УДК 531.36:62–50

© 1996 г. Е.Р. Белоусова, М.А. Зарх

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

На примере известной модели, описывающей движущийся осциллятор, предлагается способ построения оптимального управления по принципу обратной связи, основанный на пересчете (коррекции) программного управления вдоль реальной траектории. Процедура коррекции заключается в решении специального дифференциального уравнения для моментов переключения.

Статья примыкает к исследованиям [1–6].

1. Постановка задачи. Исследуется задача наискорейшего приведения управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -x_3 + u,\ |u| \leqslant 1 \tag{1.1}$$

в положение равновесия $x_i = 0$ ($i = 1, ..., 4$). В стандартной матричной записи соотношения (1.1) имеют вид $dx/dt = Ax(t) + Bu$. Система (1.1) является упрощенной моделью маятника, управляемого силой, приложенной к точке подвеса. Другие механические примеры, описание которых при определенных допущениях сводится к (1.1), приведены в [1–3].

Система (1.1) имеет два чисто мнимых корня и два нулевых. Кроме того, выполнено условие управляемости. Следовательно [7], из любого начального положения $x_0 \in \mathbf{R}^4$ движение может быть приведено в нуль за конечное время T. Известно [8], что оптимальное программное управление имеет релейный характер (принимает только крайние значения ± 1) и определяется конечным набором моментов переключения t_i и моментом окончания T. С точки зрения приложений позиционное управление (управление по принципу обратной связи) предпочтительней программного, так как обладает свойством саморегуляции в случаях, когда на реальную систему действуют факторы, не учтенные в модели. Позиционное оптимальное управление может быть синтезировано при помощи поверхности переключения, разбивающей пространство $\mathbf{R}^4$ на две части. В одной из них оптимальное управление принимает значение -1, в другой $+1$. Однако поверхность переключения в данной задаче имеет сложную структуру [4], для ее построения и использования требуется мощный компьютер.

В качестве компромиссного варианта может служить схема управления, в которой программное управление постоянно корректируется в реальном времени. Такое управление обладает свойством позиционного и не требует больших вычислительных затрат. В работе предлагается метод, равно применимый как для построения оптимального программного управления в произвольной начальной точке, так и его коррекции в реальном времени. Способы коррекции программного управления в задачах с линейным функционалом качества и линейными ограничениями на терминальное состояние рассматривались в [5, 6].

2. Параметризация оптимальных процессов. *2.1. Идея параметризации.* Для линейных систем принцип максимума Л.С. Понтрягина может быть интерпретирован как способ параметризации семейства экстремальных процессов, т.е. процессов, формирующих границу области достижимости. В качестве параметра служит граничное значение решения сопряженной системы. Построение оптимального управления по существу сводится к отысканию соответствующего значения параметра. Совокупность экстремальных управлений не зависит от начальной точки.

Запишем основное соотношение принципа максимума в виде

$$l'\Phi(\tau)Bu(T-\tau) = \max_{|\xi|\le 1} l'\Phi(\tau)B\xi \tag{2.1}$$

Здесь $\tau = T - t$ – обратное время, l – вектор, имеющий геометрический смысл нормали к области достижимости, $\Phi(\tau)$ – фундаментальная матрица Коши. Воспользуемся известным приемом выпускания траекторий из начала координат в обратном времени

$$d\tilde{x} / d\tau = -(A\tilde{x}(\tau) + B\tilde{u}) \tag{2.2}$$

При любом $T > 0$ каждая оптимальная траектория (2.2) совпадает с оптимальной траекторией (1.1), выпущенной из начального положения $\tilde{x}(T)$. Именно: $x(t) = \tilde{x}(\tau)$, $u(t) = \tilde{u}(\tau)$. Таким образом, для заданного начального состояния x^0 требуется найти вектор l, определяющий оптимальную траекторию (2.2), которая приходит в x^0.

Обозначим $p(\tau) = \Phi(\tau)B$ и заменим соотношение (2.1) уравнением для моментов переключения (в обратном времени). Получим

$$l'p(\tau) = 0 \tag{2.3}$$

При последнем переходе потеряна информация о знаке управления, так как корни (2.3) определяют пару симметричных по знаку управлений. Поэтому введем дополнительный параметр $\sigma = \tilde{u}(+0)$, который вместе с корнями уравнения (2.3) однозначно определяет управление на всем интервале $[0, T]$. В результате получаем возможность использовать произвольный ненулевой представитель прямой λl, не заботясь о знаке скалярного произведения $l'p(\tau)$ между корнями.

Для системы (1.1) имеем

$$\Phi(\tau) = \begin{Vmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tau & \sin\tau \\ 0 & 0 & -\sin\tau & \cos\tau \end{Vmatrix}, \quad p(\tau) = \begin{Vmatrix} \tau \\ 1 \\ \sin\tau \\ \cos\tau \end{Vmatrix}$$

Уравнение (2.3) в скалярной форме принимает вид

$$l_1\tau + l_2 + l_3\sin\tau + l_4\cos\tau = 0 \tag{2.4}$$

Обычно, чтобы согласовать количество свободных параметров с размерностью системы, накладывают дополнительное ограничение $|l| = 1$. В рассматриваемом случае трехпараметрическим эквивалентом (2.4) является равенство

$$a\tau + b = \sin(\tau + \varphi) \tag{2.5}$$

Решения уравнения (2.5) на промежутке $[0, T]$ дают моменты переключения и являются точками пересечения синусоиды $\sin(\tau + \varphi)$ и прямой $a\tau + b$. Если синусоида и прямая на промежутке $[0, T]$ не пересекаются, это означает, что до момента времени T действует постоянное управление, равное σ.

