УДК 532.5:534.1

© 1996 г. В.М. Бабич

О ДИФРАКЦИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА УЗКОМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ КОНУСЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

При дифракции на абсолютно жестком конусе произвольной формы плоской акустической волны или волны, порожденной точечным источником колебаний, возникает волна со сферическим фронтом, расходящимся от вершины конуса как из центра. Для узкого конуса при некоторых ограничениях на направления, в которых ведется наблюдение, строятся явные приближенные формулы для диаграммы направленности этой волны, обобщающие формулы, полученные [1, 2] для кругового конуса.

1. Постановка задачи. Пусть абсолютно жесткий конус Ξ имеет вершину C, совпадающую с началом координат. Предполагаем, что волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца $(\Delta + k^2)\, u = 0$, где u – потенциал скорости, и на конус падает волна u_i, распространяющаяся либо из точечного источника, находящегося в точке $\mathbf{r}_0 = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3)$, тогда

$$u_i = (4\pi R)^{-1} \exp(ikR), \qquad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \qquad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \tag{1.1}$$

либо плоская волна

$$u_i = \exp(-ik(\omega_0, r)), \qquad |\omega_0| = 1 \tag{1.2}$$

Единичный вектор – ω_0 указывает направление, в котором распространяется плоская волна. Будем полагать, что в первом случае, когда имеет место формула (1.1), вектор $\mathbf{r}_0$ тоже параллелен вектору ω_0, точнее

$$\mathbf{r}_0 = \omega_0 r_0, \qquad r_0 = |r_0|$$

Пусть u_s – волна, рассеянная конусом, тогда потенциал скорости $u = u_i + u_s$ должен удовлетворять условию непротекания

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\partial\Xi} = 0 \tag{1.3}$$

$\partial\Xi$ – поверхность конуса Ξ, $\partial/\partial\zeta$ – дифференцирование по нормали, уравнению Гельмгольца, условию Мейкснера конечности звуковой энергии в окрестности C и соответствующей форме условий излучения.

Как известно, u_i порождает среди прочих волн сферическую волну G_{diff}, расходящуюся от вершины конуса C как из центра. Для G_{diff} имеют место формулы

$$G_{\text{diff}}^{(1)} = (2krr_0)^{-1} \exp(ik(r + r_0))\, f(\omega, \omega_0) + O((kr)^{-2}) \tag{1.4}$$

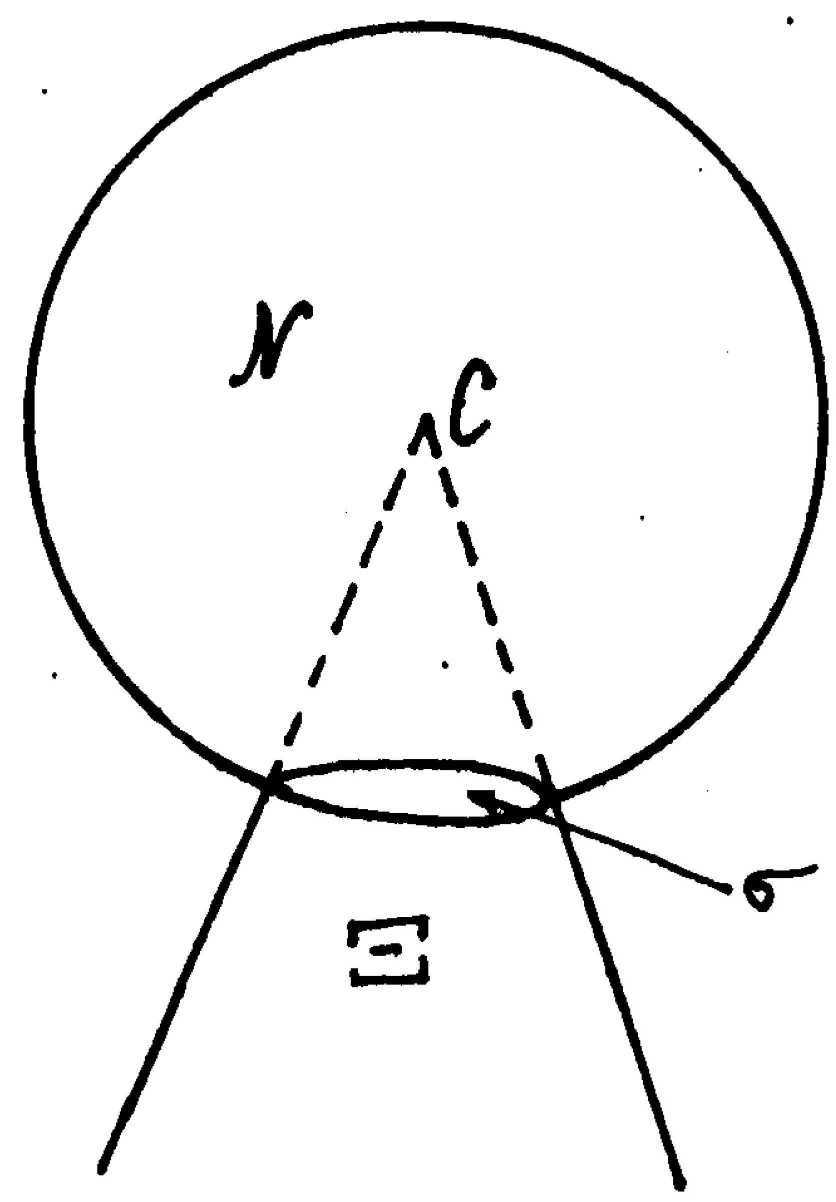
$$G_{\text{diff}}^{(2)} = 2\pi(kr)^{-1} \exp(ikr)\, f(\omega, \omega_0) + O((kr)^{-2})$$

