УДК 62-50

© 1996 г. Л.Т. Ащепков, Н.И. Баранчикова

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ПОЗИЦИОННЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Получен аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина в классе позиционных управлений (функций фазового состояния и времени [1]). Приведены соответствующие сопряженные линейные уравнения с частными производными первого порядка. Показано применение необходимых условий оптимальности для синтеза оптимальных систем.

Среди известных теоретических подходов к проблеме синтеза оптимальных систем отметим принцип максимума [2], метод динамического программирования [3], достаточные условия оптимальности [4] и теорию поля экстремалей [5]. Каждый подход использует посылки и конструкции, которые определяют, а иногда и ограничивают область его применения. Это априорное предположение гладкости функции Беллмана в [3], неопределенность с выбором вспомогательных функций в [4] и необходимость решать семейство задач программного оптимального управления с произвольными начальными значениями траектории в [2, 5].

В данной работе приводится доказательство аналога принципа максимума Л.С. Понтрягига [2] непосредственно в классе позиционных управлений. В качестве объекта исследования выбрана относительно простая задача терминального управления со свободным правым концом траектории. Для получения необходимых условий оптимальности используется техника игольчатого варьирования управления и малого варьирования поверхностей его разрыва. На этапе представления главных членов приращения целевого функционала появляется сопряженная линейная система дифференциальных уравнений с частными производными и соответствующими граничными условиями – так называемая сопряженная краевая задача. В предположении существования непрерывного кусочно-гладкого решения сопряженной краевой задачи устанавливается, что оптимальное позиционное управление максимизирует гамильтонову функцию.

По аналогии с [2] установленный результат назван позиционным принципом максимума. Показана его связь с принципом максимума Л.С. Понтрягина, с основным уравнением динамического программирования и обобщение на случай нескольких поверхностей разрыва управления. Возможности позиционного принципа максимума демонстрируются на линейной и линейно-квадратичной задачах оптимального управления. Предложена процедура синтеза кусочно-постоянного управления и рассмотрен иллюстративный пример.

Несколько пояснительных слов об исходных предположениях и способе изложения материала. Доказательство принципа максимума из соображений простоты проводится для позиционного управления с одной поверхностью разрыва. Предполагается, что порождаемые управлением траектории пересекают поверхность разрыва без односторонних касаний, либо остаются на ней. Такая картина характерна для многих решенных задач синтеза [2, 6]. Результаты, полученные для одной поверхности разрыва, без труда распространяются на случай нескольких поверхностей разрыва управления, если в рассматриваемой части пространства они не пересекаются. Соответствующие обобщения приводятся в работе без доказательства.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J=\Phi(x(t_1))\to\min,\quad \dot{x}=f(x,u,t)$$

$$u(x,t)\in U,\quad (x,t)\in R^n\times T \tag{1.1}$$

где $\Phi\colon R^n\to R$ – дифференцируемая, $f\colon R^n\times U\times T\to R^n$ – непрерывная вместе с матрицами производных f_x, f_u функции, U – непустое ограниченное подмножество R^r, $T = [0, t_1]$ – фиксированный отрезок числовой оси.

Кусочно-непрерывную функцию u: $R^n \times T \to U$ с кусочно-непрерывной производной u_x назовем управлением. Решение векторного дифференциального уравнения (1.1) при заданном управлении и начальных значениях определим по А.Ф. Филиппову [7]. Если начальные значения лежат в области гладкости управления, то в малой их окрестности введенное решение совпадает [7] с классическим решением, существует и единственно [8] на основании известных результатов качественной теории дифференциальных уравнений. Для остальных начальных значений решение может быть не единственным. В таком случае условимся ставить в соответствие управлению $u(x, t)$ и начальным значениям $x_0 \in R^n$, $t_0 \in T$ одно из решений $x(t, x_0, t_0)$ дифференциального уравнения (1.1), на котором функция $\Phi(x(t_1, x_0, t_0))$ достигает наименьшего значения. Все решения считаем продолжимыми на отрезок T при любом управлении.

Выберем и зафиксируем произвольное управление $u(x, t)$. Свяжем с ним некоторое множество $D \subset R^n \times T$, заполненное соответствующими интегральными кривыми уравнения (1.1). Это означает, что вместе с любой точкой (x_0, t_0) множество D содержит кривую $(x(t, x_0, t_0), t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Множество D может быть замкнутым или не замкнутым и состоять, например, из единственной интегральной кривой.

