УДК 532.783

© 1996 г. Э.Л. Аэро

ПЛОСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Показано, что при некоторых ограничениях уравнения ориентационного равновесия нематического жидкого кристалла в двумерной области, находящейся в неоднородном магнитной поле, сводятся к нелинейному уравнению синус-Гельмгольца в плоскости сопряженных магнитных потенциалов μ, η. Выявлена роль конформных отображений $\mu, \eta \to x, y$. Рассмотрены плоские граничные задачи для этого уравнения в одномерных и двумерных областях. Установлены критерии устойчивости двумерных решений в открытых и замкнутых объемах. Проанализированы явные формы решений, выражающихся через периодические эллиптические функции и квазипериодические тэта-функции двух аргументов. Решена обратная задача. Получены решения типа двумерного кинка и дельта-функции Якоби в замкнутом объеме.

1. Нематические жидкие кристаллы (НЖК), обладая подвижностью жидкости, проявляют своеобразную ориентационную упругость. В чистом виде она обнаруживается в покоящемся НЖК, испытывающем не силовое, а моментное воздействие со стороны магнитного (электрического) поля и твердых границ. Эти факторы создают в НЖК пространственно неоднородное поле директора $\mathbf{l}(x, y, z)$. Орт $\mathbf{l}$ характеризует среднестатистическое (в физически малом объем) направление осей удлиненных (сплюснутых) молекул, между которыми существуют дальнодействующие моментные взаимодействия.

Уравнение равновесия локальных моментов в неподвижном НЖК можно получить из вариационного принципа. С градиентами поля $\mathbf{l}(x, y, z)$ связана упругая энергия Озеена–Франка [1, 2]

$$F = \frac{1}{2}\int_{\upsilon} [k_1(\operatorname{div}\mathbf{l})^2 + k_2(\mathbf{l}\operatorname{rot}\mathbf{l})^2 + k_3|\mathbf{l}\times\operatorname{rot}\mathbf{l}|^2 + \chi_{ik}H_iH_k]d\upsilon \tag{1.1}$$

В нее не включена энергия изменения объема υ. Коэфициенты k_1, k_3 – упругие модули изгиба силовых линий ориентационного поля, k_2 – модуль кручения, H_i – вектор напряженности магнитного поля. Диамагнитный тензор $\chi_{ik} = \chi_\perp\delta_{ik} + (\chi_\| - \chi_\perp)l_il_k$ имеет две компоненты – продольную ($\chi_\|$) и поперечную ($\chi_\perp$) восприимчивость НЖК.

Будем рассматривать магнитное поле как квазипериодическое, подчиняющееся уравнениям

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0,\quad \mathbf{H} = \operatorname{grad}\mu,\ \mathbf{B} = \mathbf{H} \tag{1.2}$$

Хотя для вектора магнитной индукции следует принять $B_i = \chi_{ik}H_k$, однако в силу диамагнетизма НЖК магнитная поляризуемость среды весьма мала. Поэтому последнее соотношение в (1.2), являющееся фактически допущением теории, выполняется в действительности с большой точностью, порядка 10^{-7}.

Наряду с этим допущением приходится принять и другие. Положим, во-первых, что

$$k_1 \simeq k_3 = k \tag{1.3}$$

хотя существуют НЖК, для которых это соотношение оправдывается точно. Во-вторых, ограничимся плоскими задачами изгиба, исключив из рассмотрения кручение силовых линий, положив $|\text{rot}\mathbf{l}| = 0$. Введем угловые функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, которые характеризуют ориентацию векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{H}$ в плоскости (x, y) по отношению к оси OY (декартовой системы координат с началом в произвольной точке O) согласно выражениям

$$l_x = \sin\varphi, \quad l_y = \cos\varphi, \quad H_x = H\sin\psi, \quad H_y = H\cos\psi \tag{1.4}$$

В пределах указанных допущений функционалу (1.1) соответствует следующее уравнение равновесия моментов в НЖК:

$$k\nabla^2(2\alpha) - H^2\chi\sin 2\alpha = -k\nabla^2 2\psi, \quad \alpha = \varphi - \psi, \quad \chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp} \tag{1.5}$$

Угол ориентации магнитного поля равен

$$\psi = \text{arctg}(\mu'_x / \mu'_y), \quad \mu'_x = \partial\mu / \partial x, \quad \mu'_y = \partial\mu / \partial y, \quad \nabla^2\mu = 0 \tag{1.6}$$

т.е. определяется из уравнений магнитного поля, приводящих к уравнению Лапласа для магнитного потенциала μ.

