УДК 533

 С.В. Хабиров

ПОДМОДЕЛЬ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

В рамках программы ПОДМОДЕЛИ рассматривается инвариантная подмодель, построенная на подалгебре из суммы вращения и переноса [1]. Проводится групповая классификация, вычисляется оптимальная система подалгебр, которая сравнивается с оптимальной системой основной модели. Кроме этого, система уравнений подмодели приводится к симметрическому гиперболическому виду. Для нее рассматриваются простые решения с давлением и плотностью, зависящими только от времени. Для простых решений вычисляются характеристики, характеристический коноид, траектории, сильные разрывы. Выводятся необходимые условия существования решения без особенности на оси.

1. Уравнения подмодели и их симметризация. Рассматривается система уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах

$$\rho d\mathbf{U} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad A^{-1}dp + U_x + V_r + r^{-1}W_\theta = -r^{-1}V \tag{1.1}$$

$$d\rho = \rho(U_x + V_r + r^{-1}W_\theta + r^{-1}V) = 0 \quad \text{или} \quad dS = 0$$

$$(\nabla = (\partial_x, \partial_r, r^{-1}\partial_\theta), \quad \mathbf{f} = (0, \rho W^2, -\rho VW), \quad A = \rho c^2, \quad c^2 = \partial f/\partial\rho$$
$$d = \partial_t + U\partial_x + U\partial_r + r^{-1}\partial_\theta)$$

где $\mathbf{U} = (U, V, W)$ – скорость, p – давление, ρ – плотность, S – энтропия, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния. Система (1.1) с произвольной функцией $A(p, \rho)$ допускает 11- и параметрическую непрерывную группу преобразований с алгеброй Ли L_{11} [1].

Подмодель винтовых движений строится как инвариантное решение по одномерной подалгебре $H = \{X_1 + X_7\} \subset L_{11}$, где $X_1 = \partial_x$ – оператор переноса по переменной x, $X_7 = \partial_\theta$ – оператор вращения вокруг оси x, записанный в цилиндрических переменных x, r, θ, которые связаны с декартовыми координатами равенствами

$$x_1 = x, \quad x_2 = y = r\cos\theta, \quad x_3 = z = r\sin\theta$$
$$u_1 = U, \quad u_2 = V\cos\theta - W\sin\theta, \quad u_3 = V\sin\theta + W\cos\theta \tag{1.2}$$

Инвариантное решение разыскивается в виде

$$U = U(t, r, s), \quad V = V(t, r, s), \quad W = W(t, r, s)$$
$$p = p(t, r, s), \quad \rho = \rho(t, r, s), \quad s = x - \theta$$

Равенства $r = \text{const}$, $s = \text{const}$ соответствуют винтовой линии.

Заменой инвариантов

$$u = V, \quad \upsilon = U - r^{-1}W, \quad w = W \tag{1.3}$$

фактор система приводится к эволюционному типу

$$\rho(\mathbf{u}_t + u\mathbf{u}_r + \upsilon\mathbf{u}_s) + p_r = \rho\mathbf{a}, \quad A^{-1}(p_t + up_r + \upsilon p_s) + u_r + \upsilon_s = -r^{-1}u$$

$$\rho_t + u\rho_r + \upsilon\rho_s + \rho(u_r + \upsilon_s) = -r^{-1}u\rho \quad \text{или} \quad S_t + uS_r + \upsilon S_s = 0 \tag{1.4}$$

$$(\mathbf{u} = (u, \upsilon, w), \quad \mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) = (r^{-1}w^2, 2r^{-2}uw, -r^{-1}uw))$$

Для изучения корректности задачи Коши для системы (1.4) необходимо привести ее к симметрическому виду ([2], с. 70). Для этого выбирается уравнение для энтропии и делается линейная замена скоростей по формулам

$$\upsilon^i = b^i_j u^j (u^1 = u,\ u^2 = \upsilon,\ u^3 = w), \quad u^j = c^j_i \upsilon^i, \quad b^i_j c^j_k = \delta^i_k$$

Система (1.4) переходит в систему со следующей матричной записью:

$$A^t \mathbf{q}_t + A^1 \mathbf{q}_r + A^2 \mathbf{q}_s = \mathbf{D}, \quad \mathbf{q} = (\upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3, p, S)^T \tag{1.5}$$

$$A^t = \operatorname{diag}\{\rho, \rho, \rho, A^{-1}, 1\}, \quad \mathbf{D} = (d_1, d_2, d_3, d_4, 0)^T$$

$$A^k = \begin{Vmatrix} \rho c^k_i \upsilon^i & 0 & 0 & b^1_k b_k + b^1_3 b_{k+2} & 0 \\ 0 & \rho c^k_i \upsilon^i & 0 & b^2_k b_k + b^2_3 b_{k+2} & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^k_i \upsilon^i & b^3_k b_k + b^3_3 b_{k+2} & 0 \\ c^k_1 & c^k_2 & c^k_3 & A^{-1} c^k_i \upsilon^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^k_i \upsilon^i \end{Vmatrix}, \quad k = 1, 2$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1 + r^{-2}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -r^{-1}, \quad d_4 = -ur^{-1} - \upsilon^i (c^1_{ir} + c^2_{is})$$

$$d_i = \rho b^i_j a^i + \rho c^j_k \upsilon^k (\partial_t + c^n_m \upsilon^m \partial_{x^n}) b^i_j, \quad x^1 = r, \quad x^2 = s$$

