УДК 531.36

© 1996 г. А.Ю. Александров

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Исследуется влияние внешних нестационарных возмущающих воздействий на асимптотические свойства решений систем нелинейных дифференциальных уравнений. Предлагается метод построения функций Ляпунова для получения условий, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость, неустойчивость и ограниченность решений изучаемых систем. Доказано, что порядок возмущений может быть меньше порядка правых частей невозмущенных уравнений.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}) \tag{1.1}$$

(здесь и всюду далее $s = 1,\dots, n$).

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать возмущенную систему

$$\dot{x}_s = f_s(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_{sj}(t)h_j(\mathbf{X}) \tag{1.2}$$

Здесь $f_s(\mathbf{X})$ – однородные функции порядка μ, $h_j(\mathbf{X})$ – однородные функции порядка σ, μ и σ – рациональные числа с нечетными знаменателями, а функции $b_{sj}(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$ вместе с интегралами

$$\int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau$$

Будем полагать, что $f_s(\mathbf{X})$ – дважды непрерывно-дифференцируемые, а $h_j(\mathbf{X})$ – непрерывно-дифференцируемые функции, $\mu > 1$, $\sigma > 1$.

Исследуем вопрос, при каких условиях асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) решения $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ системы (1.1) обеспечивает асимптотическую устойчивость (или неустойчивость) нулевого решения возмущенной системы.

2. Теоремы об устойчивости по нелинейному приближению были получены в работах И.Г. Малкина и Н.Н. Красовского [1, 2]. При этом предполагалось, что порядок возмущений выше порядка правых частей системы (1.1), т.е. $\sigma > \mu$. В то же время при $\sigma = \mu$ возмущения указанного вида могут нарушать асимптотическую устойчивость линейных систем [3]. Иными словами, из асимптотической устойчивости системы

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j$$

где a_{sj} – постоянные коэффициенты, вообще говоря, не следует асимптотическая устойчивость возмущенной системы

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} (a_{sj} + b_{sj}(t))x_j$$

Покажем, что для нелинейных уравнений асимптотическая устойчивость нулевого решения может сохраняться и в случае, когда $\sigma \leqslant \mu$.

Теорема 1. Пусть нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Тогда при выполнении неравенства

$$2\sigma > \mu + 1 \tag{2.1}$$

нулевое решение системы (1.2) также асимптотически устойчиво.

Доказательство. Было показано [4], что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) следует существование положительно-определенных однородных порядка m и $m + \mu - 1$ соответственно функций $V(\mathbf{X})$ и $W(\mathbf{X})$, для которых имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\mathbf{X}) = -W(\mathbf{X})$$

причем функция $V(\mathbf{X})$ дважды непрерывно-дифференцируема.

Для системы (1.2) функцию Ляпунова строим в виде

$$V_1 = V - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_{sj}(\tau)d\tau h_j(\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

Можно проверить, что функция $V_1(t, \mathbf{X})$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [5].

Предложенный метод построения функций Ляпунова для нелинейных нестационарных систем можно использовать и для получения достаточных условий неустойчивости.

Пусть нулевое решение системы (1.1) неустойчиво, причем существует функция $V(\mathbf{X})$, удовлетворяющая требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [5]. Предположим, что $V(\mathbf{X})$ – дважды непрерывно-дифференцируемая однородная функция. Условия существования функций такого вида получены в работах [2, 6].

Теорема 2. При выполнении неравенства (2.1) нулевое решение системы (1.2) неустойчиво.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Исследуем, далее, условия диссипативности системы (1.2).

Определение [7]. Система (1.2) равномерно диссипативна, если существует число $R > 0$, такое, что для любого $H > 0$ можно указать число $T > 0$, для которого при всех $t_0 \geqslant 0$, $t \geqslant t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\| \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0) \| < R$$

если только $\| \mathbf{X}_0 \| \leqslant H$.

Будем полагать, что $f_s(\mathbf{X})$ и $h_j(\mathbf{X})$ – непрерывные однородные функции, $\mu > 0$, $\sigma > 0$. Пусть нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво, причем существует положительно-определенная непрерывно-дифференцируемая однородная функция $V(\mathbf{X})$, производная которой в силу системы (1.1) отрицательно определена. Используя эту функцию, можно установить [7], что при $\sigma < \mu$ система (1.2) будет равномерно диссипативной. Построение функции Ляпунова для системы (1.2) в виде (2.2) позволяет улучшить условия диссипативности в случае, когда $0 < \mu < 1$.

Теорема 3. Если функции

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} h_j(\mathbf{X}), \quad j = 1,\dots,k$$

непрерывно-дифференцируемы, то при выполнении неравенств

$$0 < \mu < 1, \quad 2\sigma < \mu + 1$$

система (1.2) равномерно диссипативна.

Замечания. 1°. Предложенный метод построения функций Ляпунова можно применять и для исследования некоторых типов нелинейных систем, правые части которых не являются однородными функциями одного и того же порядка.

2°. Если функции $h_{sj}(t)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то утверждения теорем 1–3 можно усилить, используя несколько модифицированный способ построения функции $V_1(t, \mathbf{X})$ [8].

3. Рассмотрим некоторые примеры применения доказанных теорем.

Пример 1. Пусть задана система уравнений

$$\dot{x}_s = \partial U(\mathbf{X}) / \partial x_s \tag{3.1}$$

где $U(\mathbf{X})$ – непрерывно-дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка μ функция, $\mu > 1$.