На границе двумерной области S задаются углы ориентации как функции координат границы

$$\alpha = \alpha_s, \qquad \psi = \psi_s \tag{1.7}$$

Граничная задача (1.5)–(1.7) позволяет найти ориентационное поле $\mathbf{l}(x, y)$ в области S, формирующееся под влиянием магнитного поля $\mathbf{H}(x, y)$ и заданной ориентации на границе. Несмотря на принятые допущения, задача оказывается довольно сложной в силу особенностей нелинейного уравнения (1.5). Она до сих пор исследовалась лишь в одномерном случае (см. обзор [3]).

Ниже развивается общий подход к решению двумерных задач.

2. Приведем (1.5) к виду, не содержащему неоднородных членов. При конформном преобразовании координат x, y к ортогональным криволинейным координатам $\mu(x, y)$, $\eta(x, y)$, которые являются действительным и мнимым сопряженными магнитными потенциалами, двумерный оператор Лапласа ∇^2 преобразуется так:

$$\nabla^2 \to H^2\nabla^2_{\mu}, \quad \nabla^2_{\mu} \equiv \partial^2 / \partial\mu^2 + \partial^2 / \partial\eta^2, \quad \nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \tag{2.1}$$

Ясно, что использование этой формулы в (1.5) дает возможность избавиться от переменного множителя H^2 в уравнении. Далее, поскольку потенциалы μ, η – сопряженные гармонические функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа и соотношениям Коши–Римана:

$$\nabla^2\mu = \nabla^2\eta = 0, \quad \mu'_x = \eta'_y, \quad \eta'_x = -\mu'_y \tag{2.2}$$

то можно доказать [4], что и угол ψ ориентации вектора квазипотенциального магнитного поля – также гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{2.3}$$

Это позволяет положить в (1.5) правую часть равной нулю.

В силу важности соотношения (2.3), неизвестного в теории поля, остановимся на его доказательстве. Дифференцируя формулы для магнитного поля в (1.4) и применяя уравнения магнитного поля (1.2), получим

$$\psi'_x = -\frac{1}{2}(\ln H^2)'_y, \quad \psi'_y = \frac{1}{2}(\ln H^2)'_x \tag{2.4}$$

(штрихи сверху означают частные производные по указанным переменным). Далее, дифференцируя первое соотношение по y, а второе по x и складывая полученные равенства, приходим к (2.3). Этот результат был получен ранее [5] более сложным путем.

Итак, на основании (2.1), (2.3) можем записать ориентационное уравнение (1.5) в окончательном виде [5]

$$\mu_\chi^2 \nabla_\mu^2 (2\alpha) - \sin 2\alpha = 0, \quad \mu_\chi = \sqrt{k/\chi} \tag{2.5}$$

(μ_χ – характеристический магнитный потенциал). Другая форма записи (2.5), выраженная через дополнительный угол β, такова:

$$\mu_\chi^2 \nabla_\mu^2 (2\beta) + \sin 2\beta = 0, \quad 2\beta = \pi - 2\alpha \tag{2.6}$$

Новая угловая функция $\beta(x, y)$ в некоторых граничных задачах удобнее, поскольку она симбатно изменяется с величиной ориентационных деформаций $\nabla\mathbf{l}$. Существенно, что в результате конформных преобразований углы α и β сохраняются, а (1.5) преобразуется к более простому нелинейному уравнению (однородному, с постоянными коэффициентами). Оно позволяет найти вначале угловую функцию $\alpha(\mu, \eta)$ или $\beta(\mu, \eta)$ в пространстве переменных μ и η. Затем после решения соответствующей магнитной задачи нужно трансформировать α и β в реальное пространство x, y, зная магнитные потенциалы $\mu(x, y)$ и $\eta(x, y)$.Исходные угловые функции φ и ψ, определяющие ориентацию векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{H}$, находятся далее по формулам

$$\varphi(x, y) = \alpha[\mu(x, y), \eta(x, y)] + \psi(x, y) \tag{2.7}$$

$$\psi(x, y) = \mathrm{arctg}(\mu'_x / \mu'_y), \quad \mu = \mu(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2.8}$$