Назовем управление $u(x, t)$ оптимальным на множестве D, если для каждой точки (x_0, t_0) из D и любого управления $\tilde{u}(x, t)$ выполняется неравенство

$$\Phi(x(t_1, x_0, t_0)) \leqslant \Phi(\tilde{x}(t_1, x_0, t_0))$$

где $(\tilde{x}(t_1, x_0, t_0, t)$ – соответствующая $\tilde{u}(x, t)$ интегральная кривая, исходящая из точки (x_0, t_0) и необязательно целиком лежащая в D.

Цель работы состоит в выводе и обсуждении необходимых условий оптимальности для позиционных управлений.

2. Нормальное управление. Сохранив прежние обозначения, предположим, что управление $u(x, t)$ имеет единственную гладкую поверхность разрыва P размерности n, заданную в окрестности D уравнением $p(x, t) = 0$. Скалярную функцию p считаем непрерывно дифференцируемой в окрестности D с ненулевым градиентом $\nabla p = (p_x, p_t)$ в точках поверхности P. Сужения функций $u(x, t), f(x, u(x, t), t)$ на области $p > 0, p < 0$ обозначим $u^{\pm}(x, t), f^{\pm}(x, t)$ соответственно. Кроме того, примем

$$\dot{p}^{\pm}(x,t) = p_x(x,t)' f^{\pm}(x,t) + p_t(x,t)$$

Здесь и далее штрих используется как знак транспонирования. Запись $a'b$ означает скалярное произведение векторов (столбцов) a, b.

Назовем управление $u(x, t)$ нормальным на множестве D, если выполнены следующие условия:

1) функции u^-, u^+ имеют дифференцируемые по x и непрерывные по t продолжения из областей $p < 0$, $p > 0$ соответственно на малую окрестность поверхности P с сохранением значений из U;

2) в малой окрестности поверхности P справедливы неравенства $\dot{p}^- > 0$, $\dot{p}^+ > 0$ или соотношения $\dot{p}^- > 0$, $\dot{p}^+ \equiv 0$;

3) в каждой точке $(x, t) \in P$ объединение замыканий множеств

$$\{v \in U: p_x(x,t)' f(x,v,t) + p_t(x,t) > 0\}$$

$$\{v \in U: p_x(x,t)' f(x,v,t) + p_t(x,t) < 0\}$$

совпадает с U;

4) непрерывное решение $\psi(x, t)$ сопряженной краевой задачи

$$\psi_t + \psi_x f(x,u(x,t),t) = -[f_x(x,u(x,t),t) + f_u(x,u(x,t),t)u_x(x,t)]'\psi,$$

$$\psi(x,t_1) = -\Phi_x(x) \tag{2.1}$$

существует на всем множестве D и непрерывно дифференцируемо в областях гладкости управления.

Наконец, нормальное управление $u(x, t)$ будем называть экстремальным в области D, если в каждой точке $(x, t) \in D$ выполняется условие

$$\psi(x,t)' f(x,u(x,t),t) = \max_{v \in U} \psi(x,t)' f(x,v,t) \tag{2.2}$$

3. Формулировка и обсуждение основного результата.

Теорема (позиционный принцип максимума). Оптимальное нормальное на множестве D позиционное управление экстремально на этом множестве.

Доказательство теоремы вынесено в приложение. Перейдем к ее анализу.

В области гладкости нормального экстремального управления имеет место равенство

$$[f_u(x, u(x, t), t)u_x(x, t)]'\psi(x, t) = 0$$

Действительно, для любых двух близких точек (x, t), $(x + \Delta x, t)$, области гладкого экстремального управления, на основании условия (2.2) можем записать

$$\psi(x, t)'[f(x, u(x + \Delta x, t), t) - f(x, u(x, t), t)] \leqslant 0$$

Отсюда в силу малости и произвольности Δx стандартными рассуждениями получим требуемый вывод.