в случаях (1.1) и (1.2) соответственно. Здесь $\omega(|\omega|=1)$ – единичный вектор, в направлении которого ведется наблюдение (т.е. радиус-вектор точки наблюдения $\mathbf{r}=r\omega$, $kr \gg 1$). Зная диаграмму направленности $f(\omega, \omega_0)$, можно найти $G^{(j)}_{\text{diff}}$ ($j=1, 2$) в первом приближении. Цель работы – вывод приближенной формулы для $f(\omega, \omega_0)$ в случае узкого конуса.

2. Формула В.П. Смышляева для $f(\omega, \omega_0)$. Была выведена общая формула [3][1]

$$f(\omega,\omega_0)=\frac{i}{\pi}\int_{\gamma} e^{-i\nu\pi}g(\omega,\omega_0,\nu)\,\nu\,d\nu \tag{2.1}$$

Обозначения здесь, близкие к обозначениям работы [3], нуждаются в разъяснениях. Пусть S^2 – единичная сфера с центром в C. Пусть N – часть S^2, не принадлежащая конусу Ξ, т.е. $N=S^2\setminus\Xi$ (см. фигуру), g – функция Грина оператора Гельмгольца для области N, точнее, g – решение задачи



$$\left(\Delta_S+\nu^2-\frac{1}{4}\right)g=\delta(\omega-\omega_0),\qquad \left.\frac{\partial g}{\partial m}\right|_{\partial N}=0 \tag{2.2}$$

$$\Delta_S=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Дифференцирование проводится по координатам точки ω, ∂N – граница области $N\subset S^2$, $\omega_0\in N$ – фиксированная точка, $\partial/\partial m$ – дифференцирование вдоль сферы по нормали к ∂N.

Интегрирование в (2.1) проводится по контуру γ в комплексной плоскости ν, охватывающему все полюса функции g. Функция $f(\omega, \omega_0)$ имеет особенности, соответствующие нарушениям регулярности поля лучей геометрической оптики. Таковы, например, точки, удовлетворяющие условию

$$\min_{s\in\partial N}(\text{dist}(\omega,s)+\text{dist}(s,\omega_0))=\pi \tag{2.3}$$

($\text{dist}(a, b)$ – расстояние между a, b ($a, b\in S^2$) вдоль сферы S^2). Условию (2.3) удовлетворяет направление ω, вдоль которого фронт волны, отраженной поверхностью конуса, касается фронта волны, рассеянной вершиной конуса.

Будем рассматривать существенный для приложений случай, когда вместо равенства (2.3) имеет место неравенство

$$\min_{s\in\partial N}[\text{dist}(\omega,s)+\text{dist}(s,\omega_0)]>\pi \tag{2.4}$$

В этом случае формулу (2.1) можно заменить [3] на

$$f(\omega,\omega_0)=-i/\pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\tau}g_r(\omega,\omega_0)\,\tau\,d\tau \tag{2.5}$$

$$g=g_0+g_r=-\frac{1}{4\,\text{ch}\,\pi\tau}P_{-1/2+i\tau}(-\cos\hat{\theta})+g_r \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial m}g_r\right|_{\partial N}=-\left.\frac{\partial}{\partial m}g_0\right|_{\partial N},\qquad \left(\Delta_s-\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)\right)g_r=0 \tag{2.7}$$

---

[1] См. также: *Smyshlyaev V.P.* On the diffraction of waves by cones at high frequencies: LOMI preprint E-9-89. Leningrad, 1989. 49 p.

