УДК 531.36

© 1996 г. В.Б. Колмановский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Предлагается способ исследования устойчивости систем нейтрального типа, основанный на использовании второго метода Ляпунова. В качестве примера установлены условия устойчивости системы хищник–жертва и шунтированной линии передачи энергии.

1. Постановка задачи. Системами с последействием нейтрального типа принято называть системы, скорость эволюции которых может зависеть от предшествующих состояний и скоростей системы [1–3]. Указанные системы используются при моделировании различных реальных процессов, например неустановившегося движения тел в сплошной среде (явление аэроавтоупругости) [4], управление турбинами при наличии гидроударных воздействий [5], колебания в длинных линиях [6], взаимодействие популяций [7, 8] и ряде других [3, 9].

При этом одна из основных задач, возникающая в приложениях, связана с изучением устойчивости и состоит в следующем. Пусть $\mathbb{R}^n$ – линейное действительное n-мерное пространство, снабженное какой-нибудь нормой $|\cdot|$. Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \geqslant t_0 \tag{1.1}$$

$$x_{t_0} = \psi, \quad \dot{x}_{t_0} = \dot{\psi} \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, функция $x_t = x(t+\theta)$, где для любого фиксированного t аргумент θ пробегает все значения от $-\infty$ до 0, заданная начальная функция ψ: $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна. Относительно функционала $(t, \psi, \varphi) \to F(t, \psi, \varphi)$ предполагается, что он определен на $[t_0, \infty) \times C(-\infty, 0] \times L_\infty(-\infty, 0]$, непрерывен на $[t_0, \infty) \times C(-\infty, 0] \times L_1^N(-\infty, 0]$ при всех $N > 0$ и для любого ограниченного множества $K \subset C(-\infty, 0] \times L_\infty(-\infty, 0]$ существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$, $L > 0$, что

$$|F(t,\psi_1,\varphi_1) - F(t,\psi_2,\varphi_2)| \leqslant L[\sup_{\theta\leqslant 0}|\psi_1(\theta)-\psi_2(\theta)| +$$

$$+ \operatorname{vrai\,sup}_{-\infty<\tau\leqslant-\varepsilon}|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|] + l \operatorname{vrai\,sup}_{-\varepsilon\leqslant t\leqslant 0}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|$$

Здесь $t \geqslant t_0$, $l \in [0, 1)$, $(\psi_i, \varphi_i) \in K$ $(i = 1, 2)$ и $L_1^N(-\infty, 0]$ есть подпространство функций из $L_\infty(-\infty, 0]$ с конечной нормой в $L_1(-\infty, 0]$, норма которых в L_∞ не превосходит N. При сделанных предположениях ввиду [9] справедлива теорема (локальная) о существовании и единственности решения задачи (1.1), (1.2), которым называется абсолютно непрерывная функция x, удовлетворяющая соотношениям (1.1), (1.2) почти всюду. Как и обычно в теории устойчивости без ограничения общности, можно считать, что

$$F(t, 0, 0) \equiv 0, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

Определение. Тривиальное решение задачи (1.1)–(1.3) называется

1) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$ при любых начальных условиях, удовлетворяющих неравенству $\sup_{\theta \leqslant 0}|\psi(\theta)| + \operatorname{vrai}\sup_{\theta \leqslant 0}|\dot\psi(\theta)| < \delta(\varepsilon)$;

2) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\lim x(t) = 0$, $t \to \infty$ для всех начальных условий из некоторой области в $C(-\infty, 0] \times L_\infty(-\infty, 0]$.

Одним из способов изучения устойчивости нулевого решения системы (1.1) является второй метод Ляпунова. Для систем запаздывающего типа, когда $F(t, x_t, \dot x_t) \equiv F(t, x_t)$, сформулированы [10] общие теоремы об устойчивости в терминах существования положительно определенных функционалов Ляпунова, зависящих от x_t, которые впоследствии модифицировались в различных направлениях [2, 3, 7–9, 11]. Эти теоремы можно перенести без особых изменений и на системы (1.1). Однако такое формальное обобщение имеет ограниченную применимость вследствие зависимости правых частей системы (1.1) также и от предшествующих значений скоростей $\dot x_t$. Ввиду этого общие теоремы второго метода Ляпунова для систем нейтрального типа (1.1) формулируются либо в терминах существования вырожденных функционалов, либо функционалов, зависящих как от x_t, так и $\dot x_t$ (см., например, [3, 9]).

При этом для некоторых конкретных систем упомянутые функционалы были построены и с их помощью установлены условия устойчивости непосредственно в зависимости от характеристик рассматриваемых уравнений [2, 3, 7–9]. Кроме того, вид построенных функционалов позволяет усмотреть некоторую связь между этими функционалами и функциями Ляпунова для подходящим образом подобранных обыкновенных уравнений.

Ниже предлагается процедура построения функционалов Ляпунова V в виде $V = V_1 + V_2$ для уравнений нейтрального типа (1.1), которая для частного случая уравнений (1.1) с запаздыванием (т.е. $F(t, x_t, \dot x_t) \equiv F(t, x_t)$) рассмотрена в [12].

Процедура состоит в следующем.

1°. Преобразуем правую часть F уравнения (1.1) так, чтобы представить ее в виде суммы двух слагаемых, первое из которых зависит только от текущего состояния системы, т.е.

$$\dot x(t) = F(t, x(t), \dot x(t)), \quad F = F_1(t, x(t)) + F_2(t, x_t, \dot x_t) \tag{1.4}$$

$$F_1(t, 0) = 0, \quad F_2(t, 0, 0) = 0$$

2°. Отбрасывая F_2 в преобразованном уравнении, получим вспомогательное обыкновенное уравнение $\dot y(t) = F_1(t, y(t))$, для которого следует построить функцию Ляпунова $\upsilon(t, y)$.