Для симметричности матриц A^k требуется выполнение шести равенств

$$c^k_i = b^i_k b_k + b^i_3 b_{k+2}, \quad k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

для определения девяти элементов матрицы $B = (b^i_j)$.

Если ввести углы α_{ij} между векторами $\mathbf{b}_i = (b^1_i, b^2_i, b^3_i)^T$ и $\mathbf{b}_j$, то из (1.6) следует

$$\alpha_{13} = \alpha_{12} = \pi / 2; \quad |\mathbf{b}_1| = 1, \quad |\mathbf{b}_2| = r(1 + r^2)^{-1/2} \sin^{-1} \alpha_{23}, \quad |\mathbf{b}_3| = (1 + r^2)^{1/2} \operatorname{ctg} \alpha_{23}$$

Задание угла α_{23} и направлений векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_3$ (или $\mathbf{b}_2$) с условиями $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 =$ $= \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = 0$ определяет матрицу B.

Например, пусть

$$\alpha_{23} = \pi / 4, \quad \mathbf{b}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_3 = (0, 0, (1 + r^2)^{1/2})^T$$

$$\mathbf{b}_2 = (0, r(1 + r^2)^{-1/2},\ r(1 + r^2)^{-1/2})^T$$

Тогда

$$c^1_1 = 1, \quad c^1_2 = c^1_3 = c^2_1 = c^2_3 = 0, \quad c^2_2 = (1 + r^{-2})^{1/2}$$

При этом

$$\mathbf{D} = (\beta r^2 \rho (\upsilon^2 - \upsilon^3)^2, \quad \beta \rho \upsilon^1 (\upsilon^2 + 2\upsilon^3), \quad \beta \rho \upsilon^1 (2\upsilon^2 (1 + r^2) + \upsilon^3 (1 - 2r^2)), \quad -r^{-1} \upsilon^1, 0)^T$$

$$\beta = r^{-1} (1 + r^2)^{-1}$$

2. Простые решения. Система уравнений (1.4) походит на систему уравнений плоской газодинамики, для которой постоянное решение является простым решением, зависящим от пяти произвольных постоянных и заданным на всем пространстве для всех времен. Решение с аналогичными свойствами хотелось бы иметь и для системы (1.4). Предлагается искать решение с давлением и плотностью, зависящими только от времени $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$. В этом случае (1.4) становится переопределенной системой уравнений

$$A(p, \rho) d\rho = \rho dp$$

$$\mathbf{u}_t + u \mathbf{u}_r + \upsilon \mathbf{u}_s = \mathbf{a}, \quad u_r + \upsilon_s + r^{-1} u + \rho^{-1} \rho' = 0 \tag{2.1}$$

Первое уравнение системы определяет функцию $p(t)$, если задана функция $\rho(t)$. Система (2.1) задает изэнтропические течения и ее необходимо исследовать на совместность. Сначала уравнения системы интегрируются в лагранжевых переменных.

Замечание. Система (2.1) наследует симметрии основной системы уравнений газовой динамики, фактор нормализатора алгебры H в алгебре L_{11}: ∂_t, ∂_s, $t\partial_s + \partial_\upsilon$. Кроме этого допускаются операторы растяжения $r\partial_r + u\partial_u + w\partial_w$, $\rho\partial_\rho$.

Переход к лагранжевым переменным задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_t r = u(t, r, s), \quad \partial_t s = \upsilon(t, r, s); \quad r|_{t=0} = \xi, \quad s|_{t=0} = \eta \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.2) $r = r(t, \xi, \eta)$, $s = s(t, \xi, \eta)$ задает переход к переменным ξ, η (t – параметр), если якобиан преобразования отличен от нуля $r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi \neq 0$.