2.2. Параметризация при помощи моментов переключения. Обозначим через $\tau_i (i = 1, ..., n)$ упорядоченные корни уравнения (2.3) на интервале $[0, T]$. Приведем (без доказательства) два утверждения.

Утверждение 1. Пусть $n \geq 3$. За исключением частного случая, когда расстояние между любыми двумя корнями кратно 2π, можно указать три различных корня τ_{i_1}, τ_{i_2}, τ_{i_3} (например, два соседних и любой третий), таких, что векторы $p(\tau_{i_1})$, $p(\tau_{i_2})$, $p(\tau_{i_3})$ линейно независимы. В выделенном частном случае оптимальное управление постоянно.

Утверждение 2. Участок траектории $\tilde{x}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_3$, принадлежит поверхности переключения.

Введем параметризацию оптимальных процессов, где в роли параметров выступают моменты переключения. Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим три корня уравнения (2.3). Обозначим их τ_{i_1}, τ_{i_2}, τ_{i_3} и считаем, что векторы $p(\tau_{i_1})$, $p(\tau_{i_2})$, $p(\tau_{i_3})$ линейно независимы. Тогда ненулевой представитель прямой λl может быть выражен через τ_{i_1}, τ_{i_2}, τ_{i_3}. Сохраняя старое обозначение l, имеем

$$l = \sum_{k=1}^{4} \det(p(\tau_{i_1}),\ p(\tau_{i_2}),\ p(\tau_{i_3}),\ e_k)e_k$$

Здесь e_k ($k = 1, ..., 4$) – ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^4$, det – определитель матрицы со столбцами $p(\tau_{i_1})$, $p(\tau_{i_2})$, $p(\tau_{i_3})$, e_k. Уравнение (2.3) принимает вид

$$g(\tau) \triangleq \det(p(\tau_{i_1}), p(\tau_{i_2}), p(\tau_{i_3}), p(\tau)) = 0 \tag{2.6}$$

Моменты $\tau = \tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}$ являются корнями уравнения (2.6) автоматически. Остальные моменты переключения становятся неявными функциями τ_{i_1}, τ_{i_2}, τ_{i_3}. Однако, условия теоремы о неявной функции не всегда выполнены. В связи с этим введем классификацию оптимальных процессов.

Корень уравнения (2.3) назовем регулярным (или переключением), если он отличен от 0, T и имеет кратность 1. Корень уравнения (2.3) считаем нерегулярным, если он не является регулярным.

Оптимальный процесс (ОП) назовем регулярным, если $n \geq 3$ и все корни уравнения (2.3) регулярны. При $n \geq 3$ ОП считаем нерегулярным, если существует хотя бы один нерегулярный корень уравнения (2.3) на отрезке $[0, T]$. К нерегулярным отнесем также ОП, для которых количество корней уравнения (2.3) меньше трех.

В регулярном случае в качестве параметров можно брать любые три переключения. Уравнение для определения всех моментов переключения имеет вид (2.6).

Подмножество нерегулярных ОП допускает специальную параметризацию. Приведем соотношения, задающие *двупараметрические* (при фиксированном T) семейства ОП с одним нерегулярным корнем. Именно они важны с точки зрения численных построений. Остальные случаи (двойная, тройная нерегулярность) при вычислениях маловероятны, поэтому их описание в данной статье не приводится.

Пусть $n \geq 3$. Предположим, что имеется не менее двух переключений и один нерегулярный корень. Наличие нерегулярного корня накладывает дополнительное ограничение на вектор l. Чтобы выделить векторы l, отвечающие нерегулярным процессам, будем использовать нерегулярный корень в выражении для l. Следовательно, наряду с общим соотношением (2.6), охватывающим все без исключения ОП, для нерегулярных ОП получим специальные аналоги (2.6).

В случае, когда $\tau = 0$ является корнем, берем не любую тройку векторов, ортогональных l, а тройку, включающую вектор $p(0)$ и два вектора $p(\bar{\tau})$, $p(\bar{\bar{\tau}})$ с регулярными корнями $\bar{\tau}$, $\bar{\bar{\tau}}$. Соотношение (2.6) принимает вид

$$\det(p(\bar{\tau}),\ p(\bar{\bar{\tau}}),\ p(0),\ p(\tau)) = 0 \tag{2.7}$$

Аналогично для корня $\tau = T$.

$$\det(p(\bar{\tau}),\ p(\bar{\bar{\tau}}),\ p(T),\ p(\tau)) = 0 \tag{2.8}$$

В случае, когда нерегулярность обусловлена наличием кратного корня τ_* (ситуация касания синусоиды и прямой), вектор l ортогонален $p(\tau_*)$ и $\dot{p}(\tau_*)$. Взяв эту пару векторов и вектор $p(\bar{\tau})$ с регулярным корнем $\bar{\tau}$, получим

$$\det(p(\bar{\tau}),\ p(\tau_*),\ \dot{p}(\tau_*),\ p(\tau)) = 0 \tag{2.9}$$

Соотношения (2.7)–(2.9) задают параметризацию нерегулярных ОП с одной особенностью. Подобным способом можно получить соотношения для нерегулярных ОП, которые характеризуются наличием двух и более особенностей.