3°. Заменим второй аргумент у функции $\upsilon(t, y)$ в зависимости от преобразования, использованного на первом этапе. При этом если

$$F_2(t, x_t, \dot x_t) = F_3(t, x_t, \dot x_t) + \frac{d}{dt} F_4(t, x_t) \tag{1.5}$$

то $V_1(t, x_t) = \upsilon(t, z(t))$, где $z = x(t) - F_4(t, x_t)$. Если же компонента F_4 в представлении (1.5) равна нулю, то $V_1(t, x_t) = \upsilon(t, x(t))$. Добавляя теперь к V_1 компоненту $V_2 = V_2(t, x_t, \dot x_t)$ таким образом, чтобы удовлетворить требованиям какой-либо теоремы об устойчивости системы (1.1), получаем функционал $V = V_1 + V_2$. При этом использование функционала $\upsilon(t, z(t))$ может привести к необходимости исследовать на устойчивость нулевое решение функционального уравнения $z(t) = 0$.

Подчеркнем, что отдельные этапы процедуры могут быть реализованы неоднозначно, что следует использовать для расширения получающихся областей устойчивости. Заметим также, что значение этой процедуры состоит не только в едином формальном описании способа построения ряда уже известных функционалов для уравнений нейтрального типа, сколько в некоторой дополнительной возможности исследовать устойчивость конкретных систем.

Разъясним отдельные этапы процедуры на примере. Обозначим через $\dot V$ правую верхнюю производную функционала V в силу системы (1.1).

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot x(t) = -a\,x(t) + b\,\dot x(t-h), \quad t \geqslant 0 \tag{1.6}$$

Здесь $a, b, h \geqslant 0$ заданные постоянные, $|b| < 1$.

Правая часть уравнения (1.6) уже представлена в виде (1.3) при $F_1 = -ax(t)$, $F_2 = bx(t-h)$. Поэтому можно переходить к этапу 2. Вспомогательное обыкновенное уравнение имеет вид $\dot y(t) = -ay(t)$, функцию Ляпунова υ для которого возьмем равной $\upsilon = y^2$. Реализация этапа 3 зависит от представления (1.5).

Пусть в (1.5) функционал $F_3 = 0$ и $F_4 = bx(t-h)$. Тогда $V_1 = (x(t) - bx(t-h))^2$. Для построения компоненты V_2 функционала $V = V_1 + V_2$ вычислим $\dot V_1$. Имеем

$$\dot V_1 = -2ax(t)(x(t)-bx(t-h)) = -2ax^2(t) + 2ab\,x(t)\,x(t-h) \leqslant (-2a+|ab|)\,x^2(t) + |ab|x^2(t-h)$$

Значит, если положить

$$V_2 = |ab| \int\limits_{t-h}^{t} x^2(\tau)\,d\tau$$

то $\dot V \leqslant 2(-a + |ab|)\,x^2(t)$. Поэтому функция $\dot V$ отрицательно определена, если

$$a > 0, \quad |b| < 1 \tag{1.7}$$

Поскольку построенный функционал V лишь неотрицателен, необходимо еще потребовать, чтобы нулевое решение разностного уравнения $x(t) - bx(t-h) = 0$ было асимптотически устойчиво. Необходимое и достаточное условие этого имеет вид $|b| < 1$. Итак, построенный функционал V приводит к условиям асимптотической устойчивости (1.7) системы (1.6).

Рассмотрим теперь иной способ реализации процедуры. Пусть вспомогательное уравнение имеет вид $\dot y(t) = -ay(t)$, функцию Ляпунова для которого возьмем $\upsilon(y) = |y|$, а в представлении (1.5) функции $F_4 = 0$, $F_3 = b\dot x(t-h)$. Тогда

$$V_1 = |x(t)|, \quad \dot V_1 \leqslant -a|x(t)| + |b\dot x(t-h)| \tag{1.8}$$

Поэтому

$$V_2 = c\int\limits_{t-h}^{t} |\dot x(s)|\,ds, \quad c = \frac{|b|}{1-|b|} \tag{1.9}$$

Следовательно, с учетом (1.8), (1.9) имеем для $V = V_1 + V_2$

$$\dot V \leqslant -a\,|x(t)| + c\,|\dot x(t)| + |b\dot x(t-h)| - c\,|\dot x(t-h)| = -a\,|x(t)| + c\,|\dot x(t)| - bc\,|\dot x(t-h)|$$

Заменяя $\dot x(t)$ правой частью уравнения (1.6), получим

$$\dot V \leqslant (-a + |a|c)\,|x(t)|$$

Отсюда и из (1.8), (1.9) видно, что при $a > 0$, $|b| < 1/2$ функционал $V = V_1 + V_2$ определенно положителен, а его производная определенно отрицательна. Значит, при применении фунционала (1.8), (1.9) условия (1.7) асимптотической устойчивости системы (1.6) не изменяются.

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых классов систем (1.1), ограничиваясь для простоты изложения характерными их представителями. Отметим, что цель этого рассмотрения состоит не только в построении условий устойчивости, но и иллюстрации возможных путей реализации отдельных этапов процедуры и получающихся при этом функционалов V.

2. Линейные системы. Используя описанную процедуру, установим условия устойчивости линейных систем

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h_1) + A_2 \dot{x}(t-h_2), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

где A_i – квадратные постоянные матрицы $n \times n$, постоянные $h_i \geqslant 0$. Обозначим $\|\cdot\|$ матричную норму, порожденную нормой $|\cdot|$ векторов в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|A_i\| = \max_x |A_i x|$, где максимум вычисляется по всем $x \in \mathbb{R}^n$ с $|x| = 1$. Положим $\alpha_i = \|A_i\|$. Рассмотрим различные возможные варианты представлений (1.4), (1.5), получающиеся при этом условия устойчивости и функционалы $V = V_1 + V_2$ в предположении $\alpha_2 < 1$.