В лагранжевых переменных все уравнения системы (2.1) интегрируются по переменной t:

$$r^2 = \xi^2 + \alpha^2 t^2 + 2\alpha_1 t, \quad s = \eta + \beta t - \operatorname{arctg}[\gamma t(\alpha_1 t + \xi^2)^{-1}] \tag{2.3}$$

$$\alpha^2\xi^2 = \gamma^2 + \alpha_1^2 \tag{2.4}$$

$$u = r^{-1}(\alpha^2 t + \alpha_1), \quad \upsilon = \beta - \gamma r^{-2}, \quad w = \gamma r^{-1} \tag{2.5}$$

$$r(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi) = \rho^{-1} J \tag{2.6}$$

Величины $\alpha \neq 0$, α_1, $\gamma \neq 0$, β, $J \neq 0$ зависят от $\xi \neq 0$, η. В (2.6) начальные данные не учитываются, так как в дальнейшем они будут меняться. Подставив (2.3) в (2.6), получим равенство, из которого определится рациональный вид функции

$$\rho = P_3(t) / P_5(t), \quad P_3 = S_2 t^2 + S_1 t + S_0, \quad P_5 = T_5 t^5 + T_4 t^4 + T_3 t^3 + T_2 t^2 + T_1 t + T_0$$

С такой функцией $\rho(t)$ равенство (2.6) имеет свободную переменную t, входящую рациональным образом. Приравнивание нулю коэффициентов при различных степенях переменной t приводит к восьми уравнениям для функций α, α_1, β и постоянных T_i, S_i.

В множестве возможных решений вводится эквивалентность с помощью преобразований, допускаемых системой (2.1), отмеченных в замечании. Они образуют группу G_5 (инвариантные переменные не указаны): 1) $t' = t + t_0$; 2) $s' = s + s_0$; 3) $s' = s + ct$, $\upsilon' = \upsilon + c$; 4) $r' = ar$, $u' = au$, $w' = aw$; 5) $\rho' = b\rho$. Эти преобразования продолжаются на коэффициенты решения (2.3):

$$\alpha' = a^{-1}\alpha, \quad \alpha_1' = a^{-2}\alpha^2 t_0 + \alpha_1 a^{-2}, \quad \xi'^2 = a^{-2}\xi^2 + \alpha^2 a^{-2} t_0^2 + 2\alpha_1 a^{-2} t_0$$

$$J' = Ja^{-2}b^{-1}, \quad \beta' = \beta - c, \quad \gamma' = \gamma a^{-2}$$

$$\eta' = \eta - s_0 + (\beta - c)t_0 - \operatorname{arctg}[\gamma t_0(\alpha_1 t_0 + \xi^2)^{-1}]$$

причем равенство (2.4) остается инвариантным. Параметры преобразований t_0, s_0, a, b, c являются функциями от ξ, η, при этом начальные данные задачи (2.2) изменяются. Продолженные преобразования образуют группу G_5, алгебра Ли которой задается базисом операторов

$$\partial_\eta, \ \partial_\beta, \ J\partial_J, \ \alpha^2\partial_{\alpha_1} + \alpha_1\xi^{-1}\partial_\xi + (\beta - \gamma\xi^{-2})\partial_\eta, \quad \alpha\partial_\alpha + 2\alpha_1\partial_{\alpha_1} + \xi\partial_\xi + 2\gamma\partial_\gamma$$

Инварианты группы G_5 таковы: $I = \gamma\alpha^{-2}$, $(\alpha_1^2 - \alpha^2\xi^2)\gamma^{-2} = -1$. Значение второго инваранта взято в силу равенства (2.4).

Вводятся новые параметры решения $\zeta = \alpha_1\alpha^{-2}, I$:

$$r^2 = \alpha^2[I^2 + (t+\zeta)^2], \quad s = \eta + \beta t - \operatorname{arctg}[It(\zeta^2 + \zeta t + I^2)^{-1}] \tag{2.7}$$

$$u = \alpha^2 r^{-1}(t+\zeta), \quad \upsilon = \beta - I\alpha^2 r^{-2}, \quad w = I\alpha^2 r^{-1} \tag{2.8}$$

Преобразования эквивалентности неинвариантных параметров принимают вид

$$\eta' = \eta - s_0 + (\beta - c)t_0 - \operatorname{arctg}[It_0(\zeta t_0 + \zeta^2 + I^2)^{-1}], \quad \alpha' = \alpha a^{-1}$$

$$\zeta' = \zeta + t_0 a^{-1}, \quad \beta' = \beta - c$$

В пространстве параметров α, ζ, β, η группа действует транзитивно, поэтому любые значения параметров можно получить из фиксированных значений, например из $\alpha = 1$, $\zeta = 0$, $\beta = 0$, $\eta = 0$.

Формулы (2.7) задают переход к лагранжевым переменным, если не все параметры I, α, ζ, β, η фиксированы. Если величина параметра I произвольна, то можно фиксировать три параметра из α, ζ, β, η, причем тремя способами.

Случай $\zeta = \beta = \eta = 0$ дает решение

$$\rho = t^{-1}, \quad u = rt^{-1}\sin^2 s, \quad \upsilon = t^{-1}\sin s\cos s, \quad w = -rt^{-1}\sin s\cos s \tag{2.9}$$

Случай $\alpha = 1$, $\beta = \eta = 0$ после переноса по t дает решение

$$\rho = 1, \quad u = tr^{-1}, \quad \upsilon = -r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2}, \quad w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{1/2} \tag{2.10}$$

инвариантное относительно оператора ∂_y.