Общие решения (2.7), (2.8) предусматривают относительно простую локальную связь полей $\mathbf{l}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$. Функции $\alpha(\mu, \eta)$ или $\beta(\mu, \eta)$ являются универсальными для целого класса магнитных задач, решения которых $\mu(x, y)$, $\eta(x, y)$ конформно преобразуют реальные границы области (в плоскости (x, y)) в одну и ту же границу в плоскости (μ, η). Конкретная порождающая функция $\alpha(\mu,\eta)$ или $\beta(\mu, \eta)$ строится единожды для этой границы.

Построению таких функций посвящен последующий материал статьи.

Отметим одно важное следствие формул (2.7), (2.8). Наряду с прямой задачей нахождения ориентационного поля $\mathbf{l}(x, y)$ по внешнему магнитному полю $\mathbf{H}(x, y)$ и граничным условиям может быть решена и обратная задача – найдено магнитное поле по находящемуся с ним в равновесии ориентационному полю.

Дифференцируя $\alpha[\mu(x, y), \eta(x, y)]$ как сложную функцию и используя соотношения (1.2) и (2.2), находим вначале

$$H_x = \frac{\alpha''_x / \alpha'_\eta - \alpha'_y / \alpha'_\mu}{\alpha'_\mu / \alpha'_\eta + \alpha'_\eta / \alpha'_\mu}, \quad H_y = \frac{\alpha'_x / \alpha'_\mu + \alpha'_y / \alpha'_\eta}{\alpha'_\mu / \alpha'_\eta + \alpha'_\eta / \alpha'_\mu} \tag{2.9}$$

Производные α'_μ и α'_η во многих случаях могут быть выражены как первые интегралы через квадратичные функции угла α. В формулах (2.9) можно перейти от углов α и их градиентов к абсолютным углам φ и ψ, если воспользоваться формулами (2.7), (2.8) и (2.4). Естественно, что и обратные формулы носят локальный характер. Они составляют теоретическую основу для метода контроля магнитных полей с помощью ориентационного поля НЖК, которое в свою очередь контролируется поляризационно-оптическими методами [3,6].

3. Граничные задачи для нелинейного уравнения (2.5) или (2.6), по-видимому, ранее не рассматривались. Лишь в последнее время в литературе начали появляться достаточно общие его решения. Рассмотрим их применительно к двумерным (плоским) задачам теории упругости НЖК. Ограничимся здесь условием однородной ориентации НЖК вдоль всей границы или отдельных ее участков. Оно чаще всего и реализуется на практике. В пределах этого допущения будут рассмотрены два класса задач.

Первый из них связан с областями, границы которых являются либо эквипотенциалями (μ = const) магнитного поля, либо совпадают с силовыми линиями (η = const). Тогда уравнение (2.5) или (2.6) нужно решать в плоскости переменных (μ, η) для полосы $\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2$ или $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ с граничными условиями

$$\beta(\mu_1) = \beta_1, \quad \beta(\mu_2) = \beta_2 \quad \text{или} \quad \beta(\eta_1) = \beta_1, \quad \beta(\eta_2) = \beta_2 \tag{3.1}$$

где β_1, β_2 – постоянные, определяющие ориентацию орта **l** на границе по отношению к нормали или по отношению к самой границе. Аналогичным образом выглядят условия и для дополнительного угла α. Очевидно, граничным условиям (3.1) удовлетворяет одномерное решение вида $\beta(\mu)$ или $\beta(\eta)$. В реальном же пространстве (x, y) это решение оказывается двумерным, если магнитная задача двумерна: $\mu = \mu(x, y)$ или $\eta = \eta(x, y)$.

Другой класс более сложных, но также решаемых задач, имеет дело с областями, одни участки границ которых совпадают с эквипотенциалями, а другие – с силовыми линиями магнитного поля. В этом случае двумерное уравнение (2.5) или (2.6) нужно решать для замкнутой области прямоугольной в плоскости (μ, η), стороны которой параллельны координатным осям $O\eta$ или $O\mu$. Даже в случае постоянных значений угла на каждом из прямолинейных участков, когда

$$\beta(\mu_1) = \beta_1, \quad \beta(\mu_2) = \beta_2, \quad \beta(\eta_1) = \beta_3, \quad \beta(\eta_2) = \beta_4 \tag{3.2}$$

нужно рассматривать решение, зависящее от обоих потенциалов μ, η. Однако здесь проходит своеобразный метод разделения переменных.