Заметим, что при $n \geq 3$ в регулярном и описанных выше нерегулярных случаях ОП соответствует единственное направление l.

Пусть $n = 2$ и корни τ_1, τ_2 регулярные. Такому ОП с двумя переключениями соответствует двумерный конус векторов l, для каждого из которых уравнение (2.3) имеет одну и ту же пару регулярных корней τ_1, τ_2. Других корней нет, если вектор l является внутренним. Для образующих конуса появляется третий корень (при этом структура ОП не меняется). Одной из образующих конуса соответствует появление нерегулярного корня $\max\{0, \tau_{*1}\}$, другой образующей – корня $\min\{T, \tau_{*2}\}$. Здесь τ_{*1} и τ_{*2} – решения уравнения

$$\det(p(\tau_1),\ p(\tau_2),\ p(\tau_*),\ \dot{p}(\tau_*)) = 0$$

соответственно ближайшее слева к τ_1 и ближайшее справа к τ_2. Комбинация $\tau_{*1} > 0$, $\tau_{*2} < T$ невозможна. Таким образом, каждая конкретная пара τ_1, τ_2 может быть дополнена третьим корнем, причем двумя способами. Другими словами, рассматриваемый ОП описывается двумя из соотношений (2.7)–(2.9). В (2.7), (2.8) в качестве $\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}$ берутся моменты τ_1 и τ_2, в (2.9) в качестве $\bar{\tau}, \tau_*$ – моменты τ_1 и $\tau_{*1}(\tau_{*2})$.

Итак, введена параметризация регулярных ОП и двупараметрических нерегулярных ОП через моменты переключения.

2.3. Особые поверхности. Если наряду с изменением параметров $\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}$ варьировать T, то концы $\tilde{x}(T)$ нерегулярных траекторий, задаваемых (2.7)–(2.9), образуют систему особых трехмерных поверхностей, разбивающих $\mathbf{R}^4$ на области регулярных ОП. В частности, особая поверхность типа (2.8) есть поверхность переключения. Если нерегулярный ОП описывается соотношением (2.8) и имеет больше двух переключений, то соответствующая траектория протыкает поверхность переключения в момент T, переходя при этом из одной регулярной области в другую. Во всех остальных случаях нерегулярные оптимальные траектории идут по особым поверхностям.

Точки пересечения двух трехмерных особых поверхностей разных типов (в частности, траектории с одним переключением управления) порождают двумерные особые многообразия. Последние сопрягаются на особых линиях. В частности, особой линией является пара траекторий, отвечающих постоянному управлению $u = \pm 1$. Ранее[1] подробно описана сруктура трехмерной поверхности переключения и особых многообразий меньших размерностей на ней.

Рассмотрим трехмерную особую поверхность как границу между двумя регулярными областями. Опишем варианты изменения количества моментов переключения при переходе через особую поверхность. Эти сведения понадобятся в следующем разделе. Если количество регулярных корней на поверхности больше двух, то в одной области нерегулярный корень становится регулярным (в случаях (2.7), (2.8)) или по-

---

[1] *Белоусова Е.Р., Зарх М.А.* Поверхность переключения в линейной задаче быстродействия четвертого порядка. Екатеринбург. 1992. 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.07.92, № 2442-В92.

рождает пару близких регулярных корней (в случае (2.9)). Во второй области нерегулярный корень исчезает. Ситуация, когда количество регулярных корней равно двум, характеризуется наличием двух ("заменяющих" друг друга) дополнительных нерегулярных корней (это либо 0, T, либо 0, τ_{*2}, либо τ_{*1}, T). При переходе через особую поверхность один из нерегулярных корней исчезает, а второй становится регулярным.

Отметим, что предложенная параметризация (2.6)–(2.9) может быть использована и для других управляемых систем. Она сокращает число переменных, участвующих в спецификации ОП, а также является удобным инструментом описания нерегулярностей.

3. Процедура коррекции. Рассмотрим регулярный ОП с переключениями $\tau_1, \ldots, \tau_n$ на промежутке $[0, T]$ и знаком σ управления $\tilde{u}$ на промежутке $(0, \tau_1)$. По формуле Коши имеем

$$\tilde{x} = \tilde{x}(T) = \sigma \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} p(\tau - T) d\tau; \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_{n+1} = T \tag{3.1}$$

