

УДК 531.36:534.112

© 1996 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

В одномодовом приближении волновых процессов исследуется задача о свободных и вынужденных квазилинейных пространственных колебаниях струны. Построена математическая модель, в которой основным источником нелинейности является геометрическая нелинейность, обусловленная линейной растяжимостью нити. В результате натяжение оказывается переменным как во времени, так и по длине. Проведен асимптотический анализ свободных колебаний и исследовано явление неустойчивости плоских колебаний. В терминах параметров системы построены и исследованы резонансные кривые, отвечающие плоскому гармоническому воздействию. Полностью исследована устойчивость стационарных колебаний при помощи первого метода Ляпунова. Обнаружены и изучены качественные эффекты, связанные с устойчивостью и неустойчивостью плоских и пространственных вынужденных колебаний в рамках пространственной модели.

В экспериментах по изучению свободных и вынужденных колебаний зашпеленной на обоих концах струны наблюдаются явления, которые имеют нелинейный характер и не могут быть объяснены при помощи линейной модели. Одним из основных источников нелинейных эффектов является растяжимость материала нити, которой пренебрегают в стандартной постановке задачи о поперечных колебаниях струны [1–3]. Кроме того, натяжение нити обычно считают постоянным во всех точках [4–6, 8] (гипотеза Кирхгофа) и во времени [1–3].

Согласно ряду предварительных теоретических и экспериментальных результатов, учитывающих нелинейные эффекты [4–8], пространственная картина свободных и вынужденных колебаний оказывается весьма сложной. Она требует привлечения строгих методов нелинейной механики для построения адекватных математических моделей, построения режимов колебаний и анализа их устойчивости. В рассматриваемой ниже одномодовой квазилинейной трактовке волновых процессов в струне достаточно эффективным оказывается использование методов малого параметра (Ляпунова – Пуанкаре [9] и усреднения [10, 11]).

1. Постановка задачи. Построим математическую модель нелинейных колебаний струны с учетом переменности ее длины, вызванной растяжимостью нити, и натяжения [4–7]. Введем инерциальную декартову систему координат x, y, z и предположим, что при отсутствии поперечных смещений струна натянута с силой T и зашпелена в точках $x = 0, l$. Пусть $y = y(x, t), z = z(x, t)$ – поперечные смещения точек струны с эйлеровой координатой $x, 0 \leq x \leq l$. Вычислим удлинение $d\Delta$ бесконечно малого элемента dx при его ортогональных смещениях y, z от положения равновесия $y = z = 0$. Для растянутого элемента имеем с учетом растяжимости материала нити выражение $ds = (1 + h^2)^{1/2} dx$, где $h^2 = y'^2 + z'^2$; штрихами обозначены производные по x . Искомое удлинение $d\Delta \equiv ds - dx = \lambda dx$; выражение для коэффициента λ может быть

представлено сходящимся при $h^2 < 1$ рядом

$$\lambda = h^2 \left[1 + (1 + h^2)^{1/2} \right]^{-1} = h^2 / 2 - h^4 / 8 + h^6 / 16 - \dots \quad (1.1)$$

Обычно [1, 2] фактически ограничиваются первым слагаемым в разложении (1.1) для λ . При учете растяжимости полное натяжение струны T^* будет зависеть от точки x и времени t :

$$T^* = T + ESd\Delta / dx = T + \lambda ES, \quad T^* > T \quad (1.2)$$

Здесь E – модуль Юнга материала, S – площадь поперечного сечения нити. Таким образом, ES – жесткость на растяжение, а формула (1.2) отражает закон Гука.

Вычислим теперь элементарную работу dA на растяжение и суммарную потенциальную энергию U струны, обусловленную поперечными смещениями $y(x, t)$, $z(x, t)$ [5, 7]

$$dA = dA_T + dA_E, \quad dA_T = -T\lambda dx, \quad dA_E = -\frac{1}{2} ES\lambda^2 dx$$

$$U = -\int_0^l dA = \int_0^l P(h^2) dx \quad (1.3)$$

$$P \equiv T\lambda + \frac{1}{2} ES\lambda^2 = Th^2 / 2 + Nh^4 / 8 - Nh^6 / 16 + \dots, \quad N = ES - T$$

Предполагая величину h^2 достаточно малой, ограничимся в (1.3) членами $O(h^4)$ и будем отбрасывать слагаемые $O(h^6)$. Коэффициент $N > 0$ для упругих систем с жесткой характеристикой. Более того, для металлических струн (в частности, стальных) выполняется сильное неравенство $ES \gg T$; обычно $ES/T \sim 10^2$. Выпишем теперь выражения для кинетической энергии K поперечных перемещений элементов струны и работы W внешних распределенных сил $F^{y,z}(x, t)$:

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^l (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) dx, \quad W = \int_0^l (F^y y + F^z z) dx \quad (1.4)$$

Здесь ρ – линейная плотность струны, предполагаемая для простоты постоянной; точкой обозначено дифференцирование по времени. Уравнения колебаний получаются на основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона для функции Лагранжа $L = K - U - F^y y - F^z z$ [1, 2, 5, 8]. С учетом граничных условий и начальных распределений смещений y, z и скоростей \dot{y}, \dot{z} получим

$$\begin{aligned} \rho \ddot{y} &= T y'' + N \left[(y'^2 + \frac{1}{2} h^2) y'' + y' z' z'' \right] + F^y \\ \rho \ddot{z} &= T z'' + N \left[y' y'' z' + (z'^2 + \frac{1}{2} h^2) z'' \right] + F^z \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad z(0, t) = z(l, t) = 0$$

$$y(x, 0) = d^y(x), \quad \dot{y}(x, 0) = g^y(x)$$

$$z(x, 0) = d^z(x), \quad \dot{z}(x, 0) = g^z(x)$$

Исследование нелинейной начально-краевой задачи (1.5) в точной постановке затруднительно. Предлагается подход, основанный на так называемом одномодовом

приближении [4–8]. Решение $y(x, t)$, $z(x, t)$ строится в виде рядов

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \pi n \frac{x}{l}, \quad z(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin \pi m \frac{x}{l} \quad (1.6)$$

которые автоматически удовлетворяют нулевым краевым условиям. Система функций $\{\sin \pi n l^{-1} x\}$ является полной [$x \in [0, l]$]; эти функции будут собственными, если пренебречь нелинейностями, поэтому, после подстановки рядов (1.6) в (1.5), разложения функций $F^{y,z}$ по этой системе и приравнивания коэффициентов Фурье, получим две связанные счетные системы уравнений для $a_n(t)$, $b_m(t)$. Связь осуществляется посредством кубической нелинейности, которая предполагается достаточно слабой вследствие малости амплитуд парциальных колебаний. Это достигается выбором распределений для $F^{y,z}(x, t)$ и $d^{y,z}(x)$, $g^{y,z}(x)$, содержащих только рассматриваемую моду с номером k ($n = m = k$). На практике обычно реализуется главная мода колебаний $k = 1$.