Таким образом, в области гладкости экстремального управления дифференциальные уравнения краевой задачи (2.1) упрощаются и принимают вид

$$\psi_t + \psi_x f(x, u(x, t), t) = -f_x(x, u(x, t), t)'\psi \tag{3.1}$$

Покажем теперь связь теоремы с принципом максимума Л.С. Понтрягина [2] для задачи

$$\begin{gathered} J = \Phi(x(t_1)) \to \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1] \end{gathered} \tag{3.2}$$

с фиксированными x_0, t_0 в классе кусочно-непрерывных программных управлений. Пусть оптимальный процесс $u(t)$, $x(t)$ задачи существует и управление $u(t)$ на интервале (t_0, t_1) имеет не более одной точки разрыва (по поводу обобщения на любое конечное число точек разрыва см. разд. 5). Пусть далее $\psi(t)$ – соответствующее непрерывное решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -f_x(x(t), u(t), t)'\psi, \quad \psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1))$$

Примем за D интегральную кривую $(x(t), t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Положим $u(x, t) \equiv u(t)$, $\psi(x, t) \equiv \psi(t)$ в малой окрестности D. Тогда на множестве D управление $u(x, t)$ нормально. На основании теоремы в каждой точке $(x, t) \in D$ выполняется условие максимума (2.2), т.е.

$$\psi(t)' f(x(t),u(t),t) = \max_{v \in U} \psi(t)' f(x(t),v,t), \quad t \in [t_0,t_1]$$

Таким образом, для программного оптимального процесса теорема дает принцип максимума Л.С. Понтрягина в форме [9].

4. Связь теоремы с динамическим программированием. Обозначим через $B(x_0, t_0)$ точную нижнюю грань значений целевого функционала задачи (3.2). Известно, что в точках непрерывной дифференцируемости функция $B(x, t)$ удовлетворяет основному уравнению динамического программирования (уравнению Беллмана)

$$V_t + \min_{v \in U} V_x' f(x,v,t) = 0, \quad V\big|_{t=t_1} = \Phi(x) \tag{4.1}$$

Пусть в области $C \subset R^n \times T$ существует решение $V(x, t)$ краевой задачи (4.1) с непрерывными частными производными V_{xx}, V_{tx} и дифференцируемая по x функция u: $C \to U$, для которых тождественно по $(x, t) \in C$ выполняется равенство

$$V_t(x,t) + \min_{v \in U} V_x(x,t)' f(x,v,t) = V_t(x,t) + V_x(x,t)' f(x,u(x,t),t) = 0 \tag{4.2}$$

Дифференцированием тождества (4.2) по x убеждаемся, что функция

$$\psi(x, t) = -V_x(x, t) \tag{4.3}$$

отвечает условиям сопряженной краевой задачи (2.1). При этом из (4.2) вытекает экстремальность управления $u(x, t)$.

Покажем, что соотношение (4.3) между сопряженной функцией позиционного принципа максимума и решением уравнения Беллмана имеет место не всегда. Например, в задаче

$$J = x^2(1) \to \min, \ \dot{x} = u, \ |u| \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

уравнение Беллмана

$$V_t - |V_x| = 0, \ V\big|_{t=1} = x^2$$

имеет множество непрерывных на $R \times [0, 1]$ и непрерывно дифференцируемых (при $x \neq 0$) решений

$$V(x,t) = \begin{cases} (|x| + t - 1)^2, & |x| > 1 - t \\ F(|x| + t - 1), & |x| \leqslant 1 - t \end{cases}$$

где $F(z)$ – произвольная гладкая неубывающая функция, $F(0) = F_z(0) = 0$.

Основные соотношения позиционного принципа максимума

$$\psi_t + \psi_x u(x, t) = 0, \quad \psi\big|_{t=1} = -2x, \quad \psi(x, t)u(x, t) = |\psi(x, t)|$$

для искомого управления $u(x, t)$ и требование непрерывности $\psi(x, t)$ дают единственную сопряженную функцию

$$\psi(x,t) = \begin{cases} -2(|x| + t - 1)\operatorname{sign} x, & |x| > 1 - t \\ 0, & |x| \leqslant 1 - t \end{cases}$$

Если $F(z) \not\equiv 0$, то равенство (4.3) в области $|x| < 1 - t$ не выполняется.

Как показывает приведенный пример, уравнение Беллмана может давать посторонние решения. Если не привлекать дополнительных соображений и оставаться в рамках динамического программирования, то отбраковка посторонних решений невозможна без вычисления значений $B(x, t)$, т.е. решения исходной задачи оптимального управления с начальными значениями в качестве параметров. Понятно, что с усложнением задачи последнее становится практически невозможным.

Поменяв в примере знак целевой функции на противоположный, получим задачу

$$J = -x^2(1) \to \min, \ \dot{x} = u, \ |u| \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

в которой функция минимума целевого функционала

$$B(x, t) = -(|x| - t + 1)^2$$

не является непрерывно дифференцируемой по x при $x = 0$. В этом случае использование классического уравнения Беллмана не имеет формального обоснования.