Соотношения (2.6), (3.1) позволяют вычислить вариации конца траектории $\tilde{x}(T)$ и моментов переключения при варьировании параметров $\tau_1, \tau_2, \tau_3, T$:

$$d\tilde{x} = MCds, \quad dS = CdS \tag{3.2}$$

$$s = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, T)', \quad S = (\tau_1, \ldots, \tau_n, T)'$$

$$M = \left\| \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \tau_j} \right\|_{k=1,\ldots,4}^{j=1,\ldots,n+1}, \quad C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \left\| \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} \right\|_{i=4,\ldots,n}^{k=1,2,3} & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\partial \tilde{x} / \partial T = -(A\tilde{x} + B\tilde{u}(T)), \quad \tilde{u}(T) = (-1)^n \sigma$$

$$\partial \tilde{x} / \partial \tau_j = (-1)^j 2\sigma p(\tau_j - T), \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\partial \tau_i / \partial \tau_1 = -\det(\dot{p}(\tau_1), \ p(\tau_2), \ p(\tau_3), \ p(\tau_i)) / d$$

$$\partial \tau_i / \partial \tau_2 = -\det(p(\tau_1), \ \dot{p}(\tau_2), \ p(\tau_3), \ p(\tau_i)) / d$$

$$\partial \tau_i / \partial \tau_3 = -\det(p(\tau_1), \ p(\tau_2), \ \dot{p}(\tau_3), \ p(\tau_i)) / d$$

$$d = \det(p(\tau_1), \ p(\tau_2), \ p(\tau_3), \ \dot{p}(\tau_i))$$

Для регулярного процесса матрица MC невырождена, поэтому из (3.2) следует

$$dS = C(MC)^{-1} d\tilde{x} \tag{3.3}$$

Перейдем к построению оптимального программного управления (ОУ) для произвольно заданной начальной точки $x_0 \in \mathbf{R}^4$. Будем считать, что известно некоторое (никак не связанное с x_0) программное управление на некотором промежутке времени $[0, T_{00}]$, заданное вектором S_{00} и параметром σ_{00}. Первые n компонент вектора S_{00} должны быть корнями уравнения (2.6), других корней на промежутке $[0, T_{00}]$ быть не должно. Пусть $x_{00} = \tilde{x}(T_{00})$ – начальное положение, рассчитываемое по формуле (3.1) и отвечающее этому ОУ. Потребуем, чтобы вариация конца траектории была направлена к точке x_0. Для этого представим $d\tilde{x}$ в виде

$$d\tilde{x} = (x_0 - x_{00}) d\mu \tag{3.4}$$

где μ – скаляр, параметризующий отрезок $[x_{00}, x_0]$: $x(\mu) = x_{00} + \mu(x_0 - x_{00})$, $0 \le \mu \le 1$,

$x(0) = x_{00}$, $x(1) = x_0$. Подставив выражение (3.4) в соотношение (3.3), получим уравнение

$$dS / d\mu = C(MC)^{-1}(x_0 - x_{00}) \tag{3.5}$$

Если отрезок $[x_{00}, x_0]$ не пересекает особые поверхности, то, проинтегрировав (3.5) с начальным условием $S(0) = S_{00}$, найдем для точки x_0 ОУ, задаваемое парой $S_0 = S(1)$, $\sigma_0 = \sigma_{00}$. При интегрировании уравнения (3.5) матрицы C и M пересчитываются на каждом шаге по явным формулам.

Разумеется, априори неизвестно, пересекает ли отрезок $[x_{00}, x_0]$ особые поверхности. Поэтому, интегрируя (3.5), следует контролировать выход на особую поверхность и, пересекая ее, трансформировать вектор S в соответствии со схемой, изложенной в п. 2.3. В случаях, когда момент переключения уходит или появляется в нуле, знак σ меняется на противоположный.

Замечание. За исключением специально подобранных случаев, вероятность того, что отрезок $[x_{00}, x_0]$ пересекает особое многообразие размерности меньшей, чем 3, равна нулю. Именно поэтому в п. 2.3 было дано описание только трехмерных особых поверхностей.

Продемонстрируем работу алгоритма на примере построения ОУ для начального положения $x_0 = (0{,}05;\ 0{,}50;\ 6{,}00;\ -2{,}00)'$. В качестве исходного управления была использована пара $S_{00} = (2{,}00;\ 5{,}00;\ 7{,}50;\ 8{,}00)'$, $\sigma_{00} = +1$. Ей отвечает начальная точка $x_{00} = (4{,}75;\ -1{,}00;\ 4{,}80;\ -0{,}87)'$, просчитанная по формуле (3.1). Управление S_{00}, σ_{00} оптимально для точки x_{00}, поскольку только моменты 2; 5 и 7,5 являются корнями уравнения (2.6) на отрезке [0, 8]. На фиг. 1 представлен график изменения компонент вектора S вдоль отрезка $[x_{00}, x_0]$. Отрезок $[x_{00}, x_0]$ пересекает две особые поверхности, при переходе каждой из них добавлялось новое переключение. Выход на поверхность фиксировался равенством $g(0) = 0$, а неравенство $\tau_1 > 0$ указывало на то, что нулевой корень должен быть включен в вектор S. В результате работы алгоритма получено ОУ для начального положения x_0, задаваемое парой $S_0 = (0{,}57;\ 2{,}53;\ 6{,}06;\ 9{,}82;\ 11{,}52;\ 12{,}08)'$, $\sigma_0 = +1$. Время оптимального перевода из x_0 в нуль равно 12,08.