Итак, положим гармоники $F_n^y(t) = F_m^z(t) \equiv 0$, $d_{n,m}^{y,z} = g_{n,m}^{y,z} = 0$ при $n, m \neq k$; тогда влияние других мод на k -ю можно считать незначительным и вместо рядов (1.6) взять представления вида

$$y(x, t) = a_k(t) \sin \pi k l^{-1} x, \quad z(x, t) = b_k(t) \sin \pi k l^{-1} x \quad (1.7)$$

Подстановка выражений (1.7) в функцию Лагранжа L позволяет получить ее одномодовое приближение, в котором a_k , b_k – обобщенные координаты. Уравнения движения в форме Лагранжа приводятся к виду системы, описывающей движения плоского осциллятора с кубической нелинейностью. Поставим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k + \omega_k^2 a_k + \gamma_k (a_k^2 + b_k^2) a_k &= f_k^a(t) \\ \ddot{b}_k + \omega_k^2 b_k + \gamma_k (a_k^2 + b_k^2) b_k &= f_k^b(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$a_k(0) = d_k^y, \quad \dot{a}_k(0) = g_k^y, \quad b_k(0) = d_k^z, \quad \dot{b}_k(0) = g_k^z$$

$$\omega_k^2 = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \frac{T}{\rho}, \quad \gamma_k = \frac{3}{8} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 \frac{N}{\rho}, \quad f_k^{a,b}(t) = \frac{F_k^{y,z}(t)}{\rho}$$

Уравнения (1.8) и соответствующие начальные условия могут быть также выведены при помощи метода Фурье из начально-краевой задачи (1.5). Заметим, что при выполнении гипотезы Кирхгофа [4, 6, 8] взаимосвязь между различными модами колебаний будет параметрической, т.е. кубическая нелинейность приводит для каждой моды к выражениям $\sum_k (a_n, b_m) a_k$, $\sum_k (b_m, a_n) b_k$, где \sum_k – ряды от всех a_n , b_m . Нулевые начальные условия и отсутствие возбуждения соответствующих мод приведут к тривиальным решениям $a_n \equiv 0$, $b_m \equiv 0$. Кроме того, гипотеза Кирхгофа приводит к постоянству натяжения по длине (но не во времени).

Далее исследуется система с двумя степенями свободы (1.8) при различных предположениях относительно параметров, начальных условий и внешнего воздействия. Представляют интерес в теоретическом и прикладном аспектах постановки задач о свободных колебаниях ($f_k^{a,b} \equiv 0$) и стационарных вынужденных колебаниях при гармоническом воздействии ($f_k = f \cos \Omega t$) – так называемые резонансные или амплитудно-частотные характеристики. Поскольку значение k фиксировано (для определенности рассматривается главная мода колебаний $k = 1$), индекс k не указывается для краткости и для начальных значений принимаются более удобные обозначения $a^0, \dot{a}^0, b^0, \dot{b}^0$.

Наряду с вопросом существования и построения решений для практики важным оказывается исследование их устойчивости. Отметим, что система (1.8) может быть представлена в канонической форме Гамильтона ($\dot{a} = p_a, \dot{b} = p_b$ – импульсы).

2. Анализ свободных колебаний струны. Рассмотрим задачу Коши (1.8) при $f^{a,b}(t) \equiv 0$. Введем безразмерное время t^* , нормированные переменные a^*, b^* и параметр ε следующим образом (звездочка далее опускается):

$$t^* = \omega t, \quad a^* = a d_0^{-1}, \quad b^* = b d_0^{-1}, \quad \varepsilon = \gamma \omega^{-2} d_0^2 \quad (2.1)$$

$$\ddot{a} + a + \varepsilon(a^2 + b^2)a = 0, \quad \ddot{b} + b + \varepsilon(a^2 + b^2)b = 0$$

Здесь d_0 – масштаб изменения a, b , при котором кубические члены оказываются малыми, а величины $a^*, b^* \sim 1$. Этот масштаб задается выбором начальных значений $a^0, \dot{a}^0, b^0, \dot{b}^0$.

Заметим, что система (2.1) имеет решение как $a(t) \equiv 0$, так и $b(t) \equiv 0$. Система (2.1) может быть проинтегрирована для произвольных значений параметра ε . Она допускает два элементарных интеграла – "энергии" E и "момента импульса" C ("интеграл площадей"). Дальнейшее интегрирование приводит к эллиптическим функциям. Процедуру аналитического интегрирования удобнее проводить в полярных координатах r, φ посредством замены $a = r \sin \varphi, b = r \cos \varphi$. В результате имеем

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 (1 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{4} \varepsilon r^4, \quad C = r^2 \dot{\varphi}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad \varphi - \varphi^0 = \pm C \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{\xi^2 v(\xi)} \quad (2.2)$$

$$v(r) = r^{-1} (2Er^2 - r^4 - \frac{1}{2}\varepsilon r^6 - C^2)^{1/2}$$

Пределы изменения радиуса-вектора r определяются корнями уравнения $v(r) = 0$; в общем случае таких значений два: $r_{\min}(E, C)$ и $r_{\max}(E, C)$. Имеются два вырожденных режима движения. Колебания вдоль прямой ($C = 0$, т.е. $\dot{\varphi} \equiv 0$), пересекающей начало координат, происходят в пределах $r_{\min}(E, 0) = 0, r_{\max}(E, 0) = \varepsilon^{-1/2} \left[(1 + 4\varepsilon E)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$. При движении по окружности $r_0 = r_{\min}(E, C) = r_{\max}(E, C)$ значение r_0 есть корень уравнения $r^4 + \varepsilon r^6 = C^2$ при условии $2E = r_0^2 + C^2 r_0^{-2} + \frac{1}{2} \varepsilon r_0^4$ и в результате

$$r_0 = r_0(E) = (2 / (3\varepsilon))^{1/2} \left[(1 + 3\varepsilon E)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}, \quad C = C_0(E) = \pm r_0^2 (1 + \varepsilon r_0^2)^{1/2}$$

Полный анализ движения на основе выражений (2.2) требует весьма трудоемких расчетов, неоправданных для рассматриваемого случая малых значений ε . Более конструктивным представляется асимптотический анализ квазилинейных колебаний системы (2.1) на основе метода усреднения [10,11]. Переход к системе стандартного вида можно осуществить несколькими способами, например ввести новые переменные "амплитуда–фаза", "амплитуда – фазовая расстройка" или совершить замену к оскулирующим переменным типа Ван дер Поля [10] и др. Каждая из таких замен обладает определенными достоинствами и недостатками. Выбор должен диктоваться механическим содержанием и наглядностью. Для систем типа (2.1) предпочтительнее взять медленные переменные "амплитуда – фазовая расстройка" [7]

$$a = A \cos(t + \alpha), \quad b = B \cos(t + \beta), \quad \dot{a} = \partial a / \partial t, \quad \dot{b} = \partial b / \partial t \quad (2.3)$$

Здесь A, B – амплитуды, α, β – фазовые добавки парциальных колебаний. В первом

приближении метода усреднения для A, B, α, β получают уравнения

$$\dot{A} = -AB^2 \sin 2\delta, \quad \dot{B} = A^2 B \sin 2\delta, \quad \dot{\delta} = \beta - \alpha \quad (2.4)$$

$$\dot{\alpha} = 3A^2 + 2B^2 + B^2 \cos 2\delta, \quad \dot{\beta} = 2A^2 + A^2 \cos 2\delta + 3B^2$$