2.1. Положим $F_1 = A_0 x$, $F_2 = F_3 = A_1 x(t-h_1) + A_2 \dot{x}(t-h_2)$, $F_4 = 0$. Тогда вспомогательное уравнение имеет вид $\dot{y}(t) = A_0 y(t)$, функцию Ляпунова υ для которого возьмем равной $\upsilon = |y|$. При этом следует положить $V_1 = |x(t)|$. Для любой нормы $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ имеем [13]

$$d|x(t)|/dt = Q[x(t), \dot{x}(t)] \tag{2.2}$$

Здесь скалярная функция $Q[x, y]$ двух независимых переменных $x, y \in \mathbb{R}^n$ определяется соотношением

$$Q[x,y] = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[|x+hy| - |x|] \tag{2.3}$$

Напомним также, что для любой квадратной матрицы A существует

$$\gamma(A) = \sup_x |x|^{-1} Q[x, Ax], \quad |x| \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

где $\gamma(A)$ – логарифмическая норма матрицы A ([14]). Из (2.1)–(2.3) следует, что

$$\dot{V}_1 \leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[|x+hy| - |x|] \leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[|x+hA_0 y| - |x|] + |F_2(t, x_t, \dot{x}_t)| =$$

$$= Q[x, A_0 x] + |F_2(t, x_t, \dot{x}_t)|$$

Отсюда и из (2.4) вытекает неравенство

$$\dot{V}_1 \leqslant \gamma(A_0)|x| + \alpha_1 |x(t-h_1)| + \alpha_2 |\dot{x}(t-h_2)| \tag{2.5}$$

Для того чтобы обеспечить отрицательную определенность $\dot{V}$, положим

$$V_2 = (1-\alpha_2)^{-1}\left[\alpha_1 \int_{t-h_1}^{t} |x(s)|\,ds + \alpha_2 \int_{t-h_2}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds\right] \tag{2.6}$$

С учетом (2.5), (2.6) имеем

$$\dot{V} \leqslant [\gamma(A_0) + \alpha_1(1-\alpha_2)^{-1}]|x(t)| + \alpha_2(1-\alpha_2)^{-1}|\dot{x}(t)| -$$

$$-\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_2)^{-1}|x(t-h_1)| - \alpha_2^2(1-\alpha_2)^{-1}|\dot{x}(t-h_2)|$$

В силу этого неравенства и вытекающей из (2.1) оценки

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \alpha_0 |x(t)| + \alpha_1 |x(t-h_1)| + \alpha_2 |\dot{x}(t-h_2)|$$

Окончательно заключаем, что $\dot{V} \leqslant \alpha_3 |x(t)|$, где

$$\alpha_3 = \gamma(A_0) + (1-\alpha_2)^{-1}(\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2)$$

Итак, установлено, что система (2.1) асимптотически устойчива, если

$$\alpha_3 < 0, \quad \alpha_2 < 1 \tag{2.7}$$

2.2. Пусть

$$F_1 = (A_0 + A_1)\, x, \quad F_4 = 0, \quad F_2 = F_3 \tag{2.8}$$

$$F_2 = -A_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} \dot{x}(s)ds + A_2\dot{x}(t-h_2)$$

В этом случае вспомогательное уравнение имеет вид $\dot{y} = (A_0 + A_1)\, y(t)$, функция Ляпунова $\upsilon = |\, y\,|$, т.е. в соответствии с процедурой и соотношениями (2.8) следует положить $V_1 = |\, x(t)\,|$. При этом аналогично (2.5) получаем

$$\dot{V}_1 \leqslant \gamma(A_0 + A_1)\,|x(t)| + \alpha_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds + \alpha_2|\dot{x}(t-h_2)| \tag{2.9}$$

Отсюда подобно (2.6) вытекает выражение для V_2 вида

$$V_2 = (1 - h_1\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}\left[\alpha_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} (s - t + h_1)\,|\dot{x}(s)|\,ds + \alpha_2 \int\limits_{t-h_2}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds\right]$$

Следовательно,

$$\dot{V}_2 = (1 - h_1\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}\left[(h_1\alpha_1 + \alpha_2)\,|\dot{x}(t)| - \alpha_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds - \alpha_2|\dot{x}(t-h_2)|\right]$$

Заменяя здесь $|\, \dot{x}(t)\,|$ правой частью оценки

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \|A_0 + A_1\|\,|\dot{x}(t)| + \alpha_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds + \alpha_2|\dot{x}(t-h_2)|$$

и учитывая (2.9), заключаем, что $\dot{V} \leqslant \alpha_4|x(t)|$, где

$$\alpha_4 = \gamma(A_0 + A_1) + \|A_0 + A_1\|(1 - h_1\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(h_1\alpha_1 + \alpha_2)$$

Таким образом, система (2.1) асимптотически устойчива, если

$$1 > h_1\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_4 < 0 \tag{2.10}$$

Условия (2.7) и (2.10) неидентичны друг другу.

Так, например, требования (2.7) означают, что матрица A_0 гурвицева; условия же (2.10) можно удовлетворить даже в том случае, когда все собственные значения матрицы A_0 имеют положительные действительные части. Отметим также, что в условиях (2.7) система (2.1) устойчива при любых запаздываниях $h_1, h_2 \geqslant 0$, в то время как неравенства (2.10) накладывают определенные ограничения на величину h_1.

