УДК 539.3:534.1

© 1996 г. А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК ЖУГЕ НА УДАРНОЙ АДИАБАТЕ

Рассматриваются автомодельные решения одномерных нестационарных уравнений гиперболического типа, выражающих законы сохранения. В нелинейной теории упругости обнаружен [1–4] ряд особенностей: отсутствие единственности, отсутствие непрерывной зависимости решения от параметров, быстрые перестройки волны одного типа с излучением волны другого типа. Показано, что все эти явления имеют общий характер и связаны с наличием на ударной адиабате "чужой" точки Жуге, в которой скорость ударной волны некоторого типа равна характеристической скорости за ударной волной другого, соседнего, более медленного типа. Таким образом, для гиперболических систем уравнений, выражающих законы сохранения, имеется возможность по некоторым свойствам ударной адиабаты судить о важнейших свойствах автомодельных решений в целом.

1. Предварительные сведения. Будем рассматривать гиперболические системы уравнений, выражающие законы сохранения [5] в случае двух независимых переменных x и t

$$\partial f_i(u_k)/\partial t+\partial g_i(u_k)/\partial x=0, \quad [g_i]-W[f_i]=0;\ i,k=1,2,\ldots,n \tag{1.1}$$

Здесь $u_k(x, t)$ – неизвестные функции, а f_i и g_i – заданные функции от u_k, конкретизирующие систему уравнений. Предполагается, что дифференциальные уравнения описывают гладкие решения, а конечные уравнения представляют полную систему соотношений на разрыве, где W – скорость разрыва, $[g_i]=g_i(u_k^+)-g_i(u_k^-)$ – "скачок" функции g_i, причем u_k^- относятся к состоянию перед разрывом, а u_k^+ – к состоянию за ним.

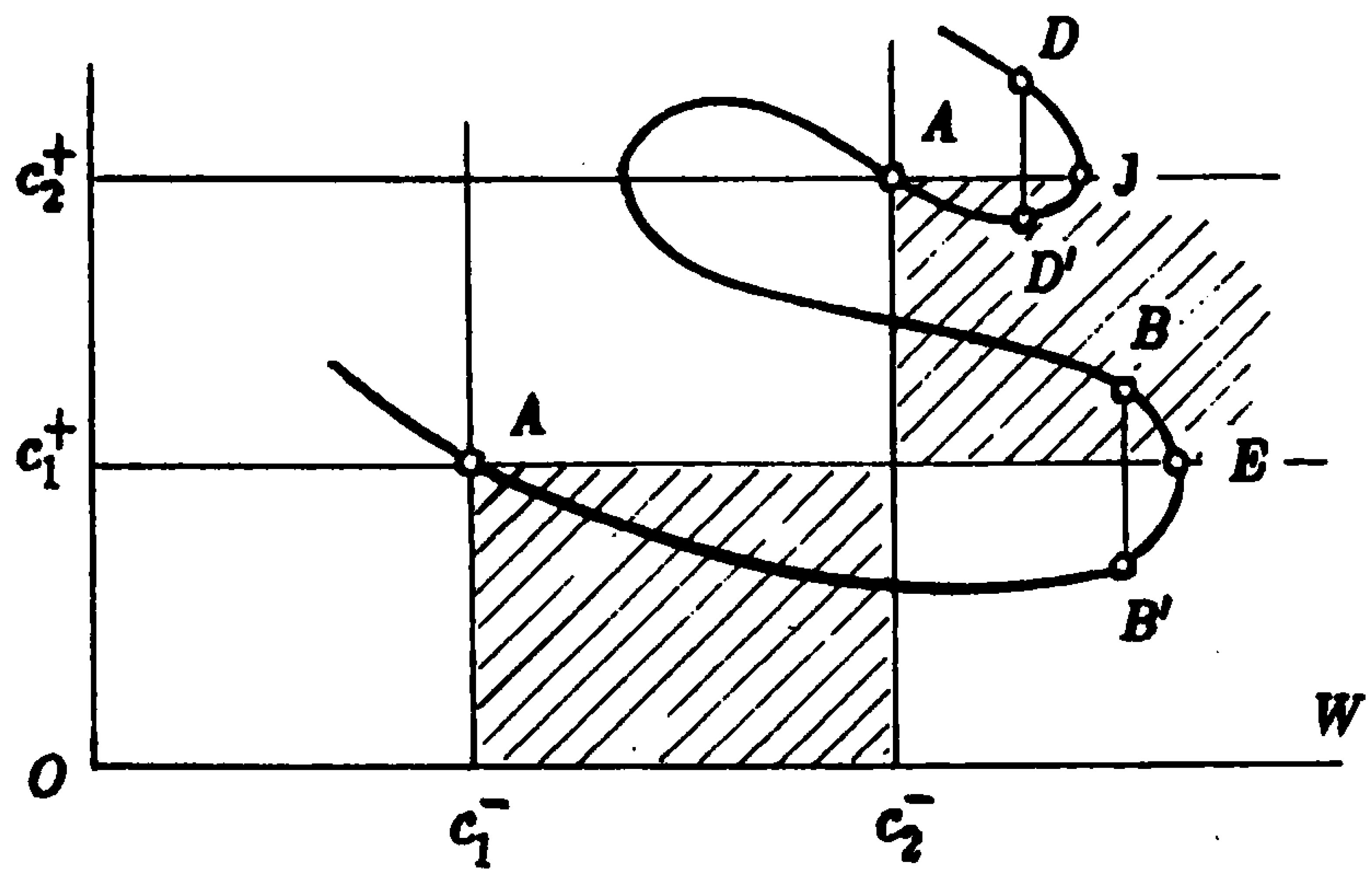
Условия эволюционности разрывов k-го типа ($k = 1, 2,..., n$) имеют вид [5–6]