Рассмотрим оба эти класса задач последовательно.

4. В задачах первого класса на первом этапе решается одномерное уравнение, следующее из (2.5) или (2.6). Имея в виду последнее, пишем:

$$\mu_\chi^2 \partial^2(2\beta)/\partial\mu^2 + \sin 2\beta = 0 \tag{4.1}$$

Рассмотрим вначале случай, когда в отсутствие магнитного поля нет и искажений ориентационного поля, т.е. на обеих границах углы просто одинаковы, $\beta_1 = \beta_2$. Типичными являются граничные условия

$$\beta_1(\mu_1) = \beta_2(\mu_2) = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \Delta\mu \tag{4.2}$$

В отсутствие магнитного поля угол β равен нулю и во всей полосе. Это видно из уравнения (4.1).

При наличии магнитного поля уравнение (4.1) имеет семейство решений

$$\sin\beta = \pm\nu\,\mathrm{sn}[\mu_\chi^{-1}\mu(x,y)], \quad \nu = \sin\beta_m \tag{4.3}$$

Здесь β_m – наибольший угол (в центре полосы), два знака соответствуют закрутке в разные стороны, символ sn означает эллиптический синус Якоби [7]. Он обращается в нуль, когда его аргумент равен величине

$$2nK(\nu), \quad K(\nu) \equiv \int_0^{\pi/2} (1 - \nu^2 \sin\beta)^{-1/2} d\beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

($K(\nu)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, ν – его модуль). Тогда решение

(4.3) удовлетворяет граничному условию $\beta_1 = 0$ при $\mu_1 = 0$, когда $n = 0$. На другой границе ($\mu = \mu_2$) условие (4.2) удовлетворяется, если

$$\Delta\mu/\mu_\chi = 2nK(\nu) \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.5}$$

Отсюда определяется постоянная ν, а через нее и наибольший угол β_m закрутки в центре слоя.

По определению [7] $K(\nu)$ – монотонно растущая функция, т.е.

$$K(\nu) > \pi/2, \;\; K(0) = \pi/2, \;\; K(1) = \infty, \;\; 0 \leqslant \nu \leqslant 1 \tag{4.6}$$

Поэтому нетривиальное решение ($\beta = 0$) существует, если $\nu = 0$, т.е. $K(\nu) > \pi/2$. Тогда из (4.5) и (4.6) следует неравенство

$$|\Delta\mu| > n\pi\mu_\chi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Его правая часть представляет собой пороговое значение разности потенциалов на границах $\Delta\mu$. Ниже этого порога имеем лишь тривиальное решение $\beta = 0$, т.е. магнитное поле совсем не искажает поле директора и $\mathbf{l} \| \mathbf{H}$. При достижении порога (точки бифуркации) неискаженное состояние становится неустойчивым и далее возможно множество ($2n$) решений $\beta \neq 0$. Число $|n|$ соответствует числу полуволн синусоиды, укладывающихся в промежутке $\mu_2 - \mu_1 = \Delta\mu$. Первому числу $n = \pm 1$ соответствуют два равных и самых глубоких минимума функционала упругой энергии с учетом магнитных членов и две ветви равновесных деформаций поля директора. Ветви более высокого порядка $|n| \geqslant 2$ соответствуют метастабильным равновесиям [8].

Существенно, что условие (4.7) является универсальным критерием возникновения пороговых деформаций двумерного поля директора в областях произвольной геометрии с границами, являющимися либо эквипотенциальными линиями, либо магнитными силовыми линиями неоднородного магнитного поля. Этот критерий представляет собой обобщение критерия Фредерикса [6], справедливого лишь для плоскопараллельного слоя с однородными условиями вдоль него: $\mu = \mu(y)$, $\eta = \text{const}$. Универсальный характер критерия (4.7) проявляется и в том, что в него не входит линейный размер области, а лишь разность потенциалов.