Применив к задаче позиционный принцип максимума, получим набор соотношений

$$\psi_t + \psi_x u(x, t) = 0, \quad \psi|_{t=1} = -2x$$

$$\psi(x, t)u(x, t) = |\psi(x, t)| \tag{4.4}$$

для искомого управления $u(x, t)$. Будем искать $u(x, t)$ в виде кусочно-постоянной функции. Из (4.4) имеем

$$u_1(x, t) = 1, \quad \psi_1(x, t) = 2(x - t + 1), \quad \text{если } x \geqslant t - 1 \tag{4.5}$$

$$u_2(x, t) = -1, \quad \psi_2(x, t) = 2(x + t - 1), \quad \text{если } x \leqslant 1 - t \tag{4.6}$$

Отвечающие управлениям (4.5), (4.6) характеристики сопряженной краевой задачи (4.4) дважды покрывают область $|x| \leqslant 1 - t$. Выберем из каждой пары характеристик, исходящих из произвольной фиксированой точки этой области, характеристику с меньшим значением целевого функционала. В результате получим два нормальных экстремальных управления:

$$u_1(x, t) = 1 \text{ на множестве } x \geqslant 0 \tag{4.7}$$

$$u_2(x, t) = -1 \text{ на множестве } x \leqslant 0 \tag{4.8}$$

Видно, что каждое из них оптимально на указанном множестве.

Итак, для рассматриваемой задачи позиционный принцип максимума выделяет в пространстве $R \times [0, 1]$ две области и экстремальные в этих областях управления.

5. Обобщение теоремы. Приведенное в приложении доказательство теоремы распространяется на случай нескольких поверхностей разрыва управления, если изменить понятие нормальности следующим образом. Пусть имеется область $D \subset R^n \times T$ и управление $u(x, t)$ с $m \geqslant 1$ поверхностями разрыва $P_1, P_2, \dots, P_m$ на D размерности n, заданными уравнениями

$$p_1(x, t) = 0, \quad p_2(x, t) = 0, \dots, \quad p_m(x, t) = 0$$

соответственно. Каждую функцию P_i: $D \to R$ при $i = 1, 2, \dots, m$ считаем непрерывно дифференцируемой в окрестности D с ненулевым градиентом в точках поверхности P_i. Обозначим Q_i малую окрестность поверхности P_i и Q_i^-, Q_i^+ – пересечения Q_i с областями $p_i < 0$, $p_i > 0$.

Назовем управление $u(x, t)$ нормальным в области D, если выполнены следующие условия:

1) поверхности $P_1, P_2, \dots, P_m$ на множестве D попарно не пересекаются;

2) сужения управления $u(x, t)$ на полуокрестности Q_i^-, Q_i^+:

$$u|_{Q_i^-} = u_i^-, \quad u|_{Q_i^+} = u_i^+$$

имеют дифференцируемые по x и непрерывные по t продолжения на окрестность Q_i с сохранением значений из U для каждого фиксированного $i = 1, 2, \dots, m$;

3) в окрестности Q_i производные

$$\dot{p}_i^{\pm}(x,t) = p_{ix}(x,t)' f(x,u_i^{\pm}(x,t),t) + p_{it}(x,t)$$

удовлетворяют требованиям

$$\dot{p}_i^- > 0, \quad \dot{p}_i^+ > 0, \quad i = 1,2,\dots,m-1$$

$$\dot{p}_m^- > 0, \quad \dot{p}_m^+ \equiv 0$$

4) в каждой точке $(x, t) \in P_m$ объединение замыканий множеств

$$\{v \in U\colon \ p_{mx}(x, t)'f(x, v, t) + p_{mt}(x, t) > 0\}$$

$$\{v \in U\colon \ p_{mx}(x, t)'f(x, v, t) + p_{mt}(x, t) < 0\}$$

совпадает с U;

5) непрерывное решение сопряженной краевой задачи (2.1) определено на всем множестве D.

При таком понимании нормальности управления позиционной принцип максимума остается справедливым в прежней формулировке.

6. Примеры. Продемонстрируем применение позиционного принципа максимума на двух известных примерах.

Пример 1 (линейная задача [10])

$$J = c'x(t_1) \to \min, \quad \dot{x} = A(t)x + b(u, t)$$

$$u(x, t) \in U, \quad (x, t) \in R^n \times T$$

Здесь функция $\Phi(x) = c'x$ линейна и функция $f(x, u, t) = A(t)x + b(u, t)$ отвечает сделанным ранее предположениям.