$$c_k^- \leqslant W \leqslant c_{k+1}^-, \quad c_{k-1}^+ \leqslant W \leqslant c_k^+ \tag{1.2}$$

где c_j ($j = 1, 2,... n$) – скорости характеристик системы (1.1) и положено $c_0^+ = -\infty$, $c_{n+1}^- = \infty$. На ударной адиабате, уравнение которой в общем случае может быть получено разрешением соотношений на разрыве (1.1) при заданных u_k^- в виде $u_i^+ = u_i^+(W)$, условия (1.2) выделяют "эволюционные отрезки". На концах отрезков выполняются "условия Жуге", выражающие равенство скорости разрыва W какой-нибудь из характеристических скоростей за разрывом или перед ним (в последнем случае будем говорить "переднее" условие Жуге).

Неравенства (1.2) и ударную адиабату часто представляют на диаграмме эволюционности, где по горизонтальной оси отложены в некотором масштабе характеристические скорости c_k^- и текущее значение W на ударной адиабате, а по вертикальной оси – величины c_i^+ и W без сохранения масштабов, но с сохранением непрерывности изменения W на ударной адиабате и знаков неравенств (1.2).

На фиг. 1 в качестве примера изображена такая диаграмма для квазипоперечных волн в упругом теле с малой анизотропией [7, 8]. Эволюционные отрезки ударной адиабаты лежат в заштрихованных "эволюционных" прямоугольниках. Точки A соответствуют в пространстве u_i начальной точке ударной адиабаты $u_i = u_i^-$, в



Фиг. 1

которой пересекаются n ветвей ударной адиабаты. Эти ветви оказываются разнесенными на диаграмме эволюционности, в связи с чем точка A изображается там в виде n точек с координатами $W = c_k^-$, $W = c_k^+$ $k = 1, 2,\ldots n$. Поведение ударной адиабаты на диаграмме в окрестности каждой из точек A следует из равенства, полученного [5] для малых разрывов

$$W = (c_k^- + c_k^+)/2 \tag{1.3}$$

причем ошибка в (1.3) не превосходит по порядку величины квадрата скачка величин в разрыве. Из (1.3) следует, что во всех точках A на диаграмме эволюционности ударная адиабата имеет отрицательный наклон. Таким образом, на диаграмме, а также в пространстве u_i на каждой ветви ударной адиабаты к начальной точке примыкает только один эволюционный отрезок. В противоположном направлении к нему примыкает с сохранением касательной и вектора кривизны интегральная кривая (ИК) соответствующей волны Римана (ВР), на которой характеристическая скорость убывает при удалении от начальной точки [5].

Как было показано в [9, 10], из выполнения условия Жуге $W = c_j^+$ в некоторой точке ударной адиабаты следует наличие экстремума W в этой точке и обратно. Кроме того, показано, что ударная адиабата в пространстве u_i касается в точке Жуге ИК ВР, соответствующей c_j.