Раскрывая в (4.3) зависимость $\mu(x, y)$ применительно к конкретным магнитным полям и переходя к углу $\alpha(x, y)$ и формулам (2.7), (2.8), получаем в окончательном виде решение задачи о нахождении полей $\mathbf{l}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$ при условиях на границах (4.2), исключающих деформацию без магнитного поля. Ясно, что решение (4.3) также универсально по отношению к магнитным полям и геометрии области с границами $\mu(x, y) = \text{const}$ или $\eta(x, y) = \text{const}$.

Теперь перейдем к случаю граничных условий, которые и в отсутствие магнитного поля обеспечивают искажение поля директора. Они имеют, в частности, вид

$$\beta(\mu_1) = 0, \quad \beta(\mu_0) = \pi/2 \tag{4.8}$$

В принципе важно то, что значения углов на разных границах полосы не совпадают. Этим граничным условиям удовлетворяют "беспороговые" решения уравнения (4.1), в которых описываются искажения ориентационного поля уже при малых магнитных полях. Они имеют вид

$$\sin\beta = \pm \operatorname{sn}\left[\frac{\mu(x,y) - \mu_0}{\mu_\chi \nu} \pm K(\nu)\right], \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1 \tag{4.9}$$

Разные знаки опять соответствуют закрутке вправо или влево. По определению $\operatorname{sn}(\pm K) = \pm 1$, поэтому второе граничное условие в (4.6), очевидно, выполняется. Нулевое же условие в (4.8) выполняется, в частности, когда аргумент эллиптического синуса в (4.9) принимает значение (4.4). Если $n = 0$, т.е. аргумент обращается в нуль, то

$$|\Delta\mu|\mu_\chi^{-1} = \nu K(\nu), \quad \Delta\mu = \mu_1 - \mu_0 \tag{4.10}$$

Учитывая это в (4.9), получим решение в окончательном виде

$$\sin\beta = \pm\,\mathrm{sn}\left[\frac{\mu_1 - \mu(x,y)}{\Delta\mu} K(\nu)\right] \tag{4.11}$$

Значения $|n| = 1$ и выше не принимаем во внимание. Они дают добавки к 180° к угловому полю $\beta(\mu)$, которые исключаются в асимптотике $H \to 0$. Это будет показано.

Соотношение (4.10) не имеет формы порогового критерия, поскольку правая часть может обращаться в нуль из-за множителя ν.

Если $\Delta\mu = 0$ (магнитное поле отсутствует), то из (4.10) следует, что $\nu = 0$, так как $K(0) = \pi/2$. Но при этом $\mathrm{sn} \to \sin$. Тогда, отождествляя аргументы функций слева и справа в (4.11), получим

$$\Delta\mu \to 0, \quad \beta \to \frac{\mu_1 - \mu(x,y)}{\Delta\mu}\frac{\pi}{2} \tag{4.12}$$

Эту линейную зависимость угла закрутки от потенциала при малых значениях магнитного поля можно получить и прямо из уравнения (4.1), пренебрегая в нем нелинейным (магнитным) членом. Асимптотическое выражение (4.12) удовлетворяет граничным условиям (4.8), но исключает вклады в 180°, которыми справедливо пренебрегли выше.

Универсальная формула (4.11) после подстановки в нее решений магнитных задач $\mu(x, y)$, полученных для областей, ограниченных эквипотенциалями $\mu(x, y) = \mathrm{const}$, дает после использования формул (2.7), (2.8) подкласс решений плоской задачи теории упругости НЖК, описывающих влияние на начально неоднородное ориентационное поле $\mathbf{l}(x, y)$ неоднородного же магнитного поля.

Аналогичные результаты получаются и для областей, ограниченных силовыми линиями магнитного поля $\mathbf{l}(x, y) = \mathrm{const}$.

В пределах задач первого класса так же, как и в общем случае, установим обратную зависимость, выражающую магнитное поле через угол β. Очевидно,

$$\mathrm{grad}\,\beta[\mu(x,y)] = \beta'_\mu\,\mathrm{grad}\,\mu = \beta'_\mu H \tag{4.13}$$

Производная β'_μ – первый интеграл уравнения (4.1), имеющий вид

$$\mu_\chi\beta'_\mu = \pm\sqrt{\sin^2\beta_m - \sin^2\beta}, \quad \beta_m = \max\beta \tag{4.14}$$

Тогда (4.13) дает

$$H(x,y) = \pm\mu_\chi(\sin^2\beta_m - \sin^2\beta)^{-1/2}\,\mathrm{grad}\,\beta \tag{4.15}$$

Это более простая, чем (2.9), зависимость отражает одномерность функции $\beta(\mu)$. Очевидно, градиент угла β и вектор H соосны. Формула справедлива для всех областей, границы которых определяются уравнением $\mu(x, y) = \mathrm{const}$ и для произвольных кусочно-однородных граничных условий.