Точками сбоку в (2.4) и далее обозначены производные по "медленному времени" $\tau = \epsilon t/8, \tau \sim 1$. Начальные значения переменных определяются при помощи (2.3). Интегралы (2.2) принимают вид

$$A^2 + B^2 = 2E, \quad AB \sin \delta = -C$$

Из уравнения для δ , которое получается из (2.4): $\dot{\delta} = -2(A^2 - B^2) \sin^2 \delta$, следует, что стационарным точкам $\delta^* = 0, \pi$ отвечает движение по прямой (в "фазе" и "противофазе"). Движению по окружности $A = B = E^{1/2}$ отвечает значение $\delta = \pm \pi/2$ ($C = \mp E$). Заметим, что рассматриваемые величины отличаются от точных на $O(\epsilon)$ для $t \sim 1/\epsilon$. Частному решению $A(\tau) \equiv 0$ системы (2.1) отвечает $B(\tau) = \text{const}$, и наоборот, $-B(\tau) \equiv 0$ соответствует $A(\tau) = \text{const}$.

Выражения для A, B и δ находятся при помощи элементарных функций [7]:

$$A^2, B^2 = E \pm D \cos(4C\tau + \theta), \quad \sin \delta = -C(AB)^{-1} \\ D = (E^2 - C^2)^{1/2}, \quad 0 \leq D \leq E, \quad \theta = \text{const} \quad (2.5)$$

При движении по кругу $D = 0$, т.е. $E = |C|$; в случае колебаний по прямой $D = E$ ($C = 0$); тогда $\delta = \pm \pi/2$ или $\delta = 0, \pi$ соответственно. Из (2.5) также следует, что амплитуды A, B изменяются в пределах от $(E - D)^{1/2}$ до $(E + D)^{1/2}$. Используя найденные выражения (2.5), для $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ получим явные представления через τ , которые интегрируются в элементарных функциях

$$\dot{\alpha} = 6E - 2C^2 A^{-2}, \quad \dot{\beta} = 6E - 2C^2 B^{-2} \\ \alpha, \beta = \alpha^0, \beta^0 + 6E\tau - \text{Arctg}[(E \mp D)C^{-1} \text{tg}(2C\tau + \theta/2)] + \text{arctg}[(E \mp D)C^{-1} \text{tg}\theta/2] \quad (2.6)$$

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \langle \dot{\beta} \rangle = 6E - 2|C|, \quad \alpha^0 = \alpha(0), \quad \beta^0 = \beta(0)$$

Итак, приближенные выражения для переменных a, b построены в соответствии с (2.3), (2.5), (2.6). Выявлены основные свойства движения. Отметим еще одно весьма важное обстоятельство. Как следует из (2.5), плоские колебания ($C = 0$) неустойчивы в следующем смысле. Наличие сколь угодно малого $|C| \gg \epsilon > 0$ приведет к тому, что в процессе эволюции "плоскость колебаний" будет поворачиваться и, согласно (2.5), струна будет совершать быстрые колебания в произвольной плоскости. Безразмерное время поворота плоскости на угол $\pi/2$, т.е. фазы на π , составляет величину $\Delta t = 2\pi(\epsilon C)^{-1}$. При малых $|C|$ траектория a, b системы (2.1) с точностью до величины $\epsilon \ll |C|$ есть сильно вытянутый эллипс с полуосями: $(E + D)^{1/2}$ — большой и $(E - D)^{1/2}$ — малой соответственно:

$$(E + D)^{1/2} = (2E)^{1/2} \left(1 + \kappa^2/8 + O(\kappa^4)\right), \quad \kappa^2 = C^2 E^{-2}$$

$$(E - D)^{1/2} = (E/2)^{1/2} |\kappa| \left(1 - \kappa^2/8 + O(\kappa^4)\right), \quad |\kappa| \ll 1$$

Можно установить, что при фиксированном τ соотношения (2.3), (2.5) определяют

повернутый эллипс с постоянными полуосями $(E + D)^{1/2}$ и $(E - D)^{1/2}$. Оси эллипса медленно поворачиваются со скоростью $\epsilon C/4$. Эти свойства непосредственно следуют из выражений (2.3), (2.5) после исключения быстрого времени t и приведения их к виду

$$a^2 A^{-2} + b^2 B^{-2} - 2aA^{-1}bB^{-1} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.7)$$

Несмотря на то что параметры A, B, δ в (2.7) – функции τ , во вращающейся системе координат, отвечающей каноническому виду эллипса, полуоси оказываются постоянными и равными указанным выше значениям.

Таким образом, в системе наблюдаются движения с разными скоростными масштабами. Во-первых, это быстрые колебательные движения со скоростью $O(1)$; во-вторых, при $|C| \sim 1, E \sim 1$ происходит эволюция осей эллипса со скоростью $O(\epsilon)$. Если $\epsilon \ll |C| \ll E \sim 1$, то имеются три масштаба: со скоростями $O(1), O(|C|)$ и $O(\epsilon|C|)$. Интересно отметить, что скорость вращения плоскости в медленном времени τ равна $2C$ (а не $4C$, см. (2.5)).

Экспериментальные наблюдения свободных колебаний струны требуют весьма высокой прецизионности и добротности, а также высокой точности задания начальных значений. Наличие возмущающих факторов в реальных условиях приводит к необходимости применения "резонансных методов", менее подверженных влиянию указанных возмущений [4–6].

3. Построение и анализ вынужденных стационарных колебаний струны.

3.1. Предварительные преобразования. Интересные свойства пространственных и плоских квазилинейных колебаний струны обнаруживаются и в случае периодического воздействия. Пусть внешнее возбуждение происходит в некоторой фиксированной плоскости, проходящей через линию недеформированной струны. Без ограничения общности будем считать, что $f^a(t) \neq 0, f^b(t) \equiv 0$, и рассмотрим гармоническое воздействие $f^a(t) = f \cos \Omega t$. Аналогично разд. 2 введем в (3.1) безразмерные переменные и параметры (см. (2.1)) следующим образом (индекс k опущен):

$$t^* = \omega t, \quad a^* = ad_0^{-1}, \quad b^* = bd_0^{-1}, \quad \mu = \Omega \omega^{-1} \quad (3.1)$$

$$\epsilon \beta = \gamma \omega^{-2} d_0^2, \quad \beta \sim 1, \quad \epsilon = f \omega^{-2} d_0^{-1}, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Далее звездочка опускается с целью сокращения записи.

В результате преобразования (3.1) из (1.8) получается квазилинейная колебательная система со слабой связью между подсистемами:

$$\ddot{a} + a + \epsilon \beta (a^2 + b^2) a = \epsilon \cos \mu t$$

$$\ddot{b} + b + \epsilon \beta (a^2 + b^2) b = 0 \quad (3.2)$$

Ставится задача построения и исследования установившихся вынужденных колебаний системы (3.2) в окрестности главного резонанса $\mu \approx 1$. При этом начальные значения переменных не задаются. Они определяются в процессе решения задачи и могут выбираться из некоторой достаточно малой окрестности этих значений [9–11].