Определим функции ψ: $T \to R^n$ и u: $T \to U$ соотношениями

$$\dot{\psi} = -A(t)'\psi, \quad \psi(t_1) = -c, \quad u(t) = \arg\max_{v \in U} \psi(t)' b(v, t)$$

и предположим, что функция $u(t)$ на отрезке T кусочно-непрерывна. Тогда пара

$$u(x, t) \equiv u(t), \quad \psi(x, t) \equiv \psi(t)$$

на множестве $R^n \times T$ отвечает требованиям нормальности из разд. 4 и условиям позиционного принципа максимума. Прямое вычисление целевого функционала и оценка его минимума показывают оптимальность управления $u(x, t)$ на множестве $R^n \times T$.

Пример 2 (линейно-квадратичная задача аналитического конструирования регулятора [11])

$$J = \tfrac{1}{2} y(t_1) \to \min, \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$\dot{y} = x'P(t)x + u'Q(t)u, \quad u(x, y, t) \in U, \quad (x, y, t) \in R^{n+1} \times T$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ – непрерывные на T матрицы соответствующих размерностей, причем $P(t)$ симметрична и неотрицательно определена, $Q(t)$ симметрична и положительно определена при каждом $t \in T$; U – открытый шар в пространстве R^r достаточно большого радиуса.

В силу открытости области управления основные соотношения позиционного принципа максимума примут вид

$$\psi_t + \psi_x(Ax + Bu) + (x'Px + u'Qu)\psi_y + A'\psi + 2\chi Px = 0$$

$$\chi_t + \chi_x'(Ax + Bu) + (x'Px + u'Qu)\chi_y = 0$$

$$\psi|_{t=t_1} = 0, \quad \chi|_{t=t_1} = -\tfrac{1}{2}, \quad B'\psi + 2\chi Qu = 0$$

(аргументы для краткости опущены, $\chi = \psi_{n+1}$). Эти условия выполняются в области $D = R^{n+1} \times T_1$, если положить

$$\psi(x, y, t) = K(t)x, \quad \chi(x, y, t) = -\tfrac{1}{2}$$

$$u(x, y, t) = Q^{-1}(t)B(t)'K(t)x$$

и взять в качестве матрицы $K(t)$ определенное на $T_1 \subset T$ решение матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} + KA(t) + A(t)'K + KB(t)Q^{-1}(t)B(t)'K - P(t) = 0, \quad K(t_1) = 0$$

Приведенное решение задачи аналитического конструирования регулятора совпадает с решениями, полученными вариационным методом [11] и методом динамического программирования [3].

7. Синтез кусочно-постоянных управлений. Пусть в задаче (1.1) функция $u \to f(x, u, t)$ аффинная и множеством U служит конечная совокупность точек или многогранник. Тогда экстремальное управление $u(x, t)$, вообще говоря, кусочно-постоянно. Для его нахождения можно использовать аналог метода попятного движения [2]. Опишем основные операции, которые небходимо выполнить на шаге k, $k = 1, 2, \ldots$

Положим $B = R^n \times (0, \infty)$ и пусть при $k \geqslant 0$ известны: вектор u^k из U, множество $D_k \subset B$ с границей ∂D_k и функция ψ^k: $\partial D_k \to R^n$.

Найдем непрерывное решение $\psi(x, w, t)$ краевой задачи (см. (3.1))

$$\psi_t + \psi_x f(x,w,t) = -f_x(x,w,t)'\psi, \quad \psi|_{\partial D_k} = \psi^k(x,t) \tag{7.1}$$

с векторным параметром $w \in R^r$. Определим далее $w = u^{k+1} \in U$ и максимальное множество $D_{k+1} \subset B \setminus \bigcup_{i=0}^{k} D_i$ из условий

$$\psi(x,u^{k+1},t)' f(x,u^{k+1},t) = \max_{v \in U} \psi(x,u^{k+1},t)' f(x,v,t), \; (x,t) \in D_{k+1} \tag{7.2}$$

На множестве D_{k+1} положим

$$u(x, t) = u^{k+1}, \quad \psi^{k+1}(x, t) = \psi(x, u^{k+1}, t)$$

Процесс продолжим, если $D_{k+1} = \varnothing$. При $k = 0$ примем $D_0 = R^n \times (t_1, \infty)$, $\psi^0(x, t) = -\Phi_x(x)$. В качестве u^0 можно взять любую точку из U.