5. Обратимся к более сложным граничным задачам второго класса для замкнутых областей, ограниченных одновременно эквипотенциалями и силовыми линиями. Рассмотрим вначале двоякопериодические, а затем и квазипериодические решения, зависящие от обоих потенциалов μ и η.

Двоякопериодические решения получаются в результате метода разделения переменных в уравнении (2.5) или (2.6). В этом случае можно рассматривать прямоугольные области в плоскости этих переменных, а в реальном пространстве – границы, часть которых совпадает с эквипотенциалями магнитного поля, а часть – с силовыми линиями. В реальном пространстве им соответствуют в том числе и области с криволинейными границами. Примером может служить клинообразная ячейка, содержащая жидкий кристалл, у которой две поверхности (цилиндрические) совпадают с силовыми линиями кругового магнитного поля, а две другие (лучевые) являются его эквипотенциалями. Аналогичные ячейки с границами произвольной геометрии также конформно отображаются на прямоугольную область плоскости (μ, η), к которой и будут относиться нижеследующие результаты этого раздела.

Метод разделения переменных разработан в [9], правда для близкого по структуре уравнения синус-Гордона. Его несложно модифицировать и для рассматриваемого здесь уравнения.

Запишем решение уравнения (2.5) вначале, как и в [9], в виде

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \alpha_\eta / \alpha_\mu, \quad \alpha_\mu \equiv \alpha(\mu), \quad \alpha_\eta \equiv \alpha(\eta) \tag{5.1}$$

Воспользовавшись представлением $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ и вычисляя $\nabla^2_\mu(2\alpha)$, получим вместо (2.5) уравнение

$$(\alpha_\mu^2 + \alpha_\eta^2)(\alpha''_\mu \alpha_\mu^{-1} - \alpha''_\eta \alpha_\eta^{-1}) + 2(\alpha'_\eta)^2 - 2(\alpha'_\mu)^2 = \alpha_\eta^2 - \alpha_\mu^2 \tag{5.2}$$

Дифференцируя это уравнение по μ и по η раздельно, приходим к двум уравнениям с разделенными переменными

$$\frac{1}{\alpha_\mu \alpha'_\mu}\left(\frac{\alpha''_\mu}{\alpha_\mu}\right)' = \frac{1}{\alpha_\eta \alpha'_\eta}\left(\frac{\alpha''_\eta}{\alpha_\eta}\right) = 4a^2$$

где a – произвольная постоянная. Дважды интегрируя каждое из этих уравнений, получим два уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} (\alpha'_\eta)^2 &= a^2\alpha_\eta^4 + b^2\alpha_\eta^2 + c^2 \\ (\alpha'_\mu)^2 &= a^2\alpha_\mu^4 + (1-b^2)\alpha_\mu^2 + c^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Постоянные интегрирования согласованы друг с другом подстановкой (5.3) в (5.2), поэтому из шести лишь три независимы (a^2, b^2, c^2).

Разделение переменных в уравнении (2.6) происходит аналогичным путем с заменой α на β в (5.1), но приводит просто к смене знака у вторых слагаемых в правых частях (5.3).

Интегрирование уравнений (5.3) относительно α или упомянутых уравнений относительно β дает решение в эллиптических функциях.

Можно положить в (5.1) $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \alpha_\eta\alpha_\mu$. Тогда приходим к уравнениям типа (5.3), но с заменой во втором из них α_μ на α_μ^{-1}. Каждая из форм решения имеет свои преимущества относительно тех или иных граничных условий, что будет ясно из последующего.