Проблема существования, построения и исследования устойчивости периодических движений системы (3.2) может быть решена на основе хорошо разработанных и обоснованных методов Ляпунова – Пуанкаре [9]. Для исследования зависимости амплитуд парциальных колебаний от частоты удобнее перейти к переменным типа "амплитуда – фазовая расстройка", аналогичным (2.3), по формулам

$$a = A \cos(\mu t + \theta), \quad \dot{a} = \partial a / \partial t \quad (3.3)$$

$$b = B \cos(\mu t + \psi), \quad \dot{b} = \partial b / \partial t$$

Будем при этом полагать, что частота (относительная) μ внешнего воздействия находится в ε -окрестности главного резонанса $\mu = 1 + \varepsilon\lambda$, где $\lambda \sim 1$. Тогда переменные A, B, θ, ψ в силу возмущенной системы (3.2) будут медленными. Система (3.2) приводится к форме, стандартной по Боголюбову [10, 11]: $\dot{x} = \varepsilon X(\mu t, x)$, где x – вектор указанных осциллирующих переменных, X – периодическая функция t , гладкая при $A > 0$. Для стандартной системы вопрос о существовании и приближенном построении периодического решения $x = x(\mu t, \varepsilon)$ сводится к исследованию существования и единственности (невырожденности) стационарной точки ξ^* соответствующей усредненной системы $\dot{\xi} = X_0(\xi)$, где $X_0(x)$ – среднее от $X(\mu t, x)$ по t . Достаточные условия сводятся к следующим соотношениям:

$$\xi^* = \arg X_0(\xi), \quad \det X'_0(\xi^*) \neq 0 \quad (3.4)$$

Тогда искомое периодическое решение x имеет вид $x(\mu t, \varepsilon) = \xi^* + \varepsilon\phi(\mu t, \varepsilon)$, где периодическая функция ϕ строится квадратурами от известных функций при помощи метода последовательных приближений [9, 10].

Для переменных A, B, θ, ψ усредненная система в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ имеет форму (за усредненными переменными сохраняются прежние обозначения)

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{1}{2}\sin\theta - (\beta/8)AB^2\sin 2\delta \\ \dot{B} &= (\beta/8)A^2B\sin 2\delta, \quad \delta = \psi - \theta \\ \dot{\theta} &= -\lambda - \frac{1}{2}A^{-1}\cos\theta + (3\beta/8)A^2 + (\beta/4)B^2(1 + \frac{1}{2}\cos 2\delta) \\ \dot{\psi} &= -\lambda + (\beta/4)A^2(1 + \frac{1}{2}\cos 2\delta) + (3\beta/8)B^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что система (3.5) не имеет гамильтоновой формы. Однако переход от переменных A, θ, B, ψ к переменным типа Ван дер Поля позволяет получить гамильтонову усредненную систему. Это эквивалентно заменам a, \dot{a}, b, \dot{b} на переменные Ван дер Поля в исходной системе (3.2) и последующим усреднением по t (см. (4.2)).

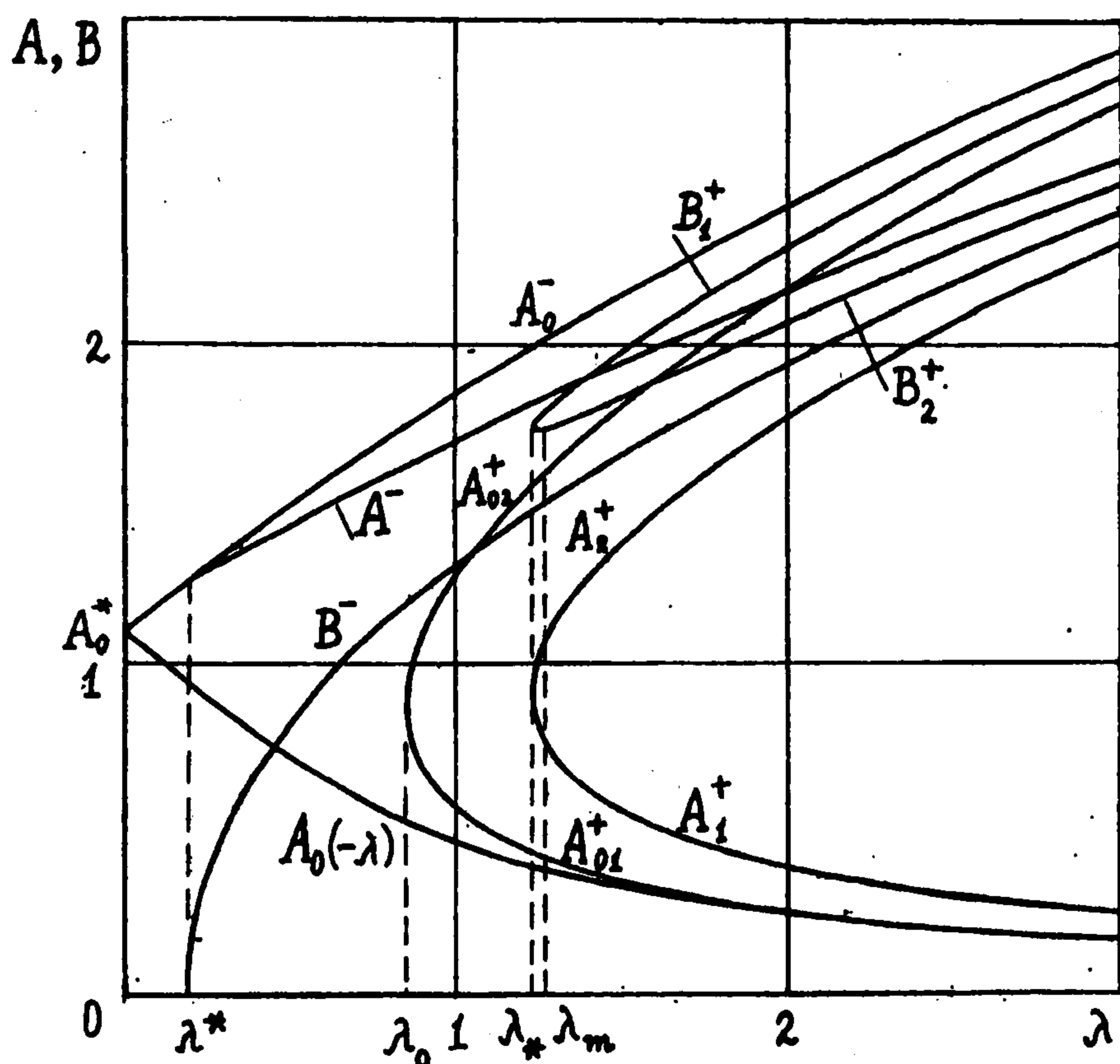
Система (3.5) допускает набор стационарных точек, отвечающих различным режимам колебаний. Рассмотрим их.