Известно [5], что нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво, а в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \tag{3.2}$$

Рассмотрим систему с возмущениями

$$\dot{x}_s = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(U(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{k} b_j(t) U_j(\mathbf{X}) \right) \tag{3.3}$$

Здесь $U_j(\mathbf{X})$ – непрерывно-дифференцируемые однородные порядка σ функции, $\sigma > 1$, а функции $b_j(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$ вместе с интегралами

$$\int_0^t b_j(\tau) d\tau \tag{3.4}$$

Используя функцию (3.2), получаем, что при $\sigma > \mu$ нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво, а при $\sigma < \mu$ система (3.3) равномерно диссипативна.

Функция V_1, построенная по формуле (2.2), имеет вид

$$V_1 = V(\mathbf{X}) - \sigma \sum_{j=1}^{k} \int_0^t b_j(\tau) d\tau U_j(\mathbf{X})$$

Применяя теоремы 1 и 3, при $\mu > 2$ улучшаем условия асимптотической устойчивости: $2\sigma > \mu + 2$, а при $1 < \mu < 2$ – условия диссипативности: $2\sigma < \mu + 2$.

Пример 2. Рассмотрим механическую систему, движения которой определяются уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

Здесь функция

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \tag{3.5}$$

соответствует кинетической энергии системы, причем матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ непрерывно-дифференцируема, а квадратичная форма

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{q}}$$

положительно определена.

Пусть функция U представима в виде

$$U(\mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q})$$

где $W(\mathbf{q})$ – непрерывно-дифференцируемая положительно-определенная однородная порядка μ функция, $\mu > 2$, функция $R(\mathbf{q})$ непрерывно-дифференцируема и такова, что

$$\| \mathbf{q} \|^{1-\mu} \partial R / \partial \mathbf{q} \to \mathbf{0} \text{ при } \mathbf{q} \to \mathbf{0}.$$

По теореме Ляпунова о неустойчивости равновесия (см. [5]) получаем, что положение равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ неустойчиво, а функция

$$V=\sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

удовлетворяет требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Предположим, далее, что

$$U(\mathbf{q},t)=W(\mathbf{q})+\sum_{j=1}^{k} b_i(t)U_j(\mathbf{q})+R(\mathbf{q})$$

Будем считать, что возмущения обладают свойствами, указанными в примере 1.

Выбирая для возмущенной системы функцию Ляпунова в виде

$$V_1=\sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\sigma\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_j(\tau)d\tau U_j(\mathbf{q})$$

получим, что при выполнении неравенства $2\sigma>\mu+2$ положение равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ также будет неустойчиво.

Пример 3. Пусть движение механической системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial P}{\partial q_s}+Q_s(t,\dot{\mathbf{q}}) \tag{3.6}$$

Здесь кинетическая энергия $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, как и в примере 2, представляет собой квадратичную форму (3.5), $P(\mathbf{q})$ – положительно-определенная дважды непрерывно-дифференцируемая однородная порядка λ функция, $\lambda>2$.

Предположим, что обобщенные силы имеют вид

$$Q_s=\partial W(\dot{\mathbf{q}})/\partial \dot{q}_s$$

где $W(\dot{\mathbf{q}})$ – непрерывно-дифференцируемая отрицательно-определенная однородная порядка μ функция, $\mu>2$. Таким образом, обобщенные силы являются диссипативными и положение равновесия $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ системы (3.6) асимптотически устойчиво [7].

Рассмотрим функцию Ляпунова [9]

$$V=T+P+\alpha\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)^r$$

Здесь α – положительная постоянная, r – рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $r\geqslant 1$. Если $r\geqslant \lambda\mu/[2(\lambda-1)]$, то при достаточно малом α функция V положительно определена, а ее производная в силу системы (3.6) является отрицательно-определенной функцией.

Рассмотрим теперь возмущенную систему, для которой обобщенные силы представимы в форме

$$Q_s=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(W(\dot{\mathbf{q}})+\sum_{j=1}^{k} b_j(t)W_j(\dot{\mathbf{q}})\right)$$

Как и в примерах 1 и 2, считаем, что $W_j(\dot{\mathbf{q}})$ – непрерывно-дифференцируемые однородные порядка σ функции, $\sigma>2$, а функции $b_j(t)$ непрерывны и ограничены при $t\geqslant 0$ вместе с интегралами (3.4).

Функцию Ляпунова для возмущенной системы строим в виде

$$V_1=V-\sigma\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_j(\tau)d\tau W_j(\dot{\mathbf{q}})-\alpha\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\int_0^t b_j(\tau)d\tau\left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)^r\frac{\partial W_j}{\partial \dot{q}_s}$$

Проверяя для функции V_1 условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, получаем, что при выполнении неравенства

$$\sigma > \max\{\mu/2 + 1;\ \mu - 1 + 2/\lambda\}$$

возмущения не нарушают асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Автор благодарит В.И. Зубова и Ф.Л. Черноусько за внимание к работе, а также А.П. Жабко за обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Теорема об устойчивости по первому приближению // Докл. АН СССР. 1951. Т.76. № 6. С. 783–784.
2. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости по первому приближению // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 5. С. 516–530.
3. *Виноград Р.Э.* Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1952. Т.84. № 2. С. 201–204.
4. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
5. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.; Гостехиздат, 1950. 472 с.
6. *Каневский А.Я., Рейзинь Л.Э.* Построение однородных функций Ляпунова–Красовского // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 2. С. 251–259.
7. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York; Heidelberg; Berlin; Springer-Verlag, 1977. 396 p.
8. *Александров А.Ю., Старостенков Б.В.* Достаточные условия неустойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Тр. Алтайского гос. техн. ун-та им. И.И. Ползунова. 1994. Вып. 3. С. 259–263.
9. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 285 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
11.IV.1995