В качестве второй иллюстрации рассмотрим задачу построения ОУ для начальных точек на прямой $X_1 = \{(x_1;\ 0;\ 0;\ 0)' : x_1 \in \mathbf{R}^1\}$. Было установлено [1], что при $x_1 \neq \pm 4\pi^2 k^2$, $k \in N$, ОУ имеет три переключения, причем

$$\tau_2 = T/2,\ \ \tau_3 = T - \tau_1 \tag{3.6}$$

Для $x_1 = \pm 4\pi^2 k^2$ ОУ имеет одно переключение $\tau_1 = 2\pi k$, а время перевода $T = 4\pi k$. Предложенный ранее [1] способ отыскания моментов $\tau_1, \tau_2, \tau_3, T$ в общем случае сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения относительно T.

Следуя подходу, предлагаемому в настоящей работе, выведем дифференциальное уравнение, описывающее изменение ОП при "движении" начальной точки вдоль прямой X_1. В результате решения уравнения получим ОУ как функцию от x_1.

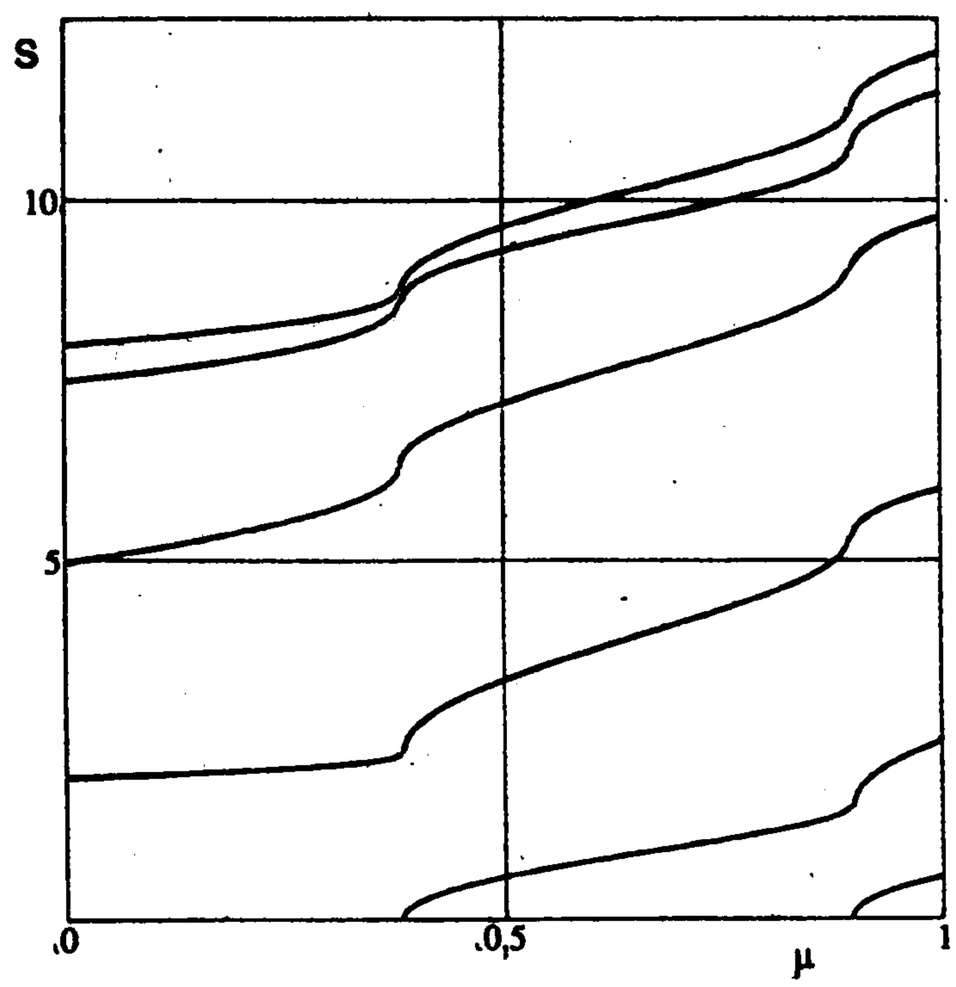
Для процессов с тремя переключениями матрица C – единичная и, следовательно, соотношение $d\tilde{x} = MCds$ из (3.2) при $\sigma = -1$ принимает вид

$$2\begin{Vmatrix} -(\tau_1 - T) & (\tau_2 - T) & -(\tau_3 - T) & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1/2 \\ -\sin(\tau_1 - T) & \sin(\tau_2 - T) & -\sin(\tau_3 - T) & 0 \\ -\cos(\tau_1 - T) & \cos(\tau_2 - T) & -\cos(\tau_3 - T) & 1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d\tau_1 \\ d\tau_2 \\ d\tau_3 \\ dT \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