Здесь $g_r(\omega, \omega_0)$ – так называемая отраженная часть функции Грина, P_ν – функция Лежандра, g_0 – функция Грина оператора $\Delta_s - (\tau^2 + 1/4)$ для случая, когда $\partial N = \varnothing$ и $N = S^2$, т.е. g_0 – функция Грина для всей сферы.

Отметим, что был предложен [4] другой подход к задаче дифракции волн на произвольном конусе.

3. О внешней и внутренней областях. Если диаметр области, вырезанной конусом Ξ из S^2 (т.е. области $S^2 \setminus \bar{N}$), мал, то конус Ξ будем называть узким. Пусть этот диаметр имеет порядок ε, где ε – малый параметр, и поэтому саму область $S^2 \setminus \bar{N}$ обозначим σ_ε. Предположим, что точка $O \in \sigma_\varepsilon$. Проведя в точке O касательную плоскость $\mathbf{R}^2$ и спроектировав σ_ε на $\mathbf{R}^2$, получим некоторую область $\kappa_\varepsilon \subset \mathbf{R}^2$. Пусть x_1, x_2, x_3 – координатная система в $\mathbf{R}^3$ с началом в точке O, а ось x_3 направлена внутрь сферы. Уравнение сферы будет иметь, очевидно, вид $x_3 = 1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, и вблизи точки O переменные x_1, x_2 можно рассматривать как координаты на сфере.

Предположим, что граница $\partial\kappa_\varepsilon$ области κ_ε "мала", точнее, точки $x_1, x_2 \in \partial\kappa_\varepsilon$ получаются подобным преобразованием из точек X_1, X_2 фиксированной замкнутой кривой $\partial\kappa$:

$$\partial\kappa_\varepsilon = \{(x_1, x_2): x_i = \varepsilon X_i, \quad i = 1,2, \quad (X_1, X_2) \in \partial\kappa\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \ll 1$$

т.е. $\partial\kappa_\varepsilon$ – результат подобного преобразования фиксированной кривой $\partial\kappa$ с коэффициентом подобия ε.

Далее найдем, пользуясь известной методикой [5], главный член асимптотики g_r при $\varepsilon \to 0$. Подставляя его в формулу (2.5), получим приближенное выражение для $f(\omega, \omega_0)$ через элементарные функции. Для нахождения асимптотики g_r принципиальное значение имеет правильный выбор вида асимптотического разложения вблизи $\partial\kappa_\varepsilon$ (внутренняя область) и вне малой окрестности $\partial\kappa_\varepsilon$ (внешняя область).

Пусть E_1, E_2, α, β $(0 < \alpha < \beta < 1)$ – некоторые положительные постоянные. При достаточно малой ε имеем: $E_1\varepsilon^\alpha > E_2\varepsilon^\beta$.

Уточним понятие внешней области: это область, которая получится, если из N удалить все точки, проектирующиеся в круг

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant E_2\varepsilon^\beta \tag{3.1}$$

В силу того что ε – малый параметр, а координаты кривой $\partial\kappa_\varepsilon$ имеют порядок ε, кривая $\partial\kappa_\varepsilon$ лежит внутри круга (3.1).

Внутренняя область – это область на сфере, получающаяся, если из точек сферы, проектирующихся в открытый круг

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < E_1\varepsilon^\alpha \tag{3.2}$$

удалить точки замкнутой области $\bar{\kappa}_\varepsilon$.

Уравнение и краевые условия во внутренней области удобно рассматривать в растянутых координатах, для чего надо и уравнение, и краевое условие (2.7) записать в координатах x_1, x_2.

Начнем с уравнения. Рассматривая x_1, x_2 как координаты на сфере S^2, найдем сначала квадрат дифференциала длины произвольной кривой на S^2:

$$\sum_{h=1}^{3} (dx_h)^2 = \sum_{i=1}^{2} (dx_i)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} dx_j \right)^2 := a_{ij} dx_i dx_j \tag{3.3}$$

$$a_{ij} = \frac{x_i x_j}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \delta_{ij} \tag{3.4}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор Δ_S (см. (2.7)) в координатах x_1, x_2 имеет вид

$$\Delta_S = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \qquad a = \det \| a_{ij} \| \tag{3.5}$$

где $\| a^{ij} \|$ – матрица, обратная $\| a_{ij} \|$.