3.2. Плоские стационарные колебания. Они определяются соотношениями (см. (3.4))

$$\lambda = \mp \frac{1}{2}A^{-1} + (3\beta/8)A^2, \quad A > 0, \quad B = 0, \quad \theta = 0, \quad \pi \quad (3.6)$$

Амплитуда вертикальных колебаний $A_0 = A_0^\mp(\lambda, \beta)$ находится как корень кубического уравнения. Аналитическое решение представляет весьма трудоемкую задачу. Графическое построение семейства функций $A_0^\mp(\lambda, \beta)$ достаточно элементарно, если построить обратную функцию $\lambda(A, \beta)$ согласно (3.6). Такое решение для $\beta = 1$ приведено на фигуре.

Колебаниям "в фазе" ($\theta = 0$), т.е. знаку минус в (3.6), отвечает единственная ветвь $A_0^-(\lambda, \beta)$, определенная для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$, где $\beta > 0$ – параметр; она монотонно возрастает по λ . При $\lambda = 0$ для A_0^- получается значение $A_0^-(0, \beta) = A_0^* = (4/(3\beta))^{1/3}$. При $|\lambda| \ll 1$ для $A_0^-(\lambda, \beta)$ имеет место разложение $A_0^- = A_0^* + (2\lambda/3)A_0^{*2} + O(|\lambda|^3)$, т.е. $\lambda = 0$ – точка перегиба, см. разд. 3.3. Асимптотическое поведение описывается выражениями: $A_0^-(\lambda, \beta) = -(2\lambda)^{-1} - (3\beta/4)(2\lambda)^{-4} + O(|\lambda|^{-7})$ при $\lambda \rightarrow -\infty$; для положительной частотной расстройке имеем $A_0^-(\lambda, \beta) = (8\lambda/(3\beta))^{1/2} + (4\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-2})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. В представленных выражениях параметр $\beta \sim 1$ ($\beta > 0$). Случай $\beta \rightarrow 0$



приводит к линейному осциллятору: $A_0^-(\lambda, \beta) = -(2\lambda)^{-1} - (3\beta/4)(2\lambda)^{-4} + O(\beta^2)$, где $\lambda < 0$; при $\beta \rightarrow \infty$ для $\lambda \sim 1$ получим асимптотику $A_0^-(\lambda, \beta) = (4/3\beta)^{1/3} + (2\lambda/3)(4/(3\beta))^{2/3} + O(\beta^{-1})$.

Рассмотрим колебания "в противофазе" ($\theta = \pi$), которым отвечает знак плюс в соотношении (3.6). Кривая $A_0^+(\lambda, \beta)$ определена для $\lambda \geq \lambda_0 = (3/4)(3\beta/2)^{1/3}$, причем $A_0^+(\lambda_0, \beta) = (2/(3\beta))^{1/3}$. При $\lambda > \lambda_0$ она имеет две ветви: ниспадающую A_{01}^+ и возрастающую A_{02}^+ (при $\lambda \rightarrow \infty$). Обе кривые гладким образом стыкуются в точке $\lambda = \lambda_0$, в которой касательная линия вертикальна. Асимптотика убывающей кривой A_{01}^+ при $\lambda \rightarrow \infty$ аналогична поведению A_0^- при $\lambda \rightarrow -\infty$, т.е. имеем $A_{01}^+ = (2\lambda)^{-1} + (3\beta/4)(2\lambda)^{-4} + O(\lambda^{-7})$. Сходным образом для возрастающей ветви A_{02}^+ имеем приближенное выражение $A_{02}^+ = (8\lambda/(3\beta))^{1/2} - (4\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-3/2})$. Из полученных представлений следует, что $A_0^- - A_{02}^+ = (2\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-3/2}) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$; для ниспадающей части кривой A_0^- и ветви A_{01}^+ получим аналогично более быстрое убывание $A_0^-(-\lambda, \beta) - A_{01}^+(\lambda, \beta) = -(3\beta/2)(2\lambda)^{-4} + O(\lambda^{-7})$ для $\lambda \rightarrow \infty$.

Рассмотрим асимптотику A_0^+ по параметру β . В случае $\beta \rightarrow 0$ имеет место асимптотика $A_0^+ = (2\lambda)^{-1} + (3\beta/4)(2\lambda)^{-4} + O(\beta^2)$, $\lambda > 0$. Если $\beta \rightarrow \infty$, то значения $\lambda \geq \lambda_0 = (3/4)(3\beta/2)^{1/3} \rightarrow \infty$, поэтому разложения для A_0^+ будут зависеть от оценок $\lambda = \lambda(\beta)$, например в классе степенных. Пусть $\lambda = \Lambda\beta^{1/3}$, где постоянная $\Lambda > (3/4)(3/2)^{1/3}$; тогда оценка $A_0^+ = \zeta^*\beta^{-1/3}$, ζ^* — положительный корень уравнения $\zeta^3 - (8/3)\Lambda\zeta - 4/3 = 0$. Если $\lambda = \Lambda\beta^v$, $1/3 < v < 1$, то приближенное выражение $A_0^+ = \zeta\beta^{-1/3}$, где $\zeta = 4/(3\chi) + (4/(3\chi))^3 + O(\chi^{-5})$, а величина $\chi = (8/3)\Lambda\beta^{v-1/3} \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \infty$. Пусть $v = 1$; тогда имеем две асимптотики: неограниченно убывающую $A_{01}^+ = (2\Lambda\beta)^{-1} +$

$+(3/(8\Lambda))(2\Lambda\beta)^{-3} + O(\beta^{-5})$ и конечную $A_{02}^+ = \kappa + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + O(\mu^3)$, где величина параметра $\kappa = (8\Lambda/3)^{1/2}$ имеет порядок единицы по отношению к $\beta \rightarrow \infty$, $\mu = (2\Lambda\beta)^{-1} \ll 1$ — малый параметр, а коэффициенты разложения $a_1 = -1/2 \kappa^{-2}$, $a_2 = -3/(8\kappa^5)$ и т.д. Наконец, при $\nu > 1$ получается асимптотика $A_0^+ = (2\Lambda\beta^\nu)^{-1} + (3/64)\Lambda^{-4}\beta^{-4\nu+1} + O(\beta^{-7\nu+2})$ для $\beta \rightarrow \infty$.

Возможность реализации плоских колебаний на практике определяется их устойчивостью, исследование которой откладывается до разд. 4.

3.3. Пространственные стационарные колебания. Рассмотрим общий случай $A, B > 0$. Режим пространственных колебаний определяется соотношениями (см. 3.4)

$$\theta = 0, \pi; \quad \lambda = \mp(2A)^{-1} + (3\beta/8)A^2 + (\beta/8)B^2, \quad \beta > 0 \quad (3.7)$$

$$\psi = \pm\pi/2; \quad \lambda = (\beta/8)A^2 + (3\beta/8)B^2, \quad |\lambda| < \infty$$

Знаки \mp в первом уравнении (3.7) для A, B отвечают значениям $\theta = 0, \pi$ соответственно и не зависят от знаков $\psi = \pm\pi/2$. При $B = 0$ это уравнение определяет амплитуду $A_0^\mp(\lambda, \beta)$, исследованную выше. Исключим из него $B^2 > 0$ при помощи второго уравнения; получим соотношения, удобные для дальнейшего анализа:

$$\lambda = \mp 3(4A)^{-1} + (\beta/2)A^2, \quad B = [\mp 2(\beta A)^{-1} + A^2]^{1/2} \quad (3.8)$$

Формулы (3.8) позволяют построить графическое решение $A(\lambda, \beta), B(\lambda, \beta)$ аналогично разд. 3.2, не определяя корни кубического уравнения относительно A . Случай пространственных колебаний, как следует из (3.8), соответствует более высокой эквивалентной жесткости нелинейной характеристики и большей амплитуде внешнего воздействия (поскольку $1/2 > 3/8$ и $3/4 > 1/2$ соответственно, см. (3.6)). Анализ семейства кривых $A^\mp(\lambda, \beta)$ аналогичен проведенному выше для $A_0^\mp(\lambda, \beta)$. Исследование семейства кривых $B^\mp(\lambda, \beta)$ можно осуществить на основе второй формулы (3.8) и асимптотик выражений $A^\mp(\lambda, \beta)$.