2. О решениях автомодельной задачи с ударной волной, близкой к "своей" точке Жуге. Будем рассматривать автомодельную задачу о решении в виде системы волн, зависящих от $\xi = x/t$. Состояние $u_i = U_i$ "перед" системой волн – при больших ξ будет считаться известным и заданным при исследовании зависимости решения от состояния $u_i = u_i^*$ "за" системой волн – при больших отрицательных ξ. Разумеется, заданные и определяемые параметры задачи легко поменять местами, считая заданными значения u_i при $\xi = -\infty$ и определяем значения u_i при $\xi = \infty$.

Решение автомодельной задачи может состоять из разрывов, расположенных на плоскости x, t на линиях x/t = const, и автомодельных, или центрированных, ВР, в которых характеристическая скорость убывает при убывании ξ, что фиксирует направление движения по интегральной кривой.

Рассмотрим сначала решение автомодельной задачи, когда один из разрывов близок к "своей" точке Жуге, соответствующей на диаграмме эволюционности пересечению ударной адиабаты с верхней границей эволюционного прямоугольника (на фиг. 1 такой точкой является точка J). Как было упомянуто, в пространстве u_i эволюционный отрезок ударной адиабаты, соответствующий разрывам k-го типа, касается в точке Жуге ИК ВР, соответствующей c_k.

В случае общего положения продолжением эволюционного отрезка ударной адиабаты, расположенным вблизи ее неэволюционной части, служит часть ИК ВР, на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге.

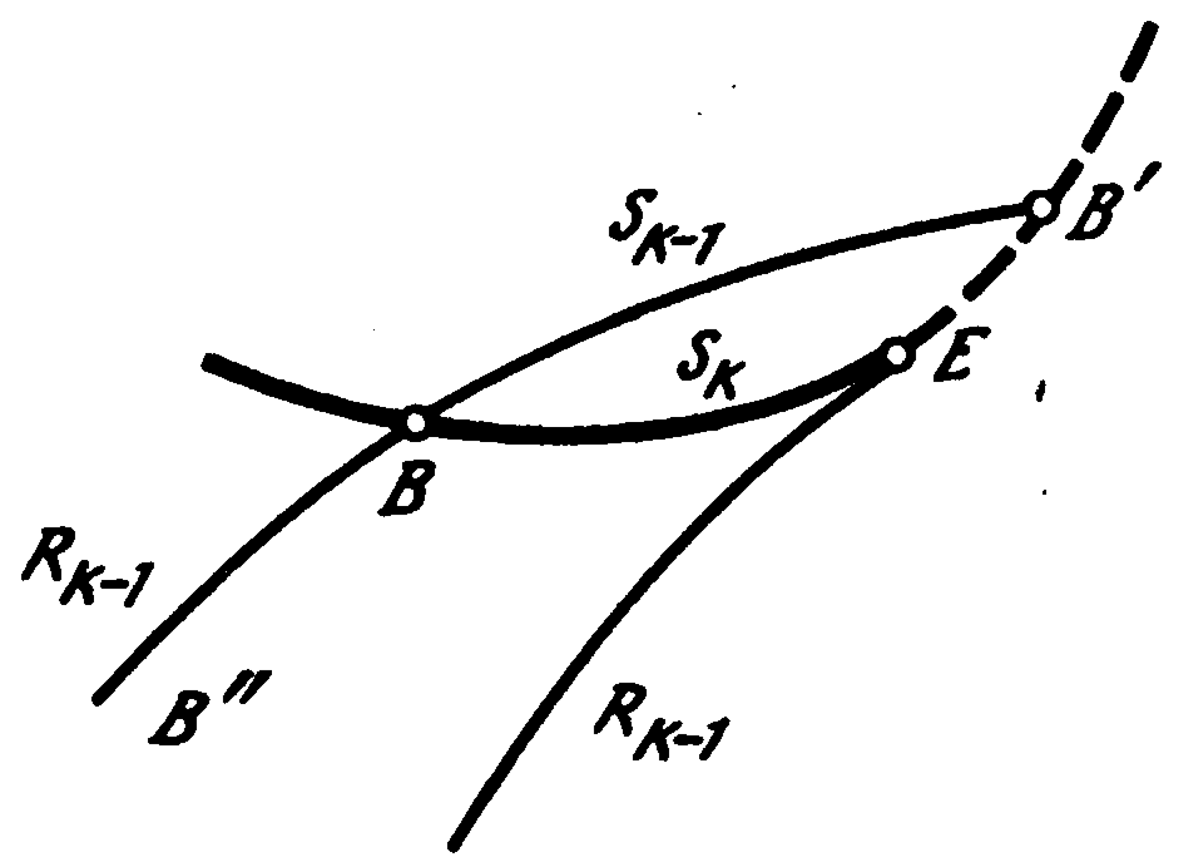
Действительно, в силу экстремальности W в точке Жуге на ударной адиабате найдутся две сколь угодно близкие точки, лежащие по разные стороны от точки Жуге, соответствующие одной и той же скорости W (на фиг. 1 это точки D и D'). Очевидно, что эти точки могут представлять начальную и конечную точки некоторого разрыва, распространяющегося со скоростью W, на котором выполнены соотношения на разрыве (1.1).