Используя иные представления правой части (2.1), можно получить другие условия устойчивости. Приведем для иллюстрации одно из них.

2.3. Положим

$$F_1 = (A_0 + A_1)\, x, \quad F_3 = 0, \quad F_2 = \frac{d}{dt} F_4 \tag{2.11}$$

$$F_4 = -A_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} |x(s)|\,ds + A_2 x(t-h_2)$$

Вспомогательная система есть $\dot{y} = (A_0 + A_1)\, y(t)$, функцию Ляпунова $\upsilon(y)$ для которой возьмем в виде квадратичной формы $\upsilon(y) = y'By$. Здесь штрих – знак транспонирования, матрица B удовлетворяет уравнению

$$(A_0 + A_1)'B + B(A_0 + A_1) = -C \tag{2.12}$$

Предположим, что матрица $A_0 + A_1$ гурвицева, а постоянная матрица C положительно определена. Тогда уравнение (2.12) имеет единственное решение $B > 0$ при любой заданной матрице $C > 0$. В соответствии с процедурой следует положить $V_1 = \upsilon(z)$, $z = x(t) - F_4$. Выберем $C = I$, где I – единичная матрица, и евклидову норму $|x| = (x'x)^{1/2}$. Тогда с учетом (2.11), (2.12)

$$\dot{V}_1 = x'(t)\,(A_1 + A_0)'Bz(t) + z'(t)\,B(A_0 + A_1)\,x(t) = -|x(t)|^2 - 2x'(t)\,(A_0 + A_1)'BF_4$$

Значит, V_2 надлежит выбрать в виде

$$V_2 = \|(A_0 + A_1)\,B\| \left[\alpha_1 \int\limits_{t-h_1}^{t} (s - t + h_1)\,|\dot{x}(s)|^2 ds + \alpha_2 \int\limits_{t-h_2}^{t} |\dot{x}(s)|^2 ds \right]$$

Тогда для $V = V_1 + V_2$ справедлива оценка $\dot{V} \leqslant \alpha_5 |x(t)|^2$, где $\alpha_5 = -[1 - 2\|\,(A_0 + A_1)\,B\,\|\,(h_1\alpha_1 + \alpha_2)]$.

Поскольку функционал V лишь знакопостоянен, необходимо еще потребовать, чтобы нулевое решение функционального уравнения $x(t) - F_4(t, x_t) = 0$ было асимптотически устойчивым. Достаточное условие этого имеет вид $h_1\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Следовательно, система (2.1) асимптотически устойчива, если

$$\operatorname{Re}\lambda(A_0 + A_1) < 0, \quad h_1\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad \alpha_5 < 0 \tag{2.13}$$

Здесь $\lambda(A_0 + A_1)$ – собственные значения матрицы $A_0 + A_1$ и $\operatorname{Re}\lambda$ – их действительные части.

Таким образом, установлена

Теорема 1. Система (2.1) асимптотически устойчива при выполнении одного из условий (2.7), (2.10) или (2.13).

3. Устойчивость системы хищник–жертва. Для моделирования взаимодействия двух популяций, численности которых $N_1(t)$ и $N_2(t)$, были использованы [7] уравнения

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t) \left[r_i - \sum_{j=1}^{2} (b_{ij} N_j(t - h_{ij}) - \gamma_{ij} \dot{N}_j(t - \tau_{ij})) \right], \quad t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

с заданными постоянными γ_{ij} и неотрицательными постоянными r_i, b_{ij}, h_{ij}, τ_{ij}, $i, j = 1, 2$. Начальные условия для системы (3.1) имеют вид

$$N_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \quad \dot{N}_i(\theta) = \dot{\varphi}_i(\theta), \quad \theta \leqslant 0$$

Предположим, что система (3.1) имеет ненулевое положение равновесия $N_i^0 > 0$, определяемое соотношениями

$$\sum_{j=1}^{2} b_{ij} N_j^0 = r_i, \quad i = 1, 2$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения N_i^0. В соответствии с [2, 9] решение N_i^0 асимптотически устойчиво, если линеаризованная относительно положения равновесия N_i^0 система асимптотически устойчива. Полагая $N_i = m_i + N_i^0$, получаем, что линеаризованная система имеет вид

$$\dot{m}_i(t)+\sum_{j=1}^{2}[P_{ij}\dot{m}_i(t-\tau_{ij})+a_{ij}m_i(t-h_{ij})]=0 \tag{3.2}$$

$$P_{ij}=b_{ij}N_j^0,\quad a_{ij}=\gamma_{ij}N_j^0$$

Установим условия устойчивости системы (3.2), используя описанную процедуру. Обозначим через $\delta(s)$ функцию, равную нулю при $s\leqslant 0$ и единице при $s>0$. Запишем характеристическое уравнение, соответствующее (3.2),

$$z^2=-\int_0^\infty e^{-zs}[z^2dK_3(s)+z\,dK_2(s)+dK_1(s)] \tag{3.3}$$

Здесь z – комплексная переменная, все интегралы понимаются в смысле Лебега–Стильтьеса и положено

$$K_1(s)=a_{11}a_{22}\delta(s-h_{11}-h_{22})-a_{12}a_{21}\delta(s-h_{12}-h_{21}),\quad s\geqslant 0 \tag{3.4}$$

$$K_2(s)=a_{22}\delta(s-h_{22})-a_{22}p_{11}\delta(s-\tau_{11}-h_{22})+a_{11}\delta(s-h_{11})+a_{11}p_{22}\delta(s-h_{11}-\tau_{22})-$$
$$-p_{12}a_{21}\delta(s-\tau_{12}-h_{21})-a_{12}p_{21}\delta(s-h_{12}-\tau_{21})$$

$$K_3(s)=p_{22}\delta(s-\tau_{22})+p_{11}\delta(s-\tau_{11})+p_{11}p_{22}\delta(s-\tau_{11}-\tau_{22})+p_{12}p_{21}\delta(s-\tau_{12}-\tau_{21})$$