Случай $\alpha = 1$, $\zeta = \eta = 0$ дает решение

$$\rho = t^{-1}, \quad u = tr^{-1} \tag{2.11}$$

$$\upsilon = st^{-1} - r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2} + t^{-1}\operatorname{arctg}[t(r^2 - t^2)^{-1/2}]$$

$$w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{1/2}$$

инвариантное относительно оператора $t\partial_y + \partial_\upsilon$.

Случай $\alpha = 1$, $\zeta = \beta = 0$ приводит к (2.10).

Пусть I фиксированная функция параметров α, ζ, β, η. Тогда только два параметра можно фиксировать.

Случай $\alpha = 1$, $\zeta = 0$, $I = I(\beta, f)$ приводит к решению

$$\rho = (T_1 t + T_0)^{-1}, \quad u = tr^{-1}$$

$$\upsilon = -r^{-2}(r^2 - t^2)^{1/2} + (T_1 t + T_0)^{-1} T_1\{s + \operatorname{arctg}[t(r^2 - t^2)^{-1/2}] + g(r^2 - t^2)\}$$

$$w = r^{-1}(r^2 - t^2)^{1/2}$$

где $g(\lambda)$ – произвольная функция.

Замечание. Величина $I = I(T_0\beta + T_1 f)$ выражается через произвольную функцию, поэтому ее можно взять в качестве независимого параметра лагранжевой замены и тем самым привести решение к ранее рассмотренным формулам. Это замечание относится к случаям, когда величина I определяется с функциональным произволом.

Случай $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $I = I(\zeta, f)$ приводит к решению

$$\rho = (T_1 t + T_0)^{-1}, \quad u = (t+\zeta)r^{-1}, \quad \upsilon = -r^2[r^2 - (t+\zeta)^2]^{1/2}$$

$$w = r^{-1}[r^2 - (t+\zeta)^2]^{1/2}$$

Функция $\zeta = \zeta(t, r, s)$ определяется из равенства

$$g(K) = s + \operatorname{arctg}[t(r^2 - (t+\zeta)^2)^{1/2})(r^2 - t^2 + t\zeta)^{-1}] +$$

$$+ T_0 T_1^{1/2} \int [K + 2T_0\zeta(K + 2T_0\zeta - T_1\zeta)^{1/2}]^{-1} \zeta d\zeta$$

где $g(K)$ – произвольная функция, $K = T_1(r^2 - t^2 - 2t\zeta) - 2T_0\zeta$.

Случай $\alpha = 1, \eta = 0, I = I(\zeta, \beta)$ дает решение

$$\rho = t^{-1}(t + T_0)^{-1}, \quad u = (t+\zeta)r^{-1}$$

$$\upsilon = st^{-1} - r^{-2}[r^2 - (t+\zeta)^2]^{1/2} + t^{-1}\operatorname{arctg}[t(r^2 - (t+\zeta)^2)^{1/2}(r^2 - t^2 - t\xi)^{-1}]$$

$$w = r^{-1}[r^2 - (t+\zeta)^2]^{1/2}$$

Функция $\zeta = \zeta(t, r, s)$ определяется из равенства

$$g(R^2) = st^{-1} + t^{-1} \operatorname{arctg}[t(R^2 - (\zeta - T_0)^2)^{1/2})(R^2 - T_0^2 + t\zeta + 2T_0\zeta)^{-1}] +$$

$$+ \frac{1}{2} R^{-1} T_0^{-2} (T_0 + R)^2 \operatorname{arctg}[(T_0 - R)(T_0 + R)^{-1}(R + T_0 - \zeta)^{1/2}(R - T_0 + \zeta)^{-1/2}] +$$

$$+ \frac{1}{2} T_0^{-1} \arccos[R^{-1}(\zeta - T_0)]$$

где $g(R^2)$ – произвольная функция, $R^2 = r^2 - t^2 + T_0^2 - 2\zeta(t + T_0)$.

Случай $\zeta = \beta = 0, I = I(\alpha, f)$ приводит к решению

$$\rho = (t^2 + T_0)^{-1}, \quad u = t(r^2 + I_0)r^{-1}(t^2 + T_0)^{-1} \qquad (2.12)$$

$$\upsilon = -r^{-2}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0 r^2 - I_0 t^2)^{1/2}(t^2 + T_0)^{-1}$$

$$w = r^{-1}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0 r^2 - I_0 t^2)^{1/2}(t^2 + T_0)^{-1}$$

Случай $\zeta = \eta = 0, I = I(\alpha, \beta)$ приводит к решению

$$\rho = t^{-1}(t^2 + \tau^2)^{-1}, \quad u = tr(I^2 + t^2)^{-1}$$

$$\upsilon = st^{-1} + t^{-1} \operatorname{arctg}(tI^{-1}) - I(I^2 + t^2)^{-1}, \quad w = rI(I^2 + t^2)^{-1}$$

Функция $I = I(t, r, s)$ определяется из равенства

$$(I - \tau)(I + \tau)^{-1} \exp[2\tau(st^{-1} + t^{-1} \operatorname{arctg}(tI^{-1}))] = g(r^2(I^2 - \tau^2)(I^2 + \tau^2)^{-1})$$

где τ – произвольная постоянная, $g(\lambda)$ – произвольная функция.