Как было упомянуто в разд. 1, в малом эволюционном разрыве $c_k^- < W < c_k^+$. Это соответствует на диаграмме эволюционности скачку сверху вниз через горизонтальную прямую, соответствующую $W = c_k^+$. В рассматриваемом случае точка D может соответствовать состоянию перед, а точка D' – состоянию за эволюционным разрывом. В пространстве u_i, так же как на диаграмме эволюционности, скачок совершается с неэволюционного отрезка ударной адиабаты на эволюционный. Если провести через точку D' ИК ВР, то, согласно результатам [5], упомянутым в разд. 1, она пройдет около точки D на расстоянии порядка ε^3, где ε – расстояние между точками D и D' в пространстве u_i. При этом в направлении от D к D' характеристическая скорость убывает на ИК. Устремляя точку D к точке Жуге J, получаем объявленное ранее утверждение, что в точке Жуге эволюционный отрезок ударной адиабаты гладким образом продолжается за "свою" точку Жуге ИК ВР, на которой характеристическая скорость убывает. Именно эта часть ИК используется при построении автомодельных решений и будет в дальнейшем называться интегральной кривой автомодельной волны Римана.

Такое взаимное расположение упомянутых кривых не препятствует непрерывной зависимости решения автомодельной задачи в окрестности точки Жуге своего типа (такой, как точка J на фиг. 1) от параметров, задающих состояние за автомодельной системой волн, распространяющихся по заданному состоянию впереди. Упомянутая непрерывная зависимость очевидна в случае, когда разрыв с рассматриваемой точкой Жуге – самый быстрый в системе волн, дающих решение рассматриваемой задачи. При малом изменении состояния за системой волн в общем случае решение будет содержать либо эволюционный разрыв рассматриваемого быстрого типа, близкий к точке Жуге, либо быстрый разрыв Жуге со следующей за ним быстрой автомодельной ВР. Если измененное состояние за системой волн не лежит на эволюционном отрезке ударной адиабаты или на продолжающей ее части ИК ВР, то это приводит к появлению других (отличных от быстрой) волн малой амплитуды. При этом задача всегда оказывается разрешимой, поскольку система векторов, касательных к кривым, задающим изменение величин в этих волнах, и касательная к ударной адиабате в точке Жуге образуют невырожденную систему векторов, представляющую полную систему собственных векторов, отвечающих малым возмущениям относительно состояния, задаваемого точкой Жуге.

В случае, когда рассматриваемая точка Жуге не соответствует самой быстрой волне, разрешимость задачи об определении амплитуд волн выяснить сложнее. Однако в задачах об упругих волнах в слабоанизотропных средах разрешимость этой задачи была доказана [1], и, вообще, разрешимость задачи об определении амплитуд волн соответствует случаю общего положения.

3. О решениях автомодельной задачи при наличии на ударной адиабате "чужой" точки Жуге. В случае наличия "чужой" точки Жуге, т.е. когда для разрыва k-го типа выполняется равенство $W = c_{k-1}^{+}$, ударная адиабата покидает эволюционный прямо-



Фиг. 2

угольник на диаграмме, пересекая его нижнюю границу (на фиг. 1 такой точкой Жуге является точка E). В этом случае в пространстве переменных u_i отрезок ударной адиабаты, соответствующей k-м ударным волнам, касается в точке Жуге ИК $(k-1)$-й ВР (соответствующей c_{k-1}). Рассуждая подобно тому, как это делалось в разд. 2, получим, что на не эволюционном продолжении ударной адиабаты характеристическая скорость c_{k-1} растет при удалении от точки Жуге. Это означает, что в пространстве u_i эволюционная часть ударной адиабаты, соответствующая k-разрывам, вместе с автомодельной частью ИК $(k-1)$-й ВР (на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге, а сама волна расширяется с ростом t) имеют в точке Жуге точку возврата (см. фиг. 2, где буквами S_k и R_{k-1} обозначены соответствующие части ударной адиабаты и автомодельной ВР, а штриховой линией – неэволюционный отрезок ударной адиабаты).