Уравнение (2.7) в растянутых координатах $X_i = x_i/\varepsilon$ ($i = 1, 2$) запишется в виде

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{A}} \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sqrt{A}\, A^{ij} \frac{\partial}{\partial X_j} \right) - \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \right] g_r = 0 \tag{3.6}$$

$$A = \det(I + O(\varepsilon^2)) = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \sqrt{A}\, A^{ij} = \delta_{ij} + O(\varepsilon^2)$$

Здесь I – единичная матрица, $O(\varepsilon^2)$ – различные алгебраические выражения от X_i и ε, имеющие при $X_i = O(1)$ и $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже ε^2.

Краевое условие на границе $\partial\kappa_\varepsilon$ имеет в координатах x_i вид

$$\frac{\partial g_r}{\partial x_i} \cos \hat{n} x_j a^{ij} = -\frac{\partial g_0}{\partial x_i} \cos \hat{n} x_j a^{ij} \tag{3.7}$$

Здесь $\cos \hat{n} x_j$ ($j = 1, 2$) – направляющие косинусы обычной евклидовой нормали к кривой $\partial\kappa_\varepsilon$ на плоскости $\mathbf{R}^2$.

Вводя растянутые координаты X_i, получим, что краевое условие (3.7) должно выполняться на кривой $\partial\kappa$, уже не зависящей от малого параметра ε. Оно будет иметь вид

$$A^{ij} \frac{\partial g_r}{\partial X_i} \cos n \hat{X}_j = -A^{ij} \frac{\partial g_0}{\partial X_i} \cos n \hat{X}_j \tag{3.8}$$

4. Внешнее и внутреннее разложения. Во внешней области будем искать разложение g_r в виде ряда по мультиполям. Пусть g_0 – фундаментальное решение, соответствующее оператору $\Delta_S - (\tau^2 + 1/4)$:

$$g_0 = g_0(\omega, \omega_2) = -(4 \operatorname{ch} \pi\tau)^{-1} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\theta_1), \qquad \theta_1 = \operatorname{dist}(\omega, \omega_1)$$

причем $\omega_1 = \omega_1(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2)$ принадлежит кругу (3.2).

Внешнее разложение будем искать в виде

$$g_r = \varepsilon B_1 g_0 + \varepsilon^2 \left(B_2 g_0 + B_{2j} \frac{\partial g_0}{\partial \overset{0}{x}_j} \right) + \varepsilon^3 \left(B_3 g_0 + B_{3j} \frac{\partial g_0}{\partial \overset{0}{x}_j} + B_{3ij} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \overset{0}{x}_i \partial \overset{0}{x}_j} \right) + \ldots \tag{4.1}$$

Аргументы функции g_0 и ее производных – точки $\omega, O \in S^2$, $B_1, B_2, B_{2j}, \ldots$ коэффициенты, подлежащие определению. Функции $\partial g_0/\partial \overset{0}{x}_j$, $\partial^2 g_0/\partial \overset{0}{x}_i \partial \overset{0}{x}_j$ (дифференцирование проводится по координатам точки O) естественно назвать мультиполями.

Для внутреннего разложения положим

$$g_r = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(X_1, X_2)\, \varepsilon^j, \quad X_i = \frac{x_i}{\varepsilon} \tag{4.2}$$

и будем сращивать асимптотические разложения (4.1), (4.2) в области (см. разд. 3):

$$E_2 \varepsilon^\beta < r < E_1 \varepsilon^\alpha, \quad E_j = \text{const}, \quad 0 < \alpha < \beta < 1 \tag{4.3}$$

Перейдем к построению членов рядов (4.1) и (4.2), используя известный метод [5].