Уравнение (3.3) является характеристическим также и для системы второго порядка

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=-\int_0^\infty[\dot{x}_2(t-s)\,dK_3(s)+x_2(t-s)\,dK_2(s)+x_1(t-s)\,dK_1(s)] \tag{3.5}$$

Предположим, что

$$\int_0^\infty |dK_3(s)|<1 \tag{3.6}$$

При выполнении неравенства (3.6) необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости систем (3.2) и (3.5) совпадают и состоят [3] в отсутствии корней уравнения (3.3) в правой полуплоскости $\mathrm{Re}z\geqslant 0$. Поэтому достаточно установить условия устойчивости системы (3.5), для получения которых воспользуемся описанной выше процедурой.

Отметим, что ввиду (3.4) все ядра $K_i(s)$ имеют ограниченные моменты. Обозначим

$$\alpha_{ij}=\int_0^\infty s^i|dK_j(s)|,\quad \beta_{ij}=\int_0^\infty s^i dK_j(s)$$

Интегралы в (3.5) могут быть представлены следующим образом:

$$\int_0^\infty x_2(t-s)\,dK_2(s)=-\frac{d}{dt}\int_0^\infty dK_2(s)\int_{t-s}^t x_2(\tau)\,d\tau+\beta_{02}x_2(t)=\frac{d}{dt}\int_0^\infty x_1(t-s)\,dK_2(s) \tag{3.7}$$

$$\int_0^\infty x_1(t-s)\,dK_1(s)=\frac{d}{dt}\int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^t(\tau-t+s)\,x_2(\tau)\,d\tau-\beta_{11}x_2(t)+\beta_{01}x_1(t)=$$

$$=-\frac{d}{dt}\int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^t x_1(\tau)\,d\tau+\beta_{01}x_1(t)=-\int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^t x_2(\tau)\,d\tau+\beta_{01}x_1(t). \tag{3.8}$$

Используя разные представления (3.7), (3.8), получаем различные преобразованные системы.

Рассмотрим одну из них, поскольку исследование остальных осуществляется аналогично. Представим систему (3.5) с учетом (3.7), (3.8) в виде

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{z}(t) = -a\,x_2(t) - b\,x_1(t) \tag{3.9}$$

$$a = \beta_{02} - \beta_{11}, \quad b = \beta_{01}$$

$$z(t) = x_2(t) + \int_0^\infty \left[x_1(t-s)\,dK_3(s) - dK_2(s) \int_{t-s}^{t} x_2(\tau)\,d\tau + dK_1(s) \int_{t-s}^{t} (\tau - t + s)\,x_2(\tau)\,d\tau \right]$$

На основании (3.9) вспомогательная система имеет вид

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = -a\,y_2(t) - b\,y_1(t) \tag{3.10}$$

Функция Ляпунова для системы (3.10) дается выражением

$$\upsilon = (2ab)^{-1}[(a^2 + b^2 + b)\,y_1^2 + 2ay_1y_2 + (b+1)\,y_2^2]$$

Значит, в соответствии с процедурой имеем $V = V_1 + V_2$, где

$$V_1 = (2ab)^{-1}[(a^2 + b^2 + b)\,x_1^2(t) + 2ax_1(t)\,z(t) + (b+1)\,z^2(t)] \tag{3.11}$$

Для построения компоненты V_2 вычислим $\dot{V}_1$ в силу системы (3.9)

$$\dot{V}_1 = -x_1^2(t) - x_2^2(t) - (z(t) - x_2(t))\,(x_2(t) + a^{-1}(b+1)\,x_1(t))$$

Заметим далее, что в силу (3.9)

$$2\,|(z(t) - x_2(t))\,x_2(t)| \leqslant q\,x_2^2(t) + J, \quad q = \alpha_{03} + \alpha_{12} + \alpha_{21}/2$$

$$J = \int_0^\infty \left[x_2^2(t-s)\,|dK_3(s)| + |dK_2(s)| \int_{t-s}^{t} x_2^2(\tau)\,d\tau + |dK_1(s)| \int_{t-s}^{t} (\tau - t + s)\,x_2^2(\tau)\,d\tau \right]$$

$$2\,|(z(t) - x_2(t))\,x_1(t)| \leqslant q\,x_1^2(t) + J$$

Поэтому следует положить

$$V_2 = \frac{b+1+a}{2a} \int_0^\infty \left[|dK_3(s)| \int_{t-s}^{t} x_2^2(\tau)\,d\tau + |dK_2(s)| \int_{t-s}^{t} (\tau - t + s)\,x_2^2(\tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + |dK_1(s)| \int_{t-s}^{t} \frac{(\tau - t + s)}{2}\,x_2^2(\tau)\,d\tau \right]$$

При этом для $V = V_1 + V_2$ справедлива оценка

$$\dot{V} \leqslant -x_1^2(t)\left(1 - \frac{b+1}{2a}\,q\right) - x_2^2(t)\left(1 - \frac{b+1+2a}{2a}\,q\right) \tag{3.12}$$

Построенный функционал V лишь знакопостоянен. Поэтому надлежит еще потребовать, чтобы нулевое решение функционального уравнения $z = 0$ было асимптотически устойчивым. Достаточное условие этого имеет вид $q < 1$. Отсюда и из условия отрицательной определенности (3.12) следует, что положение равновесия N_i^0 системы (3.1) асимптотически устойчиво, если

$$q = \alpha_{03} + \alpha_{12} + \alpha_{21}/2 < 1, \quad \beta_{01} > 0, \quad 2(\beta_{02} - \beta_{11})\,(1-q) > (1+\beta_{01})\,q \tag{3.13}$$

