании" последовательностей зон, регулярно расположенных через каждые s зон, где s – зависящее от параметра γ целое число (форма зависимости будет установлена далее). Так, при $\gamma = 1/5$ отсутствует каждая пятая зона, а при $\gamma = 1/2$ – каждая вторая (см. фиг. 2,*а* и *б* соответственно).

Для объяснения этого эффекта рассмотрим случай $P = 0$, когда приведенная выше зависимость приобретает следующий, более простой вид:

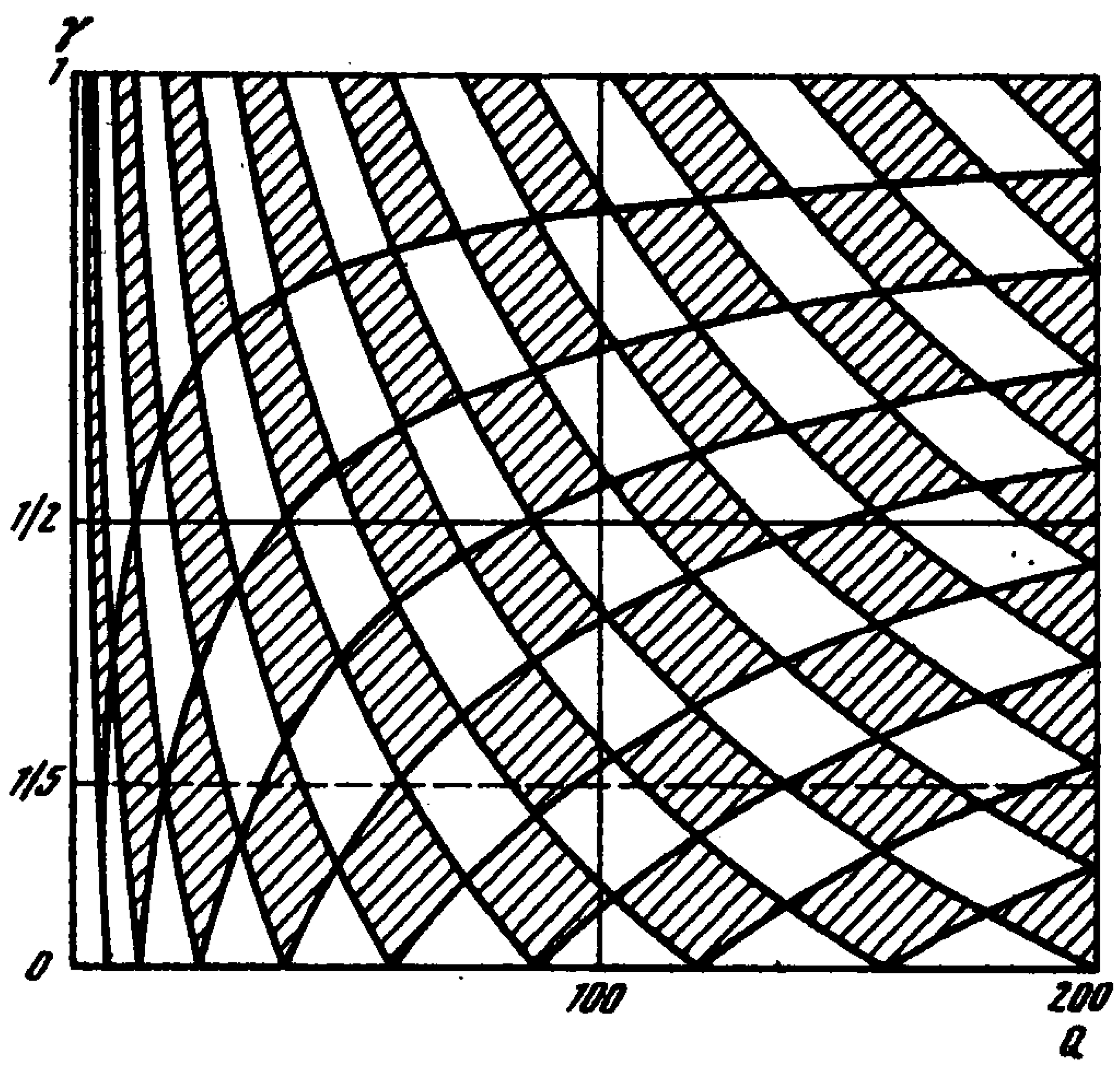
$$p^2 = -\frac{Q}{\alpha^2}\frac{\sin^2(k+l)}{\sin 2k \sin 2l}; \quad k = (1-\gamma)Q^{1/2}, \quad l = (1+\gamma)Q^{1/2} \qquad (3.12)$$

Проанализируем это выражение. Числитель обращается в нуль при значениях

$$Q = (j\pi/2)^2, \quad j = 0, 1, 2, ... \qquad (3.13)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Из этих точек на оси OQ исходят ветви зависимости p от Q (зоны). Однако, если параметр наклона "пилы" γ рационален, т.е.

$$|\gamma| = m/s; \quad m = 1,\dots, s-1$$

то в каждой s-й точке множества $Q = (j\pi/2)^2$ ($j = s, 2s, 3s,\dots$) обращается в нуль и знаменатель рассматриваемого выражения (3.12). Это и означает "схлопывание" каждой s-й зоны.