Случай $\beta = \eta = 0, I = I(\alpha, \zeta)$ приводит к решению

$$\rho = t^{-1}(T_1 t + T_0)^{-1}, \quad u = r(t+\zeta)[I^2 + (t+\zeta)^2]^{-1}$$

$$\upsilon = -I[I^2 + (t+\zeta)^2]^{-1}, \quad w = Ir[I^2 + (t+\zeta)^2]^{-1}$$

где $\zeta = -\frac{1}{2}t \pm (\frac{1}{4}t^2 - I^2 - It \operatorname{ctg} s)^{1/2}$, а функция $I = I(t, r, s)$ определяется с функциональным произволом из дифференциального уравнения

$$T_1 \zeta \alpha I_\alpha + [T_1(I^2 - \zeta^2) + T_0\zeta] I_\zeta = I(T_0 - 2T_1\zeta)$$

Остается рассмотреть возможность $w = 0$ в (2.5). Решение системы (2.1) в лагранжевых переменных принимает вид:

$$r = \alpha t + \xi, \quad s = \beta t + \eta; \quad u = \alpha, \quad \upsilon = \beta, \quad w = 0$$

Преобразования 1)–5), продолженные на коэффициенты, образуют транзитивную группу

$$\alpha' = \alpha a^{-1}, \quad \beta' = \beta - c, \quad \xi' = a^{-1}(\xi + \alpha t_0), \quad \eta' = \eta + t_0(\beta - c) - s_0, \quad J' = Jb^{-1}a^{-2}$$

Этими преобразованиями можно фиксировать все коэффициенты $\alpha = 1, \xi = \beta = \eta = 0, J = 1$. В лагранжевой замене два параметра должны оставаться произвольными. Получаются лишь следующие непротиворечивые случаи.

Случай $\beta = \xi = 0$:

$$\rho = t^{-2}, \quad u = rt^{-1}, \quad \upsilon = w = 0 \tag{2.13}$$

Случай $\eta = \xi = 0$:

$$\rho = t^{-3}, \quad u = rt^{-1}, \quad \upsilon = st^{-1}, \quad w = 0 \tag{2.14}$$

Итак, решения системы (2.1), допускающие лагранжеву замену, сводятся преобразованиями эквивалентности к простейшим решениям (2.9)–(2.14). Решения (2.9)–(2.12) допускают увеличение постоянных параметров до пяти преобразованиями допускаемой группы 1)–5). Явная формула для давления получается для политропного газа $A = \gamma p$ из первого уравнения системы (2.1): $p = B\rho^{-\gamma}$.

$$(2.9) \Rightarrow u = r(t+t_0)^{-1}\sin^2(s - \upsilon_0 t - s_0) \tag{2.15}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \tfrac{1}{2}(t+t_0)^{-1}\sin 2(s - \upsilon_0 t - s_0)$$

$$w = -\tfrac{1}{2}r(t+t_0)^{-1}\sin 2(s - \upsilon_0 t - s_0), \quad \rho = \rho_0(t+t_0)^{-1}, \quad p = p_0(t+t_0)^{-\gamma}$$

$$(2.10) \Rightarrow u = w_0^2 r^{-1}(t+t_0), \quad \upsilon = \upsilon_0 - w_0 r^{-2}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2} \tag{2.16}$$

$$w = w_0 r^{-1}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2}, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0$$

$$(2.11) \Rightarrow u = w_0^2 r^{-1}(t+t_0) \tag{2.17}$$

$$\upsilon = (s+s_0)(t+t_0)^{-1} - w_0 r^{-2}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2} +$$

$$+(t+t_0)^{-1}\operatorname{arctg}\{w_0(t+t_0)[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{-1/2}\}$$

$$w = w_0 r^{-1}[r^2 - w_0^2(t+t_0)^2]^{1/2}, \quad \rho = \rho_0(t+t_0)^{-1}, \quad p = p_0(t+t_0)^{-\gamma}$$

$$(2.12) \Rightarrow u = r^{-1}t(r^2 + I_0)(t^2 + T_0)^{-1} \tag{2.18}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 - r^{-2}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0 r^2 - I_0 t^2)^{1/2}(t^2 + T_0)^{-1}$$

$$w = r^{-1}(r^2 + I_0)^{1/2}(T_0 r^2 - I_0 t^2)^{1/2}(t^2 + T_0)^{-1}$$

$$\rho = \rho_0(t^2 + T_0)^{-1}, \quad p = p_0(t^2 + T_0)^{-\gamma}$$

Решение (2.18) при $I_0 = 0$ после переноса $t_1 = t + \upsilon_0 w_0^{-1}$ имеет вид

$$u = w_0^2 r t_1(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-1}, \quad \upsilon = u_0 - w_0(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-1} \tag{2.19}$$

$$w = w_0 r(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-1}, \quad \rho = \rho_0(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-1}$$

$$p = p_0(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-\gamma}, \quad S = S_0, \quad c^2 = \gamma p_0 \rho_0^{-1}(t_1^2 w_0^2 + 1)^{1-\gamma}$$