Сделаем некоторые пояснения к процедуре. Если интегральные кривые уравнения $\dot{x} = f(x, w, t)$ пересекают границу ∂D_k без касания, то краевая задача (7.1) локально разрешима методом характеристик [8], который естественным образом распространяется на случай системы линейных уравнений с частными производными первого порядка. Реализация операции (7.2) и построение максимальной области D_{k+1} требует решения нелинейных уравнений и неравенств. Это сопряжено с определенными трудностями, отражающими сложность самой задачи синтеза управления.

Проиллюстрируем процедуру синтеза на простом примере:

$$J = -x^4(1) \to \min, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Здесь, как и во втором примере из разд. 4, функция минимума целевого функционала

$$B(x, t) = -(|x| - t + 1)^4$$

непрерывна и непрерывно дифференцируема по x на $R \times [0, 1]$ всюду, за исключением отрезка прямой $x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому формально условия применения классического уравнения Беллмана не выполняются. На первом этапе процедуры синтеза дословным повторением приведенных в разд. 4 рассуждений получим два нормальных экстремальных управления (4.7), (4.8) с соответствующими сопряженными функциями

$$\psi_1(x, t) = 4(x - t + 1)^3, \quad x \geqslant 0$$

$$\psi_2(x, t) = 4(x + t - 1)^3, \quad x \leqslant 0$$

Заметим, что если в этом примере заменить одноэкстремальную целевую функцию $\Phi(x) = -x^4$ на многоэкстремальую

$$\Phi(x) = \left(\cos\frac{\pi x}{2} + \left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)^4$$

то функция $B(x, t)$ минимума целевого функционала не будет непрерывно дифференцируемой на счетном множестве отрезков прямых $x = 4k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому проблемы с обоснованностью использования уравнения Беллмана остаются. Процедуру синтеза из соображений периодичности целевой функции достаточно рассмотреть на множестве $|x - 4k| \leqslant 2$ при фиксированном $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где она дает верный результат.

Приложение: доказательство теоремы. Пусть оптимальное на множестве D управление $u(x, t)$ имеет единственную поверхность разрыва $P \subset D$ и нормально в смысле определения из разд. 2. Пусть для определенности в малой окрестности Q поверхности P выполнены условия $\dot{p}^- > 0$, $\dot{p}^+ \equiv 0$. (Более простой случай $\dot{p}^- > 0$, $\dot{p}^+ > 0$ разбирается аналогично.) Зафиксируем в области $p < 0$ произвольную точку (x_0, t_0) из D и исходящую из нее под действием $u(x, t)$ интегральную кривую $(x(t) \equiv x(t, x_0, t_0), t)$. Допустим, что кривая $(x(t), t)$ попадает на поверхность P в момент времени $\theta \in (t_0, t_1)$ и залегает на P при $\theta \leqslant t \leqslant t_1$. Другие возможные случаи (кривая не пересекает P или вся лежит на P) рассматриваются точно так же.

Вариация управления и траектории. Определим варьированное управление $\tilde{u}(x,t)$ и траекторию $\tilde{x}(t) \equiv \tilde{x}(t, x_0, t_0)$ системы (1.1).

Выберем произвольные фиксированные $v \in U$, $\tau \in [t_0, t_1)$, $\tau \neq \theta$ и малое $\varepsilon > 0$. Положим $\tilde{u}(x,t) = v$, если $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, и

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u^-(x,t), & \tilde{p}(x,t) < 0 \\ u^+(x,t), & \tilde{p}(x,t) > 0 \end{cases} \qquad (\text{П.1})$$

если $t \notin [\tau, \tau + \varepsilon)$, приняв по определению

$$\tilde{p}(x,t) = p(x,t) + \varepsilon\delta p(t) \qquad (\text{П.2})$$

Функцию $\delta p\colon T \to R$ считаем гладкой и знакопостоянной на отрезке T. В силу условий (П.1), (П.2) и выбора δp варьированная поверхность $\tilde{P}$ (разрыва управления $\tilde{u}(x,t)$ с уравнением $\tilde{p}(x,t) = 0$) равномерно сдвинута от P в одну из областей $p > 0$, $p < 0$.