Отметим, что при $q = 0$ условия (3.13) переходят в необходимые и достаточные условия устойчивости системы (3.10). Комбинируя иным образом представления (3.7), (3.8) или выбирая другие функции Ляпунова для вспомогательных уравнений, можно получить другие условия устойчивости системы (3.1). Пусть, например, преобразованная система имеет вид (3.9) при

$$a=-\beta_{11}, \quad b=\beta_{01}, \quad z(t)=x_2(t)+ \tag{3.14}$$

$$+\int_0^\infty [x_2(t-s)\,dK_3(s)-dK_2(s)\,x_1(t-s)+dK_1(s)\int_{t-s}^t (\tau-t+s)\,x_2(\tau)\,d\tau]$$

При a, b, z из (3.14) функционал V_1 определяется выражением (3.11), а функционал V_2 равен

$$V_2=\frac{b+1+a}{2a}\int_0^\infty\left[\left|dK_3(s)\right|\int_{t-s}^t x_2^2(\tau)\,d\tau+\left|dK_2(s)\right|\int_{t-s}^t x_1^2(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\left|dK_1(s)\right|\int_{t-s}^t\frac{(\tau-t+s)^2}{2}x_2^2(\tau)\,d\tau\right]$$

Вычисляя $\dot V$ в силу системы (3.5), получим

$$\dot V \leqslant -x_1^2(t)-x_2^2(t)+\frac{1}{2}x_1^2(t)\left(\alpha_{02}+\frac{b+1}{a}\left(2\alpha_{02}+\frac{\alpha_{21}}{2}+\alpha_{03}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}x_2^2(t)\left(\alpha_{02}+\alpha_{21}+\frac{b+1}{2a}\alpha_{21}+\frac{b+1+2a}{2a}\alpha_{03}\right)$$

Следовательно, условия устойчивости положения равновесия системы (3.1) имеют вид

$$-\beta_{11}>0, \quad \beta_{01}>0$$

$$-2\beta_{11}>\max\left[-\beta_{11}\alpha_{02}+(1+\beta_{01})\left(2\alpha_{02}+\frac{\alpha_{21}}{2}+\alpha_{03}\right),\right.$$

$$\left.-\beta_{11}(\alpha_{02}+\alpha_{21})+(1+\beta_{01})\frac{\alpha_{21}}{2}+\frac{\beta_{01}+1-2\beta_{11}}{2}\alpha_{03}\right]$$

4. Нелинейные системы. Опишем применение процедуры и установим условия устойчивости нелинейных систем, ограничиваясь для простоты изложения уравнениями (1.1) вида

$$\dot x(t)=A_1(t,x(t-h_1))+A_2(t,\dot x(t-h_2)), \quad t \geqslant t_0, \quad x(t)\in\mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

с начальными условиями (1.2).

Здесь постоянные $h_i \geqslant 0$, непрерывные функции A_1: $[t_0, \infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A_i(t, 0) = 0$ (i = 1, 2). Обозначим через D множество абсолютно непрерывных функций ψ: $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$, для которых $|\psi| < r$ при некотором $r > 0$. Предположим, что функция $A_1(t, x)$ непрерывно дифференцируема по x и при некоторых постоянных $\alpha_i > 0$ и любых φ, $\psi \in D$ справедливы неравенства

$$\left\|A_2(t,\dot\psi(-h_2))\right\| \leqslant \alpha_2\left\|\dot\psi(-h_2)\right\|, \quad \alpha_2<1$$

$$\left\|A_1(t,\varphi(-h_1))-A_1(t,\psi(-h_1))\right\| \leqslant \alpha_1\left\|\varphi(-h_1)-\psi(-h_1)\right\| \tag{4.2}$$

Обозначим через $f(t, x)$: $[t_0, \infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ матрицу Якоби $f(t, x) = \partial A_1(t, x)/\partial x$, через $\gamma(f)$ – логарифмическую норму матрицы f и положим $\gamma_1 = \sup_{t,x}\gamma(f(t, x))$, $t \geqslant t_0$, x: $|x| \leqslant r$.

Теорема 2. Пусть выполнены неравенства (4.2) и

$$\gamma_2 < 0, \quad \alpha_2 + \alpha_1 h_1 < 1, \quad \gamma_2 = \gamma_1 + \alpha_1(\alpha_1 h_1 + \alpha_2)(1 - \alpha_2 - \alpha_1 h_1)^{-1} \tag{4.3}$$

Тогда тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $F_1 = A_1(t, x(t))$. Это означает, что вспомогательная система имеет вид $\dot{y}(t) = A_1(t, y(t))$. Положим $\upsilon = |\, y \,|$. Тогда в формуле (1.4) можно принять $F_3 = A_1(t, x(t - h_1)) - A_1(t, x(t)) + A_2(t, \dot{x}(t - h_2))$, $F_4 = 0$. Следовательно, $V_1 = |x(t)|$. Поэтому, на основании (2.2), (2.3)

$$\dot{V}_1 \leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [\, |x(t) + hA_1(t, x(t))| - |x(t)|\,] + |F_3| \tag{4.4}$$

Заметим, что

$$A_1(t, x) = \left[\int_0^1 f(t, sx)\, ds \right] x$$

Отсюда и из (4.4) вытекает неравенство

$$\dot{V}_1 \leqslant \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[\left| x(t) + h\left(\int_0^1 f(t, sx)\, ds \right) x(t) \right| - |x(t)| \right] + |F_3| \tag{4.5}$$