3. Характеристики на простых решениях. Для системы (1.2) характеристики $g(x, r, \theta) = \mathrm{const}$ на решении определяются из уравнений ([2], с. 60)

C_0: $g_t + Ug_x + Vg_r + r^{-1}Wg_\theta = 0$ (трехкратная)

$C_\pm$: $g_t + Ug_x + Vg_r + r^{-1}Wg_\theta \pm cQ = 0, \quad Q = (g_x^2 + g_r^2 + r^{-2}g_\theta^2)^{1/2}$

Бихарактеристики удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_0:\ d_t x = U,\quad d_t r = V,\quad r d_t\theta = W$$

$$C_\pm:\ d_t x = U \pm c g_x Q^{-1},\quad d_t r = V \pm c g_r Q^{-1},\quad r d_t\theta = W \pm r^{-1} c g_\theta Q^{-1}$$

$$-d_t g_x = U_x g_x + V_x g_r + r^{-1} W_x g_\theta \pm c_x Q,\quad -d_t g_\theta = U_\theta g_x + V_\theta g_r + r^{-1} W_\theta g_\theta \pm c_\theta Q$$

$$-d_t g_r = U_r g_x + V_r g_r (r^{-1}W)_r g_\theta \pm c_r Q \mp c r^{-3} g_\theta^2 Q^{-1}$$

Для системы (1.4) имеются три инвариантные характеристики

$$C_0:\ h_t + u h_r + \upsilon h_s = 0 \text{ (трехкратная)}$$

$$C_\pm:\ h_t + u h_r + \upsilon h_s \pm c q = 0,\quad q = (h_r^2 + (1 + r^{-2}) h_s^2)^{1/2}$$

Бихарактеристики задаются уравнениями

$$C_0:\ d_t r = u,\quad d_t s = \upsilon$$

$$C_\pm:\ d_t r = u \pm c h_r q^{-1},\quad d_s s = \upsilon \pm c h_s (1 + r^{-2}) q^{-1},\quad d_t h_s = -u_s h_r - \upsilon_s h_s \mp c_s q$$

$$d_t h_r = -u_r h_r - \upsilon_r h_s \mp c_r q \pm c r^{-3} h_s^2 q^{-1}$$

На простом решении (2.19) получаются следующие выражения для инвариантных величин: для бихарактеристик C_0

$$r = r_0 (t_1^2 w_0^2 + 1)^{1/2},\quad s = x_0 - \theta_0 + u_0 t_1 - \operatorname{arctg}(w_0 t_1) \tag{3.1}$$

а характеристическая поверхность имеет вид

$$h = \Phi(r(t_1^2 w_0^2 + 1)^{-1/2},\quad s - u_0 t_1 + \operatorname{arctg}(w_0 t_1)) = C$$

для бихарактеристик C_+ справедливо представление

$$r = (t_1^2 w_0^2 + 1)^{1/2} G^{1/2}(t_1)$$

$$s = x_0 - \theta_0 + u_0 t - \operatorname{arctg}(w_0 t_1) + \lambda(\gamma p_0 \rho_0^{-1})^{1/2} \int_0^{t_1} (z^2 w_0^2 + 1)^{-\gamma/2} \times \tag{3.2}$$

$$\times [1 + \lambda^2 (z^2 w_0^2 + 1)]^{-1/2} [G^{-1}(z) + 1 + z^2 w_0^2] dz$$

где

$$G(t) = r_0^2 + 2(r_0^2 - \lambda^2)^{1/2} g(t) + g^2(t)$$

$$g(t) = (\gamma p_0 \rho_0^{-1})^{1/2} \int_0^t (z^2 w_0^2 + 1)^{-\gamma/2} [1 - \lambda^2 (z^2 w_0^2 + 1)]^{-1/2} dz$$

При фиксированных x_0, r_0, θ_0 формулы (3.2) задают параметрическое представление характеристического коноида с параметром λ. При $t = 0$ получается вершина коноида. Для малых t_1 вблизи вершины характеристического коноида его сечение плоскостью $t_1 = \text{const}$ есть окружность

$$R^2 + S^2 = \gamma p_0 \rho_0^{-1} t_1^2 r_0^{-2} \tag{3.3}$$

причем центр окружности двигается вдоль траектории (3.1).

При $0 < \gamma < 2$ интеграл $g(\infty)$ сходится, а интеграл в выражении для s расходится. Поэтому при $t_1 \to \infty$ овал (3.2) вытягивается вдоль оси S.