Опишем варьированную траекторию $\tilde{x}(t)$. По аналогии с [7, 12] устанавливается формула

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \qquad (\text{П.3})$$

где $\delta x(t)$ – непрерывное при $t \neq \tau$, $t \neq \theta$ решение уравнения в вариациях

$$(\delta x)^{\cdot} = [f_x(x(t), u(x(t),t), t) + f_u(x(t), u(x(t),t), t) u_x(x(t),t)]\delta x, \quad \delta x(t_0) = 0 \qquad (\text{П.4})$$

с указанными ниже условиями скачка в моменты τ, θ, $o(\varepsilon)$ векторный остаточный член, который равномерно по t на отрезке $[t_0, t_1]$ имеет порядок малости выше ε. В правых частях уравнений (П.4) имеем [7]

$$\begin{aligned} &u(x(t),t) = u^-(x(t),t), \quad u_x(x(t),t) = u_x^-(x(t),t), \quad t_0 \leqslant t < \theta \\ &u(x(t),t) = u^+(x(t),t), \quad u_x(x(t),t) = u_x^+(x(t),t), \quad \theta \leqslant t \leqslant t_1 \end{aligned} \qquad (\text{П.5})$$

Положим для краткости

$$\delta x(s\pm) = \delta x(s \pm 0)$$

$$\Delta_v f\,|_\tau = f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(x(\tau), \tau), \tau)$$

$$\Delta\dot{x}(\theta) = f^-(x(\theta), \theta) - f^+(x(\theta), \theta)$$

$$\delta\theta = -[\delta p(\theta) + p_x(x(\theta), \theta)'\delta x(\theta-)]/\dot{p}^-(x(\theta), \theta)$$

Если выполнены неравенства

$$\tau > \theta, \quad p_x(x(\tau), \tau)' f(x(\tau), v, \tau) + p_t(x(\tau), \tau) > 0 \qquad (\text{П.6})$$

или неравенство $\tau < \theta$, то условия скачка примут вид

$$\begin{aligned} &\delta x(\tau+) = \delta x(\tau-) + \Delta_v f\,|_\tau \\ &\delta x(\theta+) = \delta x(\theta-) + \delta\theta\Delta\dot{x}(\theta) \end{aligned} \qquad (\text{П.7})$$

Если же выполняются неравенства

$$\tau > \theta, \quad p_x(x(\tau), \tau)' f(x(\tau), v, \tau) + p_t(x(\tau), \tau) < 0 \qquad (\text{П.8})$$

то вместо формул (П.7) имеем

$$\delta x(\tau+) = \delta x(\tau-) + \Delta_v f|_\tau + \delta\tau\Delta\dot{x}(\tau)$$

$$\delta\tau = -[\delta p(\tau) + p_x(x(\tau),\tau)'\Delta_\upsilon f|_\tau]\dot{p}^-(x(\tau),\tau)$$
$$\delta x(\theta+) = \delta x(\theta-) + \delta\theta\Delta\dot{x}(\theta) \qquad (П.9)$$

Сделаем необходимые пояснения. Уравнение в вариациях (П.4) и условия скачка (П.7), (П.9) с точностью до членов порядка выше ε описывают главную часть $\varepsilon\delta x(t)$ приращения $\tilde{x}(t)-x(t)$ траекторий в моменты игольчатого варьирования управления и пересечения траекториями поверхностей разрыва $P,\tilde{P}$. За счет вариации поверхности P в условия скачка включаются значения произвольно выбираемой функции $\delta p(t)$. Это, как будет видно, приводит к дополнительному необходимому условию оптимальности типа равенства – условию непрерывности решения сопряженной системы на поверхности разрыва управления.

Для точек $v \in U$, удовлетворяющих второму неравенству (П.6), траектория $\tilde{x}(t)$ в момент τ игольчатого варьирования управления сходит с поверхности $\tilde{P}$ в область $\tilde{p} > 0$ и остается там при $t > \tau$. В случае (П.8) происходит аналогичный сход в область $\tilde{p} < 0$ с последующим возвращением варьированной траектории на поверхность $\tilde{P}$, начиная с момента $\tau + \varepsilon\delta\tau + o(\varepsilon)$. Для остальных точек v области U описать функцию $\tilde{x}(t)$ однозначно с принятой в формуле (П.3) точностью, вообще говоря, невозможно. В предположении 3 нормальности управления последнее не влияет на общность необходимых условий оптимальности. Отметим, наконец, что в силу доопределения [7] правых частей дифференциальных уравнений на поверхности P имеем

$$f(x, u(x, t), t)|_P = f^+(x, t)$$

поэтому в формулах (П.7), (П.9) при $\tau > \theta$ следует считать

$$\Delta_v f|_\tau = f(x(\tau), v, \tau) - f^+(x(\tau), \tau)$$

Принцип максимума. Из предположения об оптимальности управления $u(x, t)$ и представления (П.3) варьированной траектории следует

$$\Phi(x(t_1)) \leqslant \Phi(x(t_1) + \varepsilon\delta x(t_1) + o(\varepsilon))$$