Наиболее простое решение в разделенных переменных в форме произведения имеет вид

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\nu_\eta \nu_\mu}\, \operatorname{sn}\left[\frac{2\mu(x,y)}{\Delta\mu} K(\nu_\mu)\right] \operatorname{sn}\left[\frac{2\eta(x,y)}{\Delta\eta} K(\nu_\eta)\right] \tag{5.4}$$

Числа ν_η и ν_μ удовлетворяют характеристическим уравнениям

$$\frac{(1+\nu_\mu^2)}{\Delta\mu^2}K^2(\nu_\mu)+\frac{(1+\nu_\eta^2)}{\Delta\eta^2}K^2(\nu_\eta)=\frac{1}{4\mu_\chi^2},\quad \frac{\nu_\mu}{\Delta\mu^2}K^2(\nu_\mu)=\frac{\nu_\eta}{\Delta\eta^2}K^2(\nu_\eta) \tag{5.5}$$

Решение (5.4) удовлетворяет нулевым граничным условиям по β на сторонах прямоугольника $\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2$, т.е. на границах выполняется условие $\perp\mathbf{H}$. В отсутствие магнитного поля ориентации однородны и во всей области.

Учитывая в (5.5) свойства функции $K(\nu)$, записанные в (4.6), приходим к выводу, что ориентационная деформация носит пороговый характер. Она возникает скачком, когда разности потенциалов $\Delta\mu$ и $\Delta\eta$ удовлетворяют условию

$$\Delta\mu^{-2}+\Delta\eta^{-2}\leqslant(\pi\mu_\chi)^{-2},\quad \Delta\eta=|\eta_2-\eta_1|,\quad \Delta\mu=|\mu_2-\mu_1| \tag{5.6}$$

Знак равенства отвечает критическим значениям $\Delta\mu_t, \Delta\eta_t$. Очевидно, теперь бифуркационной границей является не точка, а окружность радиуса $(\pi\mu_\chi)^{-1}$ в плоскости переменных $(\Delta\mu^{-1}, \Delta\eta^{-1})$.

Пороговый критерий для двумерных деформаций получен в этой работе впервые. В полной мере учтена неоднородность магнитного поля и замкнутость области S.

Следует отметить универсальный характер критерия. Он относится ко всем криволинейным областям, конформно преобразующимся в прямоугольник на плоскости (μ, η). Границы областей задаются уравнениям $\mu(x, y) = \text{const}$, $\eta(x, y) = \text{const}$, где $\mu(x, y)$ и $\eta(x, y)$ – сопряженные потенциалы неоднородного магнитного поля. Конкретизация последних в (5.4) дает в явной форме решение в плоскости (x, y).

Возможны и беспороговые ориентационные деформации, возникающие в результате наложения магнитного поля на предварительно закрученную ориентационную структуру НЖК в рассматриваемом прямоугольнике. Решение наиболее просто записывается через угол α в форме отношения эллиптических косинусов Якоби

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\left[\frac{\nu_\eta^2-\nu_\eta^4}{\nu_\mu^2-\nu_\mu^4}\right]^{1/4}\operatorname{cn}\left[\frac{2\mu(x,y)}{\Delta\mu}K(\nu_\mu)\right]/\operatorname{cn}\left[\frac{2\eta(x,y)}{\Delta\eta}K(\nu_\eta)\right] \tag{5.7}$$

Очевидно, на двух границах прямоугольной области ($\mu = \pm\mu_s$) угол α обращается в нуль, а на двух других ($\eta = \pm\eta_s$) он равен π. Следовательно, внутри области имеется предварительная закрутка. Числа ν_μ, ν_η подчиняются следующим характеристическим уравнениям:

$$\frac{(1-2\nu_\eta^2)}{\Delta\eta^2}K^2(\nu_\eta)+\frac{(1-2\nu_\mu^2)}{\Delta\mu^2}K^2(\nu_\mu)=\frac{1}{4\mu_\chi^2},\quad \frac{\nu_\eta}{\Delta\eta^2}K^2(\nu_\eta)=\frac{\nu_\mu}{\Delta\mu^2}K^2(\nu_\mu) \tag{5.8}$$

В силу конечности величин $K(\nu_\eta)$ и $K(\nu_\mu)$ при $\nu_\eta^2 = \nu_\mu^2 = 1/2$ из первого соотношения следует, что $\Delta\eta = 0$, $\Delta\mu = 0$, т.е. деформации существуют и при нулевых разностях потенциалов. Следовательно, бифуркаций нет, однако появляется нижняя граница в спектре чисел ν_η и ν_μ, равная $\sqrt{1/2}$.