Подставим формально ряд (4.2) в уравнение (2.7), считая, что оператор Δ_S записан в переменных X_i (см. (3.6)). Приравнивая нулю члены порядка $1/\varepsilon$, получим

$$\Delta U_1 = 0, \quad \Delta = \partial^2 / \partial X_1^2 + \partial^2 / \partial X_2^2 \tag{4.4}$$

В области (4.3) $R \equiv \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \to \infty$, а $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что разложения (4.1) и (4.2) в области (4.3) должны быть асимптотически эквивалентны и что $g_0 \sim (2\pi)^{-1}\ln r$ при $\omega \to 0$, получим при $R \to \infty$

$$U_1 \sim (2\pi)^{-1} B_1 \ln R\varepsilon + O(R^{-1}) \tag{4.5}$$

Краевое условие (2.7) в координатах X_i записывается в виде

$$\left.\frac{1}{\varepsilon} A^{ij} \frac{\partial g_r}{\partial X_j} \cos\hat{n}\, x_i\right|_{\partial\kappa} = \left.-\frac{1}{\varepsilon} A^{ij} \frac{\partial g_0}{\partial X_j} \cos\hat{n}\, x_i\right|_{\partial\kappa} \tag{4.6}$$

где n – нормаль к кривой $\partial\kappa$. Будем для определенности считать, что n – внешняя нормаль по отношению к конечной области $\kappa \subset \mathbf{R}^2$, ограниченной кривой $\partial\kappa$. Заменим функцию g_0 ее разложением в ряд Тейлора в окрестности точки O:

$$g_0 = D_0 + D_i x_i + 1/2 D_{ij} x_i x_j + \ldots, \quad D_0 = g_0(\omega_0, O), \quad D_i = (\partial g_0 / \partial x_i)_O \ldots \tag{4.7}$$

Учитывая соотношения (4.2), (4.6) и (3.7), получим

$$\partial U_1 / \partial n\big|_{\partial\kappa} = -D_i \partial X_i / \partial n \tag{4.8}$$

т.е. U_1 – решение задачи Неймана (4.4), (4.5), (4.8).

Пользуясь тем, что интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой кривой не меняется при деформации этой кривой, докажем, что для произвольной окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, где R столь велико, что κ целиком лежит в круге $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, имеет место равенство

$$\int\limits_{x_1^2 + x_2^2 = R^2} \frac{\partial U_1}{\partial n} d\Sigma = 0 \tag{4.9}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $R \to \infty$ найдем, что $B_1 = 0$.

Асимптотика при $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \to \infty$ решения задачи Неймана

$$\Delta V_j = 0, \quad \partial V_j / \partial n\big|_{\partial\kappa} = -\partial X_j / \partial n\big|_{\partial\kappa}, \quad V_j \underset{R\to\infty}{=} O(1/R) \tag{4.10}$$

имеет, очевидно, вид

$$V_j = d_{jh} \partial \ln R / \partial X_h + O(1/R^2) \tag{4.11}$$

где d_{jh} – некоторые коэффициенты. Формула (4.8) теперь дает

$$U_1 = D_i d_{ih} \partial \ln R / \partial X_h + O(1/R^2) \tag{4.12}$$

Сравнивая (4.12) с разложением (4.1) в кольце (4.3), получаем

$$-\frac{1}{2\pi} B_{2j} \partial \ln r / \partial x_j \sim D_i d_{ih} \partial \ln R / \partial X_h, \quad B_{2j} = -2\pi D_i d_{ij} \tag{4.13}$$

Матрица $\| d_{ij} \|$ является интересной глобальной характеристикой области к, о чем речь пойдет ниже.

Перейдем к нахождению коэффициента B_2 и функции U_2 (см. (4.1), (4.2)). Для U_2 опять имеем уравнение Лапласа. Равенство (4.6) и разложение (4.7) приводят к краевому условию

$$\partial U_2 / \partial n \big|_{\partial\kappa} = - D_{ij} X_i \partial X_j / \partial n \tag{4.14}$$

Поведение U_2 на бесконечности находится из асимптотической эквивалентности разложений (4.1) и (4.2) в кольце (4.3). Получаем

$$U_2 = (2\pi)^{-1} B_2 \ln r + O(1/R^2); \qquad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad r = R\varepsilon \tag{4.15}$$

Заметим, что в силу гармоничности U_2 имеем

$$\int\limits_{\partial\kappa} \frac{\partial U_2}{\partial n} ds = \int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial U_2}{\partial n} d\Sigma_R$$

Переходя здесь к пределу при $R \to \infty$ и учитывая соотношения (4.15), (4.16), получим

$$-\int\limits_{\partial\kappa} D_{ij} X_i \frac{\partial X_j}{\partial n} ds = B_2$$

Пользуясь интегральной формулой Грина, это соотношение можно преобразовать к виду

$$B_2 = -\int\limits_{\kappa} dX_1 dX_2 \delta_{ij} D_{ij} = -(D_{11} + D_{22}) \,\mathrm{mes}\kappa \tag{4.16}$$

где mesк – площадь области к. Формулы $B_1 = 0$ (4.13) и (4.16) дают искомые выражения для главных членов разложения (4.1).