Рассмотрим сперва случай $\theta = 0$ (колебания "в фазе"), что соответствует знаку минус в (3.8). Семейство кривых $A^-(\lambda, \beta)$ является монотонно возрастающей функцией λ , $\lambda \in (-\infty, \infty)$ при фиксированном $\beta > 0$. Эти кривые пересекают ось ординат ($\lambda = 0$), принимая значения $A^0(\beta) = A^-(0, \beta) = (3/(2\beta))^{1/3}$. Для асимптотически больших значений $|\lambda|$ имеют место разложения

$$A^-(\lambda, \beta) = -3(4\lambda)^{-1} - (\beta/(2\lambda))(3/(4\lambda))^3 + O(|\lambda|^{-7}), \quad \lambda \rightarrow -\infty \quad (3.9)$$

$$A^-(\lambda, \beta) = (2\lambda/\beta)^{1/2} + 3(8\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

Интересно отметить, что при малых $|\lambda|$ для $A^-(\lambda, \beta)$ справедливо приближенное выражение $A^-(\lambda, \beta) = A^0(\beta) + (4/9)\lambda A^{02}(\beta) + O(\lambda^3)$, т.е. в точке $\lambda = 0$ каждая кривая семейства имеет нулевую кривизну (точка перегиба). Случай $\beta = 0$ приводит к линейному осциллятору; при $\beta \ll 1$ получим оценку (3.9), соответствующую $\lambda < 0$, однако погрешность по β будет $O(\beta^2)$, см. выше случай плоских колебаний.

Асимптотика A^- по β при $\beta \rightarrow \infty$, $\lambda \sim 1$ имеет вид $A^-(\lambda, \beta) = (3/(2\beta))^{1/3} + (4\lambda/9)(3/(2\beta))^{2/3} + O(\beta^{-1})$.

Рассмотрим теперь выражение (3.8) для $V = V^-$, отвечающее знаку минус ($\theta = 0$). Из него следует, что колебания вдоль оси z могут возникнуть при достаточно больших значениях A , т.е. частотной расстройке λ . Действительно, $V^2 > 0$, если $A^- > (2/\beta)^{1/3}$, что возможно при достаточно больших λ : $\lambda > \lambda^* = (1/4)(\beta/2)^{1/3}$. Из (3.6) следует, что $A_0^-(\lambda^*, \beta) = A^-(A^*, \beta)$, т.е. точка $\lambda = \lambda^*$ является критической: в ней возможны колебания, отвечающие двум режимам. При увеличении λ , $\lambda > \lambda^*$ будут происходить либо плоские ($V = 0$), либо пространственные колебания, что определяется их устойчивостью. Решение этого вопроса см. в разд. 4. Таким образом, пространственные колебания при $\lambda < \lambda^*$ невозможны ($V^2 < 0$), и полученные выше асимптотики (3.9) для A^- при $\lambda \rightarrow -\infty$ и разложения по малым $|\lambda|$, $\lambda < 0$ не соответствуют действительности. При увеличении $\lambda > \lambda^*$ кривая $V^-(\lambda, \beta)$ довольно быстро растет, и, кроме того, производная V^- по λ в точке $\lambda = \lambda^* + 0$ бесконечна, поскольку для V^- имеет место асимптотика $V^-(\lambda, \beta) = (24/(11\beta))^{1/2}(\lambda - \lambda^*)^{1/2}\lambda > \lambda^*$. Согласно (3.8), (3.9), для V^- при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо приближенное выражение $V^-(\lambda, \beta) = (2\lambda/\beta)^{1/2} + (8\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-2})$. Аналогично случаю, рассмотренному выше для $A_0^+(\lambda, \beta)$, получается асимптотика $V^-(\lambda, \beta)$ по β , $\beta \rightarrow \infty$ при $\lambda = \lambda(\beta)$ в классе степенных зависимостей (см. далее). Для значений $\beta \ll 1$, $\lambda \sim 1$ кривая V^- при помощи (3.8), (3.9) описывается аналогично A^- выражением $V^-(\lambda, \beta) = (2\lambda/\beta)^{1/2} - (8\lambda)^{-1} + O(\beta) \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow 0$. Таким образом, приближенные выражения для A^-, V^- показывают, что $A^- > V^-$, что подтверждается расчетами (фигура).

Рассмотрим поведение семейства резонансных кривых $A^+(\lambda, \beta)$, $V^+(\lambda, \beta)$, которые определяются соотношениями (3.8) (со знаком плюс). Они соответствуют пространственным колебаниям при $\theta = \pi$ (в "противофазе") и $\psi = \pm \pi/2$. Кривые A^+, V^+ состоят из двух ветвей $A_{1,2}^+, V_{1,2}^+$, которые гладким образом стыкуются в точке возврата $\lambda_* = (9/8)(4\beta/3)^{1/3} > \lambda_0 = (3/4)(3\beta/2)^{1/3}$; соответствующие значения $A_*^+ = (3/(4\beta))^{1/3} > A_0^+ = (2/(3\beta))^{1/3}$, V_*^+ . Кроме того, касательные к этим кривым в точке возврата вертикальны (как для $A_0^+(\lambda_0, \beta)$). Ветви кривой A^+ весьма сходны с ветвями A_0^+ : они имеют асимптотику $A_1^+ = 3(4\lambda)^{-1} + O(\lambda^{-4})$, $A_2^+ = (2\lambda/\beta)^{1/2} + O(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Кривая амплитуд $V^+(\lambda, \beta)$ имеет единственный глобальный минимум по λ : $V_m^+(\beta) = V^+(\lambda_m, \beta) = 3^{1/2}\beta^{-1/3}$ ($V_*^+(\beta) = (11/3)^{1/2}(3/(4\beta))^{1/3}$), где $\lambda_m = \lambda_m(\beta) = (5/4)\beta^{1/3}$. Можно установить, что $\lambda_m > \lambda_*$, поскольку $\lambda_m(\beta)/\lambda_*(\beta) = (10/9)(3/4)^{1/3} \approx 1,013$, однако различие весьма невелико. Обе ветви кривой $V^+ = V_{1,2}^+$ (в отличие от $A^+ = A_{1,2}^+$) являются возрастающими, причем ниспадающей ветви A_1^+ отвечает кривая $V_1^+ = (8\lambda/(3\beta))^{1/2} + O(\lambda^{-5/2})$, а возрастающей A_2^+ — также возрастающая ветвь $V_2^+ = (2\lambda/\beta)^{1/2} + O(1)$. Из приведенных оценок следует, что $V_1^+ > V_2^+$, т.е. ниспадающей ветви A_1^+ соответствует кривая V_1^+ , которая идет выше кривой V_2^+ , отвечающей возрастающей ветви A_2^+ . Более точное построение асимптотик $A_{1,2}^+(\lambda, \beta)$, $V_{1,2}^+(\lambda, \beta)$ не понадобится по причинам, которые будут объяснены в разд. 4.