Ввиду соотношений (2.3), (2.4), (4.5) имеем

$$\dot{V}_1 \leqslant Q\left[x(t), \left(\int_0^1 f(t, sx(t))\, ds \right) x(t) \right] + |F_3| \leqslant \tag{4.6}$$

$$\leqslant \gamma\left(\int_0^1 f(t, sx(t))\, ds \right) |x(t)| + |F_3| \leqslant \int_0^1 \gamma(f(t, sx(t)))\, ds\, |x(t)| + |F_3|$$

Рассмотрим теперь в D функционал $V = V_1(\psi) + V_2(\psi)$, где

$$V_2(\psi) = (1 - \alpha_2 - \alpha_1 h_1)^{-1} \left[\alpha_1 \int_{-h_1}^{0} (\tau + h_1) |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau + \right. \tag{4.7}$$

$$\left. + \alpha_2 \int_{-h_2}^{0} |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau + (\alpha_1 h_1 + \alpha_2)\, \alpha_1 \int_{-h_1}^{0} |\psi(\tau)| d\tau \right]$$

На основании (4.2), (4.6)

$$\dot{V}_1(\psi) \leqslant \gamma_1 |\psi(0)| + \alpha_2 |\dot{\psi}(-h_2)| + \alpha_1 |\psi(-h_1) - \psi(0)| \leqslant \tag{4.8}$$

$$\leqslant \gamma_1 |\psi(0)| + \alpha_2 |\dot{\psi}(-h_2)| + \alpha_1 \int_{-h_1}^{0} |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau$$

Вычислим далее $\dot{V}_2(\psi)$:

$$\dot{V}_2(\psi) = (1 - \alpha_2 - \alpha_1 h_1)^{-1} \left[(\alpha_1 h_1 + \alpha_2) |\dot{\psi}(0)| - \alpha_1 \int_{-h_1}^{0} |\dot{\psi}(\tau)|\, d\tau - \alpha_2 |\dot{\psi}(-h_2)| + \right. \tag{4.9}$$

$$\left. + (\alpha_1 h_1 + \alpha_2)\, \alpha_1 (|\psi(0)| - |\psi(-h_1)|) \right]$$

Заметим, что в силу (4.1), (4.2)

$$|\dot\psi(0)| \leqslant \alpha_1|\psi(-h_1)|+\alpha_2|\dot\psi(-h_2)| \tag{4.10}$$

Заменяя $|\dot\psi(0)|$ в (4.9) правой частью (4.10), получим с учетом (4.8) $\dot V(\psi) \leqslant \gamma_2|\psi(0)|$. Таким образом, функционал V в D определенно положителен, допускает бесконечно малый высший предел, а его полная производная определенно отрицательна при выполнении условий (4.2), (4.3). Следовательно [3, 9], тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. При применении процедуры к уравнениям нейтрального типа иногда может оказаться полезным проитерировать производную в правой части один или несколько раз. Положим, например, $V_1 = |x(t)|$ при $t \geqslant t_0 + h_1$. Тогда, подобно (4.8), (4.10), итерируя один раз, заключаем, что

$$\dot V_1(\psi) \leqslant \gamma_1|x(t)|+\alpha_2|\dot x(t-h_2)|+\alpha_1\int_{t-h_1}^{t}|\dot x(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1|x(t)|+\alpha_2|\dot x(t-h_2)|+\alpha_1^2\int_{t-2h_1}^{t-h_1}|x(\tau)|d\tau+\alpha_1\alpha_2\int_{t-h_1-h_2}^{t-h_2}|\dot x(\tau)|d\tau$$

Значит,

$$V_2 = \alpha_1^2\left[\int_{t-2h_1}^{t-h_1}ds\int_{s}^{t-h_1}|x(s)|ds+h_1\int_{t-h_1}^{t}|x(\tau)|d\tau\right]+$$

$$+\alpha_2(1-\alpha_2(1+\alpha_1h_1))^{-1}\left[\int_{t-h_2}^{t}|\dot x(\tau)|d\tau+\int_{t-h_1}^{t}|x(\tau)|d\tau\alpha_1\right]+\alpha_1\alpha_2\int_{t-h_1-h_2}^{t-h_2}ds\int_{s}^{t-h_2}|\dot x(s)|ds$$

Полагая $V = V_1 + V_2$, получаем $\dot V(x) \leqslant \gamma_3|x(t)|$, где

$$\gamma_3 = \gamma_1+\alpha_1^2h_1+\alpha_2(1-\alpha_2(1+\alpha_1h_1))^{-1}\alpha_1$$

Тем самым установлена

Теорема 3. Тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво, если выполнены неравенства (4.2) и $\gamma_3 < 0$, $(\alpha_1h_1 + 1)\alpha_2 < 1$.

Замечание 2. Для некоторых систем (1.1) функционал $V = V_1$. Пусть, например, в результате преобразований (1.4), (1.5) уравнение (1.1) принимает форму $\dot z = F_5(t, z(t))$, где $z(t) = x(t) - F_4(t, x_t)$, $F_4(t, 0) = 0$, $F_5(t, 0) = 0$. Тогда вспомогательное уравнение имеет вид $\dot y = F_5(t, y(t))$ с функцией Ляпунова $\upsilon(t, y)$. Следовательно, $V = V_1 = \upsilon(t, z(t))$. Поэтому если нулевое решение уравнения $\dot y = F_5(t, y(t))$ равномерно асимптотически устойчиво, а нулевое решение уравнения $x(t) = F_4(t, x_t)$ асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (1.1) также асимптотически устойчиво. Этот факт был отмечен ранее [3].