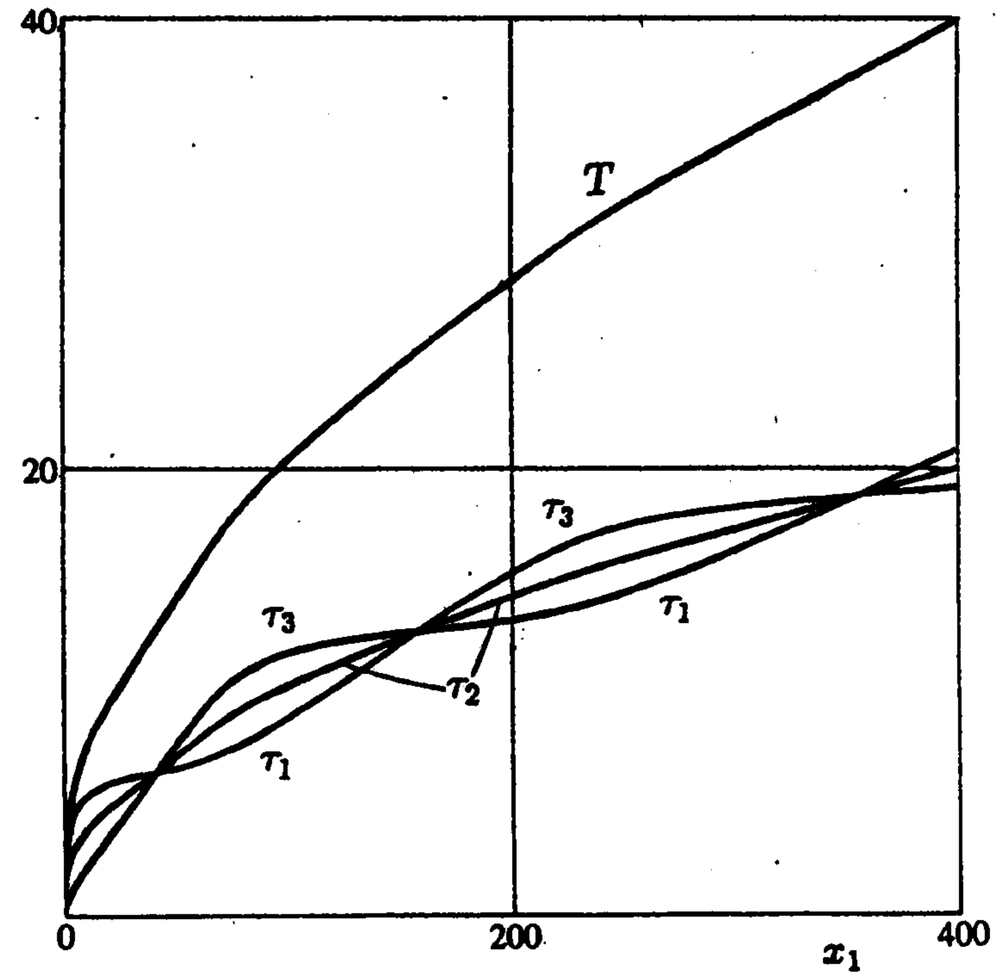
Рассмотрим вариации вида $dx = (dx_1;\ 0;\ 0;\ 0)'$ и подставим в (3.7) выражения (3.6) для τ_2, τ_3, а также аналогичные выражения для дифференциалов $d\tau_2$, $d\tau_3$. Достаточно использовать лишь одну строку матричного равенства (3.7). Выбрав третью строку и разрешив ее относительно $d\tau_1/dT$, получим

$$d\tau_1 / dT = (\sin\tau_1 - \sin(T/2)) / [2(\sin(\tau_1 - T) + \sin\tau_1)] \tag{3.8}$$

Нетрудно проверить при помощи формулы (3.1), что ОП $S_{00} = (\pi/2;\ \pi;\ 3\pi/2;\ 2\pi)'$, $\sigma_{00} = -1$ отвечает начальному положению $x_{00} = (\pi^2/2;\ 0;\ 0;\ 0)'$. Значит, в качестве начального условия



Фиг. 1



Фиг. 2

для (3.8) можно взять $\tau_1(2\pi) = \pi/2$. Проинтегрировав (3.8), получим $\tau_1^{\cdot} = \tau_1(T)$. С учетом (3.6) имеем $\tau_2 = \tau_2(T)$, $\tau_3 = \tau_3(T)$. Равенство (3.1) дает $x_1 = x_1(T)$. Отсюда можно выразить T через x_1. На фиг. 2 представлены графики функций τ_1, τ_2, τ_3, T от x_1.