Итак, анализируя полученные оценки для A_0^\mp, A^\mp, V^\mp , можно сделать вывод об их предельном поведении с ростом частотной расстройке $|\lambda|$. Кривая A_0^- при $\lambda \rightarrow -\infty$ и

ветви A_{01}^+, A_1^+ для $\lambda \rightarrow \infty$ имеют асимптотики $O(|\lambda|^{-1})$. Кривые $A_0^-, A_{02}^+, B_1^+ = (8\lambda / (3\beta))^{1/3}$ в главном члене асимптотики, а кривые $A^-, B^-, A_2^+, B_2^+ = (2\lambda / \beta)^{1/3}$, т.е. лежат ниже указанных кривых. Это группирование кривых в близкой окрестности отчетливо наблюдается при графическом анализе амплитудно-частотных характеристик (см. фигуру).

В заключение отметим, что все резонансные кривые подобны в следующем смысле. Сделаем преобразования переменных A, B и аргумента λ по формулам

$$A = U\beta^{-1/3}, \quad B = V\beta^{-1/3}, \quad \lambda = \chi\beta^{1/3}, \quad \beta > 0 \quad (3.10)$$

Тогда уравнения для определения $A_0(\lambda, \beta)$ (3.6) или $A(\lambda, \beta), B(\lambda, \beta) > 0$ (3.7), (3.8) приводятся к виду, при котором $\beta = 1, A = U, B = V, \lambda = \chi$, поэтому достаточно построить универсальные кривые $U_0^\mp(\chi)$ или $U^\mp(\chi), V^\mp(\chi)$. Требуемые характеристики при произвольном $\beta > 0$ получаются согласно (3.10):

$$A(\lambda, \beta) = U(\lambda\beta^{-1/3})\beta^{-1/3}, \quad B(\lambda, \beta) = V(\lambda\beta^{-1/3})\beta^{-1/3} \quad (3.11)$$

поэтому фактически можно ограничиться построением и анализом кривых $A(\lambda, 1), B(\lambda, 1)$, которые приведены на фигуре. Проведенный выше анализ выполнен в соответствии с традицией и с целью наглядности.

В соответствии с (3.11) все характерные точки при $\beta \rightarrow \infty$ удаляются по λ и опускаются вниз по оси ординат; и наоборот, при $\beta \rightarrow 0$ они приближаются к оси ординат и неограниченно растут (по A, B). Масштабный множитель равен $\beta^{-1/3}$. Заметим, что на основе (3.10), (3.11) можно построить кривые для любого β , если они известны для некоторого фиксированного значения.

Значительный теоретический и прикладной интерес представляет исследование устойчивости по Ляпунову построенных стационарных режимов колебаний, а также моделирование траекторий в окрестности этих режимов на основе точных или усредненных уравнений движения.

4. Исследование устойчивости вынужденных стационарных колебаний. 4.1. Предварительные замечания. Проведем исследование устойчивости стационарных колебаний при помощи первого метода Ляпунова [9]. Для этого вычислим характеристические показатели соответствующей системы в вариациях. Если рассматривать только плоские колебания ($b \equiv 0$), то общеизвестно [4, 9], что стационарные колебания, отвечающие резонансной кривой $A_{02}^+(\lambda, \beta)$, являются неустойчивыми (неустойчивость типа "седло"). Кривым $A_0^-(\lambda, \beta), A_{01}^+(\lambda, \beta)$ в линейном приближении отвечают стационарные точки типа "центр". Наличие сколь угодно малой линейной диссипации (например, порядка ε^2) приводит к асимптотической устойчивости этих стационарных колебаний. Критическая точка стыковки ветвей A_{01}^+ и A_{02}^+ приводит к двукратному нулевому характеристическому показателю с одним элементарным делителем, что соответствует неустойчивости. Наличие диссипации порядка ε требует отдельного изучения.

Исследуем устойчивость стационарных колебаний в линейном приближении для пространственной модели, описываемой системой (3.3).

4.2. Устойчивость плоских стационарных колебаний при пространственных возмущениях. Усредненные уравнения (3.5) не пригодны для анализа устойчивости плоских колебаний ($B \equiv 0$), поскольку фаза ψ не определена, поэтому вместо вырождающейся замены (3.4) перейдем для b, \dot{b} к оскулирующим переменным типа Ван дер

Поля [10, 11]

$$a = A \cos(\mu t + \theta), \quad \dot{a} = -A\mu \sin(\mu t + \theta), \quad \mu = 1 + \varepsilon\lambda$$

$$b = r \cos \mu t + u \sin \mu t, \quad \dot{b} = -r\mu \sin \mu t + u\mu \cos \mu t \quad (4.1)$$

Дифференцируя соотношения (4.1) в силу системы (3.3) и усредняя по t , получим вместо (3.5) уравнения для A, θ, r, u в медленном времени $\tau = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{1}{2} \sin \theta - (\beta/8)AB^2 \sin 2\delta, \quad B^2 = r^2 + u^2 \\ \dot{\theta} &= -\lambda - (2A)^{-1} \cos \theta + (3\beta/8)A^2 + (\beta/4)B^2(1 + \frac{1}{2} \cos 2\delta) \\ \dot{r} &= -\lambda u + (\beta/8)A^2[-r \sin 2\theta + u(1 + 2 \sin^2 \theta)] + (3\beta/8)uB^2 \\ \dot{u} &= \lambda r - (\beta/8)A^2[r(1 + 2 \cos^2 \theta) - u \sin 2\theta] - (3\beta/8)rB^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\delta = \psi - \theta, \quad B \cos \psi = r, \quad B \sin \psi = -u$$

Стационарное решение системы (4.2), отвечающее плоским колебаниям, имеет вид $\theta = 0, \pi$; $A_0(\lambda, \beta) = A_0^-(\lambda, \beta), A_{01,2}^+(\lambda, \beta)$, а переменные $r = u = 0$. Характеристическое уравнение для соответствующей системы в вариациях является биквадратным относительно показателей p и, более того, оно имеет вид

$$\Delta^{\mp}(p) = Q_A^{\mp}(p^2)Q_B^{\mp}(p^2) = 0, \quad \xi \equiv \beta A_0^3(\lambda, \beta) \quad (4.3)$$

$$Q_A^{\mp}(p^2) = p^2 + (8A_0^2)^{-1}(2 \pm 2\xi), \quad Q_B^{\mp}(p^2) = p^2 + (8A_0^2)^{-1}(2 \mp \xi)$$