Пример 2. Рассмотрим шунтированную линию передачи энергии, описываемую уравнением [2]

$$\dot x(t) = -g(x(t))+b\dot x(t-h),\quad t \geqslant 0,\quad x\in\mathbb{R},\quad |b|<1,\quad g(0)=0 \tag{4.11}$$

Здесь $g(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $b, h \geqslant 0$ заданные постоянные, причем

$$x\,g(x) > 0,\quad x \neq 0 \tag{4.12}$$

Устойчивость нулевого решения (4.11) исследовалась в [2], где установлено, что достаточные условия устойчивости даются неравенствами (4.12) и $|b| < 1/2$. Если $g(x)$ – линейная функция, т.е. $g(x) = ax$, то эти условия устойчивости переходят в условия $a > 0$, $|b| < 1/2$, т.е. не совпадают с условиями (1.7), приведенными для линейного уравнения (1.6) в примере 1. Установим условия устойчивости нулевого решения системы (4.11), используя приведенную процедуру, переходящие в (1.7) для линейного случая. Вспомогательное обыкновенное уравнение для (4.11) имеет вид $\dot{y}(t) = -g(y(t))$, функцию Ляпунова для которого возьмем в виде

$$\upsilon(y) = \int_0^y g(s)\,ds \tag{4.13}$$

В силу (4.12) функция $\upsilon(y)$ определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел. На основании процедуры $V_1 = \upsilon(x(t))$. Отсюда и из (4.11) вытекает, что $V = V_1 + V_2$, где

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} \dot{x}^2(\tau)\,d\tau \tag{4.14}$$

При этом для $\dot{V}$ имеем

$$\dot{V} = g(x(t))[-g(x(t)) + b\dot{x}(t-h)] + \frac{1}{2}(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t-h))$$

Заменяя здесь $\dot{x}(t)$ правой частью уравнения (4.11), получим

$$2\dot{V} = -g^2(x(t)) - (1-b^2)\dot{x}^2(t-h)$$

Значит, условия асимптотической устойчивости даются неравенствами (4.12) и $|b| < 1$, переходящими в линейном случае $g(x) = ax$ в (1.6).

Уравнение (4.11) с нелинейностью $g(x)$, удовлетворяющей (4.12), относится к уравнениям градиентного типа, для которых использование процедуры позволяет получить условия устойчивости и при $n > 1$.

Рассмотрим, например, систему

$$\dot{x}(t) = -\nabla G(x(t)) + B\dot{x}(t-h), \quad t \geqslant t_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad G(0) = 0 \tag{4.15}$$

Здесь $G(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, B – заданная постоянная матрица, $h \geqslant 0$, через ∇G обозначен градиент функции G и

$$G(x) > 0, \quad x \neq 0 \tag{4.16}$$

Полагая подобно (4.13), (4.14)

$$V(x) = G(x) + \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} \dot{x}'(s)\,\dot{x}(s)\,ds$$

заключаем, что нулевое решение системы (4.15) асимптотически устойчиво, если справедливо неравенство (4.16) и $\|B\| < 1$.

Замечание 3. Изложенная процедура исследования устойчивости может быть применена и к некоторым нестационарным системам. Рассмотрим, например, скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = -a(t)\,x(t) + b\,\dot{x}(t-h), \quad t \geqslant t_0 \tag{4.17}$$

где $a(t)$ – неотрицательная непрерывная функция, $b, h \geqslant 0$ – заданные постоянные, $|b| < 1$. Тогда вспомогательное уравнение есть $\dot{y}(t) = -a(t)\,y(t)$, функцию Ляпунова υ для которого возьмем равной $\upsilon = |y|$. Значит, $V_1 = |x(t)|$. Поэтому

$$V_2 = \frac{|b|}{1-|b|}\int_{t-h}^{t} |\dot{x}(s)|\,ds$$

Для $V = V_1 + V_2$ имеем $\dot{V} \leqslant -a(t)|x(t)| + |b|(1-|b|)^{-1}(|\dot{x}(t)| - |\dot{x}(t-h)|)$. Заменяя здесь $|\dot{x}(t)|$ в соответствии с (4.17) на $|a(t)\,x(t)| + |b\dot{x}(t-h)|$, получаем на основании [9], что система (4.17) асимптотически устойчива, если $a(t) \geqslant c > 0$, $|b| < 1/2$.

Используя иной функционал

$$V=[x(t)+bx(t-h)]^2+|b|\int_{t-h}^{t} a(s+h)\,x^2(s)\,ds$$

приходим к условиям асимптотической устойчивости

$$2a(t)-|b|(a(t)+a(t+h)) \geqslant c>0, \quad |b|<1$$

Эти последние условия устойчивости переходят в условия устойчивости (1.7) системы (1.6) при постоянных коэффициентах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. *Hale K.J., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. Berlin: Springer, 1993. 490 p.
3. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. № 1. С. 5–35.
4. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В.* Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 383 с.
5. *Богомолов В.Л.* Автоматическое регулирование мощности гидростанций по водостоку // Автоматика и телемеханика. 1941. № 4/5. С. 103–129.
6. *Brayton R.K.* Nonlinear oscillatios in a distributed network // Quart. Appl. Math. 1967. V. 24. № 4. P. 289–301.
7. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. San Diego: Acad. Press, 1993. 320 p.
8. *Gopalsamy K.* Equations of Mathematical Ecology. Dordrecht: Kluwer, Acad. Publ. 1992. 341 p.
9. *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Applied theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer, Acad. Publ. 1992. 234 p.
10. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
11. *Ким А.В.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1992. 144 с.
12. *Колмановский В.Б.* Об устойчивости некоторых систем с произвольным последействием // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 421–424.
13. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 52–90.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1995