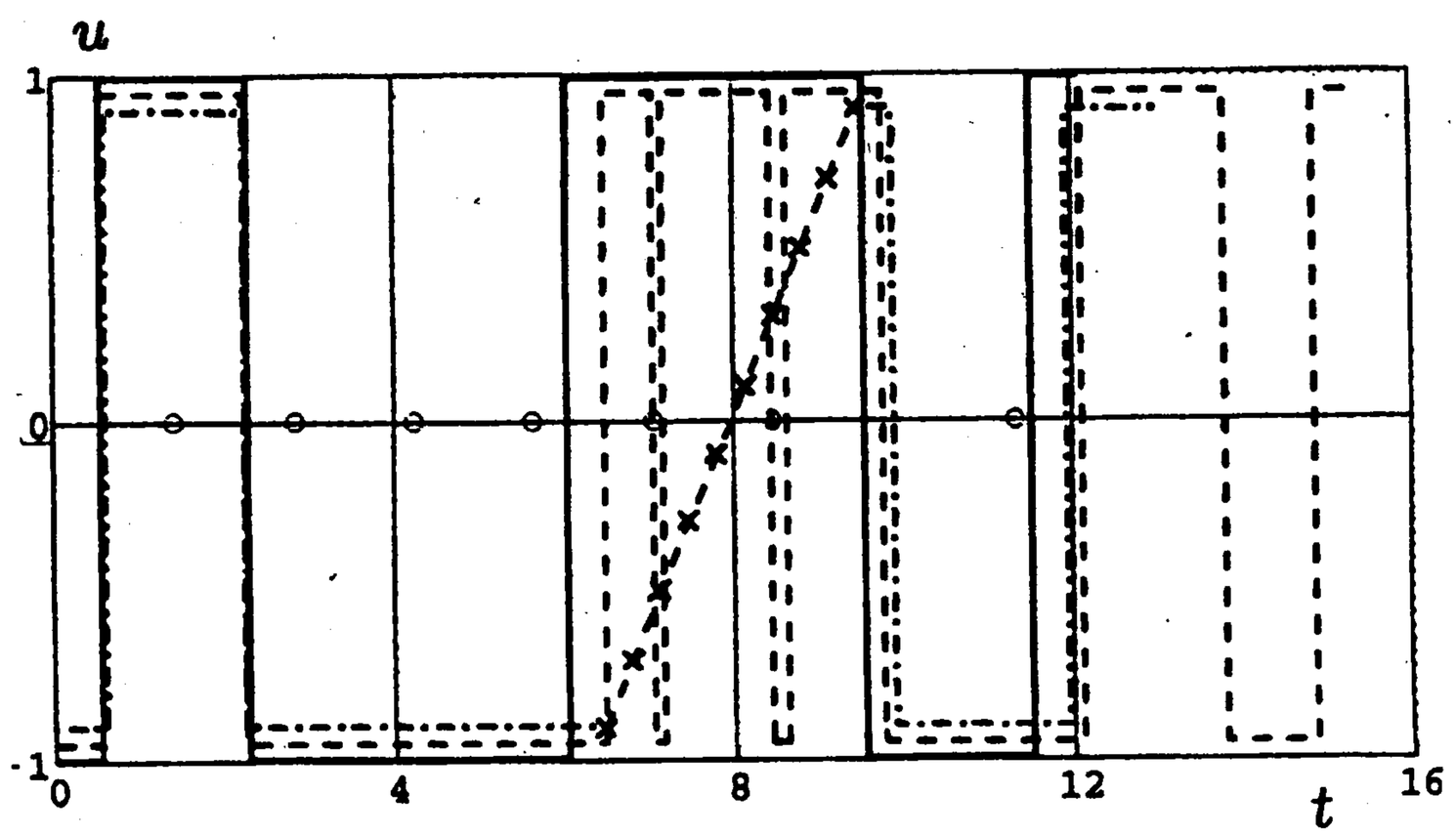
Таким образом, уравнение (3.8) позволяет находить ОУ сразу для всех точек прямой X_1.

4. Корректирующая обратная связь. Будем теперь рассматривать систему (1.1) как идеализированную эталонную модель, служащую для выработки управления в реальной системе, описание динамики которой отличается от (1.1) (например, вхождением помехи). Через $x(t)$ обозначим положение эталонной системы в момент t, через $\bar{x}(t)$ – положение реальной системы. Размерности векторов $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ считаем одинаковыми. Пусть начальное положение x^0 реального и эталонного движений в момент $t_0 = 0$ одно и то же. Зададим параметр $\varepsilon > 0$, при помощи которого будем определять моменты коррекции в реальной системе. В моменты коррекции положение эталонной системы меняется скачком.

Найдем ОУ $S(x^0)$, $\sigma(x^0)$ и, следовательно, эталонное движение $x(\cdot)$ системы (1.1) из точки x^0. Эталонное программное управление действует в реальной системе до первого момента t_1^*, когда $|x(t_1^*) - \bar{x}(t_1^*)| \geq \varepsilon$. ОУ для положения $x(t_1^*)$ эталонной системы известно: $S(x(t_1^*)) = S(x^0)|_{[0,T(x^0)-t_1^*]}$, $\sigma(x(t_1^*)) = \sigma(x^0)$. Выполнив процедуру коррекции, где в качестве x_{00}, x_0 в (3.5) следует взять точки $x(t_1^*)$ и $\bar{x}(t_1^*)$ найдем ОУ для состояния $\bar{x}(t_1^*)$. Следовательно, получено новое эталонное движение из точки $\bar{x}(t_1^*)$. Найденное ОУ действует в реальной системе до следующего момента коррекции t_2^*, когда $|x(t_2^*) - \bar{x}(t_2^*)| \geq \varepsilon$, и т.д.

Выбор моментов коррекции может осуществляться другими способами, отличными от описанного. Например, коррекция может выполняться с заданным шагом Δ по времени. При $\Delta \to 0$ переходим в режим непрерывной коррекции.

Замечания. 1°. В случае, когда в векторе $S(x(t_i^*))$ осталось меньше трех моментов переключения (т.е. точка $x(t_i^*)$ находится на поверхности переключения), вводятся дополнительные моменты переключения с целью получения на входе процедуры коррекции регулярного ОП для некоторой близкой к $x(t_i^*)$ точки.