Из (4.3) следует, что стационарные плоские колебания "в фазе" ($\theta = 0$) теряют устойчивость ("седло") при $\xi > 2$; при $\xi < 2$ характеристические показатели чисто мнимые ("центр"). Соответствующее значение $\lambda(\beta)$ вычисляется по формуле (3.6) (со знаком минус): $\lambda(\beta) = \lambda^*(\beta) = \frac{1}{4}(\beta/2)^{1/3}$. Обратим внимание на то обстоятельство, что это значение λ является критическим: при $\lambda > \lambda^*$ появляется возможность пространственных колебаний ($B > 0$), см. разд. 3.3. Далее, согласно (4.3), колебания "в противофазе" ($\theta = \pi$) теряют устойчивость при $\xi \geq \frac{2}{3}$, т.е. $A_0^+(\lambda, \beta) \geq (\frac{2}{3}\beta)^{1/3}$. Таковы значения точек кривой $A_{02}^+ : A_{02}^+(\lambda, \beta) \geq (\frac{2}{3}\beta)^{1/3}$. Значения $A_{01}^+(\lambda, \beta)$ удовлетворяют обратному неравенству: $A_{01}^+(\lambda, \beta) < (\frac{2}{3}\beta)^{1/3}$ ($\lambda > \lambda_0(\beta)$). Эти кривые существуют при $\lambda \geq \lambda_0(\beta) = (\frac{3}{4})(3\beta/2)^{1/3}$, причем $\lambda_0 > \lambda^*$; для них выполняется условие устойчивости. Итак, полностью определены области устойчивости (в линейном приближении) и неустойчивости стационарных плоских колебаний струны во всей области $|\lambda| < \infty, \beta > 0$ по отношению к пространственным возмущениям.

4.3. Устойчивость пространственных стационарных колебаний. Характеристическое уравнение для системы в вариациях, соответствующей стационарным точкам (см. (3.7)) системы (3.5), также является биквадратным вида

$$\Delta^{\mp}(p) = s^2 + ks + h = 0, \quad s = p^2 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} k = k^{\mp} &\equiv (4A^2)^{-1} \pm (3\beta/8)A \pm (\beta/8)A^{-1}B^2 + \\ &+ (\beta^2/4)A^2B^2, \quad h = h^{\mp} \equiv [(3/64)A^{-2} \pm (\beta/16)A] \beta^2 A^2 B^2 \end{aligned}$$

Коэффициенты k и h определяются согласно тождеству (4.4). Как и раньше, верхний знак в Δ^{\mp} отвечает $\theta = 0$, а нижний — $\theta = \pi$. Чтобы корни $s_{1,2}$ квадратного

уравнения были вещественными и отрицательными, необходимо и достаточно выполнение всех неравенств: $k > 0, h > 0, d = k^2 - 4h > 0$.

Рассмотрим колебания "в фазе"; для коэффициентов k^-, h^-, d^- получим выражения

$$k^- = (\beta^2 / 4)A^4 > 0, \quad h^- = (1/64)(3 + 4\xi)\beta^2 B^2 > 0$$

$$d^- = \xi(2A)^{-4}(\xi^3 - 4\xi^2 + 5\xi + 6) > 0, \quad \xi > 2 \quad (4.5)$$

$$A = A^-(\lambda, \beta), \quad B = B^-(\lambda, \beta), \quad \xi = \beta A^3$$

Неравенство $d^- > 0$ при $\xi > 2$ следует сразу, если сделать подстановку $\xi = 2 + \zeta, \zeta > 0$; для ζ получается полином третьего порядка с положительными коэффициентами. Итак, стационарные пространственные колебания "в фазе" всегда устойчивы по первому приближению. Наличие относительной малой линейной диссипации приведет к асимптотической устойчивости. Если диссипация имеет порядок ϵ , то проведенный выше анализ требует коррекции с учетом этого возмущения [6, 8, 9].

Исследуем корни уравнения (4.4) со знаком плюс ($\Delta^+(p) = 0$), отвечающие $\theta = \pi$. Для коэффициентов k^+, h^+, d^+ получим выражения

$$k^+ = (\beta^2 / 4)A^4 > 0, \quad h^+ = (64A^2)^{-1}(3 - 4\xi)\beta^2 A^2 B^2$$

$$d^+ = \xi(2A)^{-4}(\xi^3 + 4\xi^2 + 5\xi - 6), \quad \xi > 0 \quad (4.6)$$

$$A = A_{1,2}^+(\lambda, \beta), \quad B = B_{1,2}^+(\lambda, \beta), \quad \xi = \beta A^3$$

Из выражения h^+ (4.6) сразу следует, что колебания с амплитудами A_2^+, B_2^+ , для которых $\xi > \xi_* = 3/4$ экспоненциально неустойчивы ("седло"), так как $h_2^+ < 0$. Ветви A_1^+, B_1^+ , для которых $\xi < \xi_*$, приводят к неравенству $h_1^+ > 0$. Для устойчивости в первом приближении колебаний с амплитудами A_1^+, B_1^+ достаточно, чтобы кубический полином по ξ в (4.6) был положителен при $\xi < \xi_*$, т.е. $\phi_1^+(\xi) = \xi^3 + 4\xi^2 + 5\xi - 6 > 0$. Непосредственной подстановкой $\xi = \xi_* = 3/4$ убеждаемся, что $\phi_1^+(3/4) = 27/64 > 0$. Однако вблизи этого значения существует корень ξ_1^+ уравнения $\phi_1^+(\xi) = 0$, который приближенно равен $\xi_1^+ \approx 0,72$, причем $\phi_1^+(\xi) < 0$ при $\xi < \xi_1^+$. Таким образом, в весьма узкой области $0,75 < \xi \leq 0,72$ имеет место устойчивость стационарных колебаний "в противофазе". Через частотную расстройку λ эта область представляется следующим образом. Значению $\xi_* = 3/4$ соответствует точка возврата $\lambda_* = (9/8)(4\beta/3)^{1/3}$. Для значения $\xi = \xi_1^+$, согласно (3.8), получим $\lambda_1^+ = (\beta/\xi_1^+)^{1/3}(\xi_* + \xi_1^+/2) > \lambda_*$. Эта область по λ практически незаметна, поскольку кривая $A_1^+(\lambda, \beta)$ идет почти вертикально в малой окрестности точки возврата λ_* .

Таким образом, полностью в терминах параметров задачи λ, β построена картина плоских и пространственных нелинейных колебаний струны и исследована их устойчивость по Ляпунову. Сравнение с опытными данными подтверждает качественное совпадение результатов.

Авторы благодарят Г.В. Костина за обсуждения и помощь в проведении расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01368, 95-01-01091), совместного Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки РФ (J17100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М. – Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
4. Oplinger D.W. Frequency response of nonlinear stretched string // J. Acoust. Soc. Amer. 1960. V. 32. No. 12. P. 1529–1538.
5. Srinivasa Murthy G.S., Ramakrishna B.S. Nonlinear character of resonance in stretched strings // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 38. No. 3. P. 461–471.
6. Anand G.V. Stability of nonlinear oscillations of stretched strings // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. No. 3 (P 2). P. 667–677.
7. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 87–92.
8. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
9. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
11. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.IV.1994