Отсюда в силу положительности и малости ε получим

$$\Phi_x(x(t_1))'\delta x(t_1) \geqslant 0 \qquad (П.10)$$

Чтобы представить неравенство (П.10) через параметры вариации управления, используем решение $\psi(x, t)$ сопряженной краевой задачи. Обозначим $\psi^-(x, t)$, $\psi^+(x, t)$ сужения этого решения на области $p < 0, p > 0$. В силу нормальности управления $u(x, t)$ и особенностей метода характеристик [8] функции $\psi^\pm(x, t)$ можно продолжить гладким образом на малую окрестность поверхности P так, чтобы выполнялись условия (2.1) при замене $u(x, t)$ на продолжения функций $u^\pm(x, t)$. Следовательно, сложная функция

$$\Psi(t) = \begin{cases} \psi^-(x(t),t), & t_0 \leqslant t \leqslant \theta \\ \psi^+(x(t),t), & \theta \leqslant t \leqslant t_1 \end{cases}$$

определена и непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ и на интервалах (t_0, θ), (θ, t_1) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\Psi} = -[f_x(x(t),u(x(t),t),t) +$$
$$+ f_u(x(t),u(x(t),t),t)u_x(x(t),t)]'\Psi, \quad \Psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1)) \qquad (П.11)$$

где $u(x(t), t)$, $u_x(x(t), t)$ понимаются в смысле (П.5).

На интервалах гладкости решений уравнений (П.4), (П.11) функция $\Psi(t)'\delta x(t)$ постоянна [2], поэтому ее приращение на концах интервала (t_0, t_1) равно сумме скачков в точках τ, θ:

$$\Psi'\delta x\Big|_{t_0}^{t_1} = \Psi'\delta x\Big|_{\tau-}^{\tau+} + \Psi'\delta x\Big|_{\theta-}^{\theta+}$$

С учетом начальных значений (П.4), (П.11) и условий скачка (П.7) отсюда и из (П.10) будем иметь

$$\Phi_x(x(t_1))'\delta x(t_1) = -\Psi(\tau+)'\Delta_v f|_\tau - \mu\delta p(\theta) + [\Psi(\theta-) - \Psi(\theta+) - \mu p_x(x(\theta), \theta)]'\delta x(\theta-) \geqslant 0$$

где

$$\mu = -\Psi(\theta+)'\Delta\dot{x}(\theta)/\dot{p}^-(x(\theta), \theta)$$

Вследствие непрерывности $\Psi(t)$ и произвольности $\delta p(\theta)$ из неравенства заключаем

$$\Psi(\theta)'\Delta\dot{x}(\theta) = 0 \qquad (\Pi.12)$$

$$\Psi(\tau)'\Delta_v f|_\tau \leqslant 0 \qquad (\Pi.13)$$

В случае (П.8) выводы (П.12), (П.13) дополняются еще одним:

$$\Psi(\tau)'\Delta\dot{x}(\tau) = 0 \qquad (\Pi.14)$$

Заметим, что последние три условия не независимы: равенства (П.12), (П.14) – следствие неравенства (П.13) в пределе при $\tau \to \theta$. Поскольку неравенство (П.13) имеет место для любой траектории $x(t)$ с описанными выше свойствами и по непрерывности верно для всех $\tau \in [t_0, t_1]$, $v \in U$, то в точках $(x, t) \in D$, $p(x, t) < 0$ имеем

$$\psi(x, t)'[f(x, v, t) - f(x, u(x, t), t)] \leqslant 0$$

Такими же рассуждениями последнее неравенство доказывается для остальных точек области D. Следовательно, оптимальное управление экстремально в области D. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00029) и частично программы "Университеты России" (1.2.21).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
4. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение. 1969. 288 с.
5. *Величенко В.В.* О методе поля экстремалей и достаточных условиях оптимальности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 45–67.
6. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.
7. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
9. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем I–III // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. №№ 10–12. С. 1320–1334, 1441–1458, 1561–1578.
10. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973. 246 с.
11. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–IV // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441; № 5. 561–568; № 6. С. 661–665. 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435.
12. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987. 226 с.

Владивосток

Поступила в редакцию
22.III.1995