Бихарактеристики C_0 для (1.2) таковы:

$$x = x_0 + u_0 t_1,\quad \theta = \theta_0 + \operatorname{arctg}(w_0 t_1),\quad r = r_0 (1 + t_1^2 w_0^2)^{1/2} \tag{3.4}$$

Проекция линии (3.4) на $\mathbb{R}^3(x, r, \theta)$ есть прямая линия, которая представляется равенствами $x = x_0 + u_0 w_0^{-1} r_0^{-1} z$, $y = r_0$ в декартовой системе координат $y = r\cos(\theta - \theta_0)$, $z = r\sin(\theta - \theta_0)$.

Бихарактеристики C_+ для системы (1.2) на решении (2.19) задаются равенствами

$$r = r_0(1 + w_0^2 t_1^2)^{1/2}[1 + c_0^2 r_0^{-2}(\lambda^2 - 1)g^2 + 2c_0 r_0^{-1}(\lambda^2 - 1)^{1/2} g(1 - \mu^2 r_0^{-2})^{1/2}]^{1/2}$$

где

$$g = \int_0^{t_1} (z^2 w_0^2 + 1)^{-\gamma/2}(\lambda^2 + z^2 w_0^2)^{-1/2} dz$$

$$x = x_0 + u_0 t_1 + c_0 \int_0^{t_1} (z^2 w_0^2 + 1)^{1-\gamma/2}(\lambda^2 + z^2 w_0^2)^{-1/2} dz$$

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{arctg}(w_0 t_1) + \mu(\lambda^2 - 1)^{1/2} c_0 \int_0^{t_1} (z^2 w_0^2 + 1)^{1-\gamma/2}(\lambda^2 + z^2 w_0^2)^{-1/2} r^{-2} dz$$

Если из этих равенств исключить параметры λ, μ, то получится гиперповерхность в пространстве переменных t_1, x, r, θ, которая определяет характеристический коноид. При $t_1 \to 0$ коноид задается равенствами

$$(x - x_0 - u_0 t_1)^2 + (r - r_0(1 + w_0^2 t_1^2)^{1/2})^2 + (\theta - \theta_0 - \operatorname{arctg}(w_0 t_1))^2 = c_0^2 t_1^2$$

Сечение коноида гиперплоскостью $t_1 = \text{const}$ является замкнутой поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$, при этом точка, лежащая на траектории, находится внутри этой замкнутой поверхности. Сечение поверхности плоскостью $\theta = \text{const}$ есть часть окружности ($r > 0$) с центром в точке $(x_0 + u_0 t_1,\ r_0(1 + w_0^2 t_1^2)^{1/2})$ и радиусом $(c_0^2 t_1^2 - (\theta - \theta_0 - \operatorname{arctg}(w_0 t_1))^2)^{1/2}$.

Если t_1 мало, то действительная окружность существует для углов θ, мало отличающихся от $\theta_0 + \operatorname{arctg}(w_0 t_1)$.

На решении (2.15) получаются следующие выражения: для бихарактеристик C_0

$$x = x_0 + \upsilon_0 t_1, \quad r = r_0(1 + C^2 t_1^2)^{1/2}, \quad \theta = \theta_0 + \operatorname{arctg}(C t_1)$$

r_0, C – постоянные; траектории – прямые линии $y = r_0$, $\upsilon_0 z = \pm r_0 C(x - x_0)$, где x, y, z – декартовы координаты; характеристики задаются равенствами $x = \upsilon_0 t_1 + \psi(y, z t_1^{-1})$, где ψ – произвольная функция.

4. Сильные разрывы на простых решениях. Инвариантная поверхность, скорость движения инвариантной поверхности в направлении нормали записываются в переменных винтового движения формулами $G(t, r, s) = 0$, $D_n = -G_t(G_r^2 + G_s^2(1 + r^{-2}))^{-1/2}$.

Уравнения сильного разрыва таковы:

контактный разрыв

$$[p] = 0, \quad \omega_i = G_t + u_i G_r + \upsilon_i G_s = 0, \quad i = 1,2 \tag{4.1}$$

ударная волна

$$[\rho\omega] = 0, \quad [p + \rho\omega^2] = 0, \quad H(\rho_2, p_2; \rho_1, p_1) = 0 \tag{4.2}$$

где $\omega = (G_t + uG_r + \upsilon G_s)(G_r^2 + G_s^2(1 + r^{-2}))^{-1/2}$, $H(\rho, p;\ \rho_1, p_1) = \varepsilon(\rho^{-1}, p) - \varepsilon(\rho_1^{-1}, p_1) +$

$+\frac{1}{2}(\rho^{-1}-\rho_1^{-1})(p+p_1)$ – функция Гюгонио, ε – внутренняя энергия. Для политропного газа адиабата Гюгонио $H = 0$ принимает вид

$$p_2 p_1^{-1} = [(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1][(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2]^{-1} \qquad (4.3)$$