Величины d_{ij} (см. (4.13)) образуют тензор, который рассматривался [6] в связи с другими проблемами. Известно, что матрица этого тензора $\| d_{ij} \|$ симметричная и положительно определенная. При подобном растяжении (или сжатии) области к с коэффициентом пропорциональности ε компоненты тензора d_{ij} умножаются на ε^2, что позволяет "убрать" параметр ε из окончательной формулы для g_r:

$$g_r \cong [-(D_{11} + D_{22}) \,\mathrm{mes}\,\kappa_\varepsilon g_0(\omega, O) - 2\pi D_i d_{ij}(\kappa_\varepsilon) \partial g_0 / \partial x_i^0] + \ldots \tag{4.17}$$

$$D_i = \partial g_0(\omega_0, O) / \partial x_i^0, \qquad D_{ii} = \partial^2 g_0(\omega_0, O) / \partial x_i^{02}$$

(дифференцирование проводится по координатам точки O).

Выражение (4.17) симметрично по точкам ω_0 и ω в силу симметричности матрицы $\| d_{ij}(\kappa_\varepsilon) \|$ и равенств

$$D_{11} + D_{22} = \Delta_S g_0 = (\tau^2 + 1/4) \, g_0(\omega, O)$$

Симметричности главной части внешнего разложения g_r следовало ожидать, так как функция g_r симметрична по ω_0 и ω.

5. Выражение для диаграммы направленности. Выражение (4.1), где g_r имеет вид (4.17), дает искомую формулу

$$f(\omega, \omega_0) \cong -\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\tau} \left[-(D_{11} + D_{22}) \,\mathrm{mes}\,\kappa_\varepsilon g_0 - 2\pi D_i d_{ij} \frac{\partial g_0}{\partial x_j^0} \right] \tau \, d\tau \tag{5.1}$$

$$g_0(\omega, O) = -\frac{1}{4 \,\mathrm{ch}\, \pi\tau} P_{-1/2 + i\tau}(-\cos\theta), \qquad \theta = \mathrm{dist}(\omega, O) \tag{5.2}$$

Здесь D_i и D_{ii} имеют вид (4.20).

Подынтегральное выражение довольно сложно зависит от τ, однако при помощи равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\pi\tau\, P_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta)\, P_{-1/2+i\tau}(-\cos\theta')\,\pi\tau\, d\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} = -\frac{2}{\cos\theta+\cos\theta'} \tag{5.3}$$

верного при $\theta + \theta' > \pi$, $\theta \geqslant 0$, $\theta' \geqslant 0$, – все интегралы, входящие в (5.1), можно вычислить явно [7].

Получим

$$f(\omega,\omega_0) \cong -\frac{i}{4\pi^2}\operatorname{mes}\kappa_\varepsilon \frac{1+\cos\theta\cos\theta'}{(\cos\theta+\cos\theta')^3} - \frac{i}{2\pi} d_{ij}(\kappa_\varepsilon)\, l_i l'_j \frac{\sin\theta\sin\theta'}{(\cos\theta+\cos\theta')^3} \tag{5.4}$$

$\theta = \operatorname{dist}(\omega, O)$, $\theta' = \operatorname{dist}(\omega_0, O)$, l_1, l_2 (соответственно l'_1, l'_2) – компоненты в системе координат x_1, x_2 единичного вектора, касающегося в точке O дуги большого круга ωO (соответственно $\omega_0 O$). Предполагается, что на дуге ωO (соответственно $\omega_0 O$) направление выбрано от ω к O (соответственно от ω_0 к O). Формула (5.4) представляет собой основной результат данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Felsen L.B.* Back scattering from wide-angle and narrow-angle cones // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. № 2. P. 138–151.
2. *Felsen L.B.* Plane-wave scattering by small-angles cones // IRE Trans. Ser. Antennas Propagat. 1957. V. 5. № 1. P. 121–129.
3. *Smyshlyaev V.P.* Diffraction by conical surfaces at high frequencies // Wave motion. 1990. V. 12. № 4. P. 329–339.
4. *Боровиков В.А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 455 с.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Наука, 1962. 336 с.
7. *Felsen L.B.* Some definite integrals involving conical functions // J. Math. and Phys. 1956. V. 35. № 2. P. 177–178.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
2.III.1994