Ситуация становится более наглядной при рассмотрении зависимости $p = p(Q;\gamma)$ в трехмерном пространстве. В самом деле, соответствующая поверхность имеет ячеистую "сотовую" структуру, а на фиг. 2 показаны ее сечения плоскостями $\gamma = 1/5$ и $\gamma = 1/2$ в положительном полупространстве $p > 0$. О взаимном расположении ячеек в пространстве дает представление геометрия области определения выражения $p(Q;\gamma)$.

Рассмотрим сначала локально на плоскости $Q\gamma$ окрестность одной из точек исчезновения зоны. Положим

$$Q = (s\pi/2)^2(1+\delta Q), \quad \gamma = m(1+\delta\gamma)/s \tag{3.14}$$

где $|\delta\gamma| \ll 1$, $|\delta Q| \ll 1$.

Раскладывая числитель и знаменатель выражения (3.12) по степеням δQ, $\delta\gamma$ и сохраняя лишь первые отличные от нуля члены, получаем

$$p = \pm\frac{\pi}{2}\frac{(s^2-m^2)\delta Q}{[m^2(\delta Q+2\delta\gamma)^2 - s^2(\delta Q)^2]^{1/2}} \tag{3.15}$$

На фиг. 3 заштрихована область, где определено выражение (3.15). Видно, что при подходе к значению $\delta\gamma = 0$ ($\gamma = m/s$) ширина этой области уменьшается до нуля, поэтому рассматриваемая зона пропадает ("схлопывается"). Глобально фрагмент области определения выражения (3.12) показан на фиг. 4 (заштрихованные участки). Ввиду симметрии показана только верхняя полуплоскость, для положительных значений γ. Сечения, показанные на фиг. 2,*а*, *б* проходят соответственно вдоль линий $\gamma = 1/2$, $\gamma = 1/5$. Когда параметр γ рационален, на прямой γ = const в плоскости $Q\gamma$ оказывается бесконечная последовательность точек сужения области определения, что и означает схлопывание соответствующей последовательности зон.

4. Замечания по использованию метода осреднения. Описанные выше преобразования пригодны для построения периодических режимов, реализующихся, вообще говоря, лишь при определенных начальных условиях. Решение задачи Коши может быть получено при помощи идеи осреднения. В данном случае удобен формализм метода двухмасштабных разложений [8, 13]. Это обстоятельство обусловлено спецификой используемого преобразования (1.2), связывающего новую временную переменную τ с темпом возбуждения.

Будем считать, что имеет место неравенство

$$1/\omega \equiv \varepsilon \ll 1 \tag{4.1}$$

т.е., что темп возбуждения высок в исходном временном масштабе t. Рассмотрим уравнение (2.1) при следующем начальном условии:

$$x|_{t=0} = x^\circ \tag{4.2}$$

Решение задачи (2.1), (4.2) будем искать в форме

$$x = X(\tau, t^\circ) + Y(\tau, t^\circ)e; \quad \tau = \tau(t/\varepsilon), \quad e = e(t/\varepsilon) \tag{4.3}$$

где обозначение $t^\circ \equiv t$ введено для удобства дальнейших преобразований. Таким образом, искомое решение предполагается зависящим от двух временных переменных: "быстрой" (осциллирующей) τ и "медленной" t°.

Дальнейшая процедура допускает зависимость правой части системы (2.1) дополнительно от переменной t°:

$$p = p(t^\circ), \quad f = f(x, \varphi, t^\circ)$$

Подставляя (4.3) в (2.1), придем к системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} + \beta\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \varepsilon\left(I_f - \frac{\partial Y}{\partial t^\circ}\right), \quad \alpha\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \varepsilon\left(R_f - \frac{\partial X}{\partial t^\circ}\right) \tag{4.4}$$

с условиями

$$Y|_{\tau=\pm 1} = \varepsilon p \tag{4.5}$$

Асимптотическое ($\varepsilon \to 0$) решение задачи (4.4), (4.5) может быть найдено стандартной процедурой метода двухмасштабных разложений [8, 13] в форме рядов по степеням параметра ε.

5. Заключение. В предлагаемой методике существенную роль играет стандартная пара негладких периодических функций, сшивающая куски решения (в промежутках между импульсами) в единое аналитическое выражение на всем временном интервале. В симметричном случае ($\gamma = 0$) используемая пара функций $\{\tau, e\}$ естественным образом связана с движением свободной материальной точки между двумя жесткими ограничителями, т.е. одним из двух простейших механических осцилляторов. Речь идет о виброударной системе с одной ударной парой и гармоническом осцилляторе (последний, как известно, порождает обладающую рядом удобных математических свойств пару тригонометрических функций $\{\sin t, \cos t\}$). Таким образом, предложенная "процедура сшивки" имеет и определенное физическое содержание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987. 287 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
3. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

4. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 63–126.
5. *Liu Zheng-rong*. Discontinuous and impulsive excitation // Appl. Math. and Mech. 1987. V. 8. N 1. P. 31–35.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
7. *Журавлев В.Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. N 2. С. 30–34.
8. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
9. *Пилипчук В.Н.* О преобразовании колебательных систем при помощи пары негладких периодических функций // Докл. АН УССР. 1988. Сер. А. № 4. С. 37–40.
10. *Pilipchuk V.N.* On one form of periodic solutions representation (non-smooth transformations of arguments, the corresponding algebraic structures, and applications // Intern. Congr. of Mathematicians. Zurich, 1994. Short Communications. P. 202.
11. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973, 416 с.
13. *Кузмак Г.Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // ПММ. Т. 23. Вып. 3. С. 515–526.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
15.XII.1994