Отметим, что решение (5.4) описывает в пределе двумерный "кинк", сосредоточенный вблизи границ замкнутого объема, так как при $\nu \to 1$ имеем sn $\to$ th. Решение же (5.7) при этом сводится к дельта-функции Якоби [7], сосредоточенной около центра области. Соответствующую локализованную ориентационную деформацию, связанную с предварительной закруткой, можно рассматривать как специфический дефект ориентационного поля. Поскольку (5.4) и (5.7) построены из периодических функций, их продолжение за пределы рассматриваемых областей дает в плоскости (η, μ) регулярную "решетку" локализованных дефектов. В плоскости же (x, y) получается ортогональная криволинейная сетка.

6. Еще более общие квазипериодические решения построены в последнее время в ряде работ, например [10, 11], где использован так называемый метод конечнозонного интегрирования. Решение выражается через обобщенные тэта-функции двух и более комплексных аргументов $Z_n(x, y)$ ($n = 1, 2,...$). Последние определяются двумя и более основными периодами и при их несоразмерности оказываются квазипериодическими [10]. Достаточно общие решения уравнения синус-Гельмгольца и синус-Гордона строятся на многолистной римановой поверхности и ее параметры входят в решение. Поэтому, несмотря на успехи теории (установлены условия вещественности, гладкости и сингулярности решений [11]), пользоваться подобными решениями для вычислений пока еще затруднительно. Требуется, в частности, вычисление римановой матрицы периодов многолистной поверхности и конкретизация последней. Относительно простые случаи, которые возникают при анализе двухзонных ($n = 2$) решений, когда тэта-функции зависят от двух периодов. Как показано в [10, 11], в этом случае риманова поверхность может быть произвольной вместе с матрицей периодов. Последняя может быть задана в общем виде как симметричная недиагонализирующаяся матрица второго ранга с положительной вещественной частью.

Наиболее простое квазипериодическое решение, выражающееся через классические (однозонные) тэта-функции $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, получено в виде [10]

$$\alpha(\mu,\eta)=\frac{1}{i}\ln\frac{\vartheta_3(Z_1)\vartheta_3(Z_2)-\vartheta_2(Z_1)\vartheta_2(Z_2)}{\vartheta_3(Z_1)\vartheta_3(Z_2)+\vartheta_2(Z_1)\vartheta_2(Z_2)},\quad Z_k=\frac{z_k}{\kappa_k} \tag{6.1}$$

Аргументы $z_1 = i\mu u_1 - \eta\upsilon_1$ и $z_2 = i\mu u_2 - \eta\upsilon_2$ включают два периода υ_1 и υ_2. Если эти числа соразмерны, то решение становится периодической функцией. Тогда тэта-функции ϑ_1, ϑ_2, ϑ_2 выражаются известным образом [7] через косинус и дельта-функцию Якоби. Переходя от (6.1) к $\mathrm{tg}(\alpha/2)$, получим одну из формул разд. 5. Квазипериодические же решения более общего вида пока еще ждут своего применения в граничных задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94–01–010118).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oseen C.W.* Beitrage zur Theorie der anisotropen Flussigkeiten // Arkiv mat., astron., fys. Ser. A. 1925, V. 19. № 9. P. 1–19.
2. *Frank F.C.* On the theory of liquid crystals // Disc. Farad. Soc. 1958. V. 25. № 1. P. 19–28.
3. *Аэро Э.Л., Захаров А.В.* Упругие деформации жидких кристаллов, их устойчивость и применение в технике // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 3. С. 163–237.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
5. *Аэро Э.Л.* Теория локальных деформаций нематических жидких кристаллов вблизи неоднородно намагниченной поверхности // Вопросы физики формообразования и фазовых превращений. Калинин: Изд. Калининск. ун-та, 1986. С. 68–76.
6. *Блинов Л.М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978, 384 с.
7. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968, 344 с.
8. *Булыгин А.Н., Шалтыко Л.Г.* Упругие деформации нематических жидкокристаллических сред // Кристаллография. 1983. Т. 28. № 2. С. 405–408.
9. *Лэм Д.Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
10. *Дубровин Б.А., Натанзон С.М.* Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 2. С. 27–43.
11. *Бабич М.В.* Гладкость вещественных конечнозонных решений уравнений, связанных с уравнением sine-Gordon // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 1. С. 57–66.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 26.X.1994