Фиг. 3

Если в векторе $S(x(t_i^*))$ осталось одно переключение τ_1, то дополнительные переключения берутся в виде $\tau_1 - \delta$, $\tau_1 + \delta$ (δ – малое положительное число). Если в векторе $S(x(t_i^*))$ два переключения τ_1, τ_2, то вводятся либо два дополнительных переключения $\tau_* - \delta$, $\tau_* + \delta$ ($\tau_* \in (0, \tau_1)$), либо одно дополнительное переключение δ (в последнем случае параметр σ меняет знак). Момент τ_* и подходящий вариант из двух указанных определяются по правилу, описанному в п. 2.2. Если в векторе $S(x(t_i^*))$ нет переключений, то рассматриваются моменты переключения $T - 3\delta$, $T - 2\delta$, $T - \delta$.

2°. Считая, что реальное движение описывается дифференциальным уравнением с известной или точно измеряемой правой частью f, можно выписать уравнение непрерывной коррекции

$$dS/dt = C(MC)^{-1}(f - (A\bar{x} + Bu)) \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) имеет классическое решение в регулярных областях, преобразуемое при переходе через особые поверхности типов (2.7), (2.9). На поверхности переключения решение определяется по А.Ф. Филиппову [9].

Для коррекции в регулярной области с малым шагом Δ из (4.1) имеем

$$S(t+\Delta) = S(t) + C(MC)^{-1}(\bar{x}(t+\Delta) - x(t+\Delta)) \tag{4.2}$$

Таким образом, получили формулу, совпадающую с одношаговым решением уравнения (3.5). Для реализации вычислений по этой формуле используются состояния $\bar{x}$ и x в дискретные моменты времени.

В случае, когда отрезок $[x(t+\Delta), \bar{x}(t+\Delta)]$ пересекает особую поверхность в некоторой точке $x(t+\Delta) + \mu(\bar{x}(t+\Delta) - x(t+\Delta))$, $0 \le \mu \le 1$, соотношение (4.2) заменяется на два

$$S_* = S(t) + \mu C(MC)^{-1}(\bar{x}(t+\Delta) - x(t+\Delta))$$

$$S(t+\Delta) = S^* + (1-\mu)C(MC)^{-1}(\bar{x}(t+\Delta) - x(t+\Delta))$$

где вектор S_* преобразуется в S^* в соответствии с пересекаемой особенностью.

Продемонстрируем работу корректирующей обратной связи на "реальной" системе, описываемой уравнением

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}(t) + Bu + v(t), \quad v(t) = \begin{cases} 0, \ 1(1, 1, \sin t, \cos t)' & t \in [0, 3\pi] \\ \mathbf{0}, & t > 3\pi \end{cases}$$

где матрицы A, B такие же как в (1.1), а $v(t)$ интерпретируется как некоторая помеха.

t_i^*	$S(x(t_i^*))$	$S(\bar{x}(t_i^*))$
1,41	(0,56; 2,53; 6,06; 9,82; 10,67)	(0,70; 2,71; 6,17; 10,06; 10,88)
2,84	(0,70; 2,71; 6,17; 9,46)	(0,84; 2,88; 6,21; 9,63)
4,24	(0,84; 2,88; 6,21; 8,23)	(0,93; 2,98; 6,20; 8,33)
5,64	(0,93; 2,98; 6,20; 6,93)	(0,99; 3,05; 6,18; 7,00)
7,06	(0,99; 3,05; 5,58)	(1,07; 3,21; 5,67; 5,76)
8,45	(1,07; 3,21; 4,37)	(1,14; 3,32; 4,47; 4,63)
11,32	(1,14; 1,77)	(0,56; 1,62; 3,33; 4,11)

Рассмотрим начальную точку $x^0 = (0{,}05;\ 0{,}50;\ 6{,}00;\ -2{,}00)'$. Эталонное движение для нее найдено в разд. 3. На фиг. 3 показаны эталонное оптимальное программное управление для x^0 (сплошная линия), реальное управление, синтезированное корректирующей обратной связью (штриховая линия; $\varepsilon = 0{,}3$; моменты коррекции отмечены светлыми точками), и реализация управления, полученная в результате непрерывной коррекции (штрихпунктирная линия; моменты коррекции выбирались с шагом $\Delta = 0{,}05$; участок, где изображена наклонная штриховая линия, отмеченная крестиками, соответствует скользящему режиму). В таблице для случая $\varepsilon = 0{,}3$ представлены моменты коррекции, входные и скорректированные векторы переключений. Последняя коррекция выполнена после прекращения действия помехи. Все движения приходят в начало координат.

Авторы благодарят В.С. Пацко за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л.* Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. N 6. С. 94–100.
3. *Черноусько Ф.Л.* О построении ограниченного управления в колебательных системах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549–558.
4. *Белоусова Е.Р., Зарх М.А.* Построение поверхности переключения в линейной задаче быстродействия четвертого порядка // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 6. С. 126–139.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Способ оптимального управления движением динамической системы при постоянно действующих возмущениях // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 854–863.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. N 4. С. 3–19.
7. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
9. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Екатеринбург, Хайфа

Поступила в редакцию
5.V.1995