Если в малой окрестности точки Жуге E в пространстве u_i заменить ударную адиабату S_k и ВР R_{k-1} их совпадающей касательной, то видно, что изменение параметров, характеризующих две упомянутые волны, приводит к движению вдоль одного и того же луча. Из этого следует, что при вариации амплитуд n различных волн, имеющихся в распоряжении при построении решения, точка u_i^* пробегает не всю n-мерную окрестность точки Жуге, а гиперповерхность $n-1$ измерения. Это показывает несуществование решения в принятом "линейном" приближении.

Для более аккуратного построения близких автомодельных решений заметим, что каждая точка (например, B на фиг. 2), принадлежащая отрезку эволюционности S_k ударной адиабаты, соответствует в силу своего положения, состоянию за k-м разрывом, за которым может следовать или $(k-1)$-й эволюционный разрыв S_{k-1} или непрерывная автомодельная $(k-1)$-я ВР R_{k-1}. В пространстве u_i состояние за упомянутыми волнами принадлежит кривой, составленной из эволюционной части BB' ударной адиабаты S_{k-1} и служащей продолжением ее ИК кривой BB'' ВР R_{k-1}. При движении точки B по S_k составная кривая $B''BB'$ заметет некоторую двумерную поверхность, для точек которой можно построить решение, состоящее из последовательности k-го эволюционного разрыва и $(k-1)$-й волны (непрерывной или разрыва), близкое к решению, соответствующему точке Жуге E.

Покажем, что это – поверхность с краем, по другую сторону которого автомодельного решения описанного типа не существует. Найдем кривую, представляющую собой этот край.

Если по состоянию B за эволюционным разрывом k-го типа, движущимся со скоростью W_B, следует достаточно малый эволюционный разрыв $(k-1)$-го типа, то его скорость меньше, чем W_B, поскольку за разрывом k-го типа, согласно (1.2) $W_B - c_{k-1}^{+} > 0$. Если, не меняя состояние B, увеличивать величину второго скачка, то его скорость будет расти, и когда точка, представляющая состояние за этим разрывом, придет в положение B' (фиг. 1), скорость этого $(k-1)$-го разрыва станет равной W_B. В физическом пространстве разрывы k-го и $(k-1)$-го типов сольются, образуя один неэволюционный разрыв, соответствующий точке B'. Дальнейшее увеличение величины скачка $(k-1)$-го типа не имеет физического смысла и не соответствует решениям автомодельной задачи, так как $(k-1)$-й разрыв не может обогнать k-й. Это приводит к тому, что в пространстве переменных u_i область, где существует решение, состоящее из двух разрывов k-го и $(k-1)$-го типов, $S_k S_{k-1}$, представляет некоторую поверхность, ограниченную кривой, состоящей из точек B и B', т.е. ударной адиабатой. По другую сторону от эволюционного отрезка ударной адиабаты S_k, как было сказано выше, можно построить автомодельное решение, состоящее из разрыва k-го типа S_k и ВР $(k-1)$-го типа R_{k-1}, которое будем обозначать $S_k R_{k-1}$. Двумерная поверхность, соответствующая решениям $S_k S_{k-1}$ и $S_k R_{k-1}$, ограничена кривой, которая состоит из неэволюционной части ударной адиабаты (EB' на фиг. 2) и ИК ВР (EC), касающейся ударной адиабаты в точке E.

По другую сторону от упомянутого края двумерной поверхности автомодельное решение может не существовать, а если оно существует, то должно иметь другое строение. Как показывает рассмотрение волн в анизотропном упругом теле [1, 2] и, как следует из общих соображений, возможны два случая.

1^0. Возможен случай, когда область, в которой существует другое решение, ограничена тем же краем, так что решение в окрестности точки E существует и единственно. Для этого необходимо, чтобы второе решение, так же как и рассмотренное выше первое, было генетически связано с неэволюционной частью ударной адиабаты (EB' на фиг. 2). А это возможно, если имеется другая, отличающаяся от рассмотренной выше, комбинация из двух разрывов, которые сливаются в один при приближении к линии, представляющей неэволюционный отрезок ударной адиабаты. Именно такая ситуация имеет место в теории упругости, когда $W_J > W_E$ [1, 4]. В этом случае при скоростях, чуть меньших W_E, имеются две различных быстрых квазипоперечных ударных волны, соответствующих верхнему эволюционному прямоугольнику (фиг. 1), которые вместе с медленными волнами могут составить две комбинации, соответствующие неэволюционному разрыву, близкому к разрыву, соответствующему точке E [1, 2, 11].

Отметим, что автомодельные решения, получающиеся в результате различного распада неэволюционной ударной волны, хотя не близки между собой, если оценивать их близость по максимуму модуля разности решений, но остаются все же близкими между собой, если использовать другие меры их различия, учитывающие величину области, где эти решения сильно различаются.

2^0. Рассмотрим теперь случай, когда неэволюционная часть ударной адиабаты, примыкающая к точке Жуге, такова, что существует только одна (рассмотренная выше) комбинация из двух волн, слияние которых соответствует неэволюционным разрывам. В теории упругости [1, 4] это имеет место в случае $W_J < W_E$, изображенном на фиг. 1. Тогда если автомодельное решение имеет место для всех точек окрестности точки E, то второе решение не будучи прямо связано с ударной адиабатой в окрестности точки E, в общем случае не близко к рассмотренному выше решению и граница области, где это решение имеет место, в общем случае не проходит близко к точке E. Это означает, что в половине окрестности точки E имеются два не близких между собой автомодельных решения. Если менять параметры, определяющие первое из этих решений, то можно пересечь границу области существования этого решения, после чего решение рассматриваемого типа перестанет существовать и должно мгновенно распасться на другую автомодельную систему волн. Эти явления были ранее обнаружены при исследовании упругих волн [3]. Как видно из изложенного, эти явления связаны с некоторыми особенностями строения ударной адиабаты, которые могут иметь место в различных физических ситуациях.

Все утверждения, доказанные для автомодельных решений с аргументом x/t, верны также и для стационарных автомодельных решений с аргументом $\varphi = \mathrm{arctg}\, y/x$. Ударную поляру при этом следует отобразить на диаграмму эволюционности. В точках Жуге будет достигать экстремума величина φ. Точки ударной поляры, соответствующие одному и тому же значению φ, могут представлять состояния по разные стороны от разрыва, положение которого определяется этим значением φ. Аналогично предыдущему непрерывная зависимость автомодельного решения от параметров будет отсутствовать, если на ударной поляре существует "чужая" точка Жуге. Очевидно, что в этом случае и на ударной адиабате с соответствующим образом подобранными начальными условиями будет присутствовать чужая точка Жуге. Поэтому обсуждавшиеся в работе явления – отсутствие непрерывной зависимости решения от параметров и неединственность могут иметь место для автомодельных решений с аргументом $\varphi = \mathrm{arctg}\, y/x$ только в тех средах, в которых эти явления имеют место для автомодельных решений с аргументом x/t.

Авторы благодарят А.А. Бармина и Е.А. Пушкаря за обсуждение работы и замечания.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (MDM 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* О распаде произвольного разрыва в упругой среде // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1007–1011.
3. *Куликовский А.Г.* Особенности поведения нелинейных квазипоперечных волн в упругой среде при малой анизотропии // Труды МИАН им. В.А. Стеклова АН СССР. 1989. Т. 186. С. 132–139.
4. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* О некоторых свойствах ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 793–798.
5. *Lax P.* Hyperbolic systems of conservation laws II Comm. // Pure and Appl. Math. V. 10. No. 4. pp. 537–566.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
7. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840.
8. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Об уравнениях, описывающих распространение квазипоперечных волн в слабоанизотропном теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
9. *Hapyga A.* On the solution to the Riemann problem for arbitrary hyperbolic system of conservation laws // Publ. Inst. Pol. Ac. Sci. 1976. No. A-1(98). P. 1–123.
10. *Куликовский А.Г.* О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР МЖГ. 1979. No. 2. С. 184–186.

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1994