Для неинвариантной поверхности сильного разрыва $G(t, x, r, \theta) = 0$ относительная скорость равна

$$\omega = (G_t + UG_x + VG_r + Wr^{-1}G_\theta^2)(G_x^2 + G_r^2 + r^{-2}G_\theta^2)^{-1/2}$$

На решениях (2.18) ударная волна может быть лишь при $T_0 = 0$, $\gamma = 2$. При этом выполняются соотношения

$$[\rho_0(I_0 - N)] = 0, \quad [p_0 + \rho_0(I_0 - N)^2] = 0, \quad p_{02}p_{01}^{-1} = (3\rho_{02} - \rho_{01})(3\rho_{01} - \rho_{02})^{-1}$$

а инвариантная поверхность ударной волны есть двигающийся цилиндр в $\mathbb{R}^3$:

$$r = \ln^{-1}(kt^{-1}) \quad \text{при} \quad N = 0; \quad \tau(Kt^{2\tau} + 1)(1 - Kt^{2\tau})^{-1} \quad \text{при} \quad N = -\tau^2;$$

$$\tau \operatorname{tg}(\tau \ln(tK^{-1})) \quad \text{при} \quad N = \tau^2, \text{ где } N, K \text{ – постоянные.}$$

Контактный разрыв для решения (2.18) неинвариантен. Он возможен при $T_0 = 0$ и задается равенствами $x = \upsilon_0 t + x_0$; $[p_0] = [\upsilon_0] = 0$.

Инвариантный контактный разрыв на решениях (2.19) может быть только на цилиндрической поверхности $r = r_0[1 + (w_0 t + \upsilon_0)^2]^{1/2}$ с условиями $[p_0] = [\upsilon_0] = [w_0] = 0$, $[u_0] \neq 0$.

Для решений (2.15) возможен только неинвариантный сильный разрыв. Контактный разрыв задается равенствами $x = \upsilon_0 t_1 + x_0$; $[p_0] = [\upsilon_0] = [t_0] = 0$, $[s_0] \neq 0$. Ударная волна возможна только при $\gamma = 1$: $x = Nt + x_0$, $[t_0] = 0$, $[\rho_0(\upsilon_0 - N)] = 0$, $[p_0 + \rho_0(\upsilon_0 - N)^2] = 0$, $p_{02}\rho_{02}^{-1} = p_{01}\rho_{01}^{-1}$.

Для решений (2.16) инвариантный контактный разрыв есть цилиндр $r = [w_0^2(t + t_0)^2 + r_0^2]^{1/2}$, на котором выполняются условия $[t_0] = [w_0] = [p_0] = 0$, $[\upsilon_0] \neq 0$. Инвариантной ударной волны нет на множестве решений (2.16). Неинвариантный контактный разрыв есть плоскость $x = \upsilon_0 t - x_0$ с условиями $[\upsilon_0] = [p_0] = 0$. Существует неинвариантная ударная волна, которая задается плоскостью $x = Nt + x_0$ с условиями $[\rho_0(\upsilon_0 - N)] = 0$, $[p_0 + \rho_0(\upsilon_0 - N)^2] = 0$, (4.3) с нулевыми индексами. Инвариантная ударная волна имеет вид $r = N(t + t_0)$ с условиями $[\rho_0(w_0^2 - N)] = 0$, $[Np_0 + \rho_0(w_0^2 - N)^2] = 0$, (4.3) с нулевыми индексами.

Для решений (2.17) на контактном разрыве выполняются соотношения $[t_0] = [w_0] = [p_0] = 0$. Его уравнение есть $r^2 = w_0^2 t_1^2 + r_0^2$ для инвариантного контактного разрыва и $\theta = \operatorname{arctg}[w_0 t_1 (r^2 - w_0^2 t_1^2)^{-1/2}] + \psi(r^2 - w_0^2 t_1^2)$ для неинвариантного контактного разрыва, где ψ – произвольная функция. Ударная волна возможна только инвариантная при $\gamma = 1$:

$$r = Nt_1, \quad [\rho_0(w_0^2 - N)] = 0, \quad [Np_0 + \rho_0(w_0^2 - N)^2] = 0, \quad p_{02}\rho_{02}^{-1} = p_{01}\rho_{01}^{-1}$$

5. Групповая классификация. Система (1.4) с произвольным элементом $A = A(\rho, p)$ имеет следующие преобразования эквивалентности: 1) $p' = a_1 p + a_2$, $\rho' = a_1\rho$, $A' = a_1 A$; 2) $p' = -p$, $\rho' = -\rho$, $A' = -A$; 3) $t' = a_3 t$, $u' = a_3^{-1}u$, $\upsilon' = a_3^{-1}\upsilon$, $w' = a_3^{-1}w$, $p' = a_3^{-2}p$, $A' = a_3^{-2}P$.

Таблица 1

m	A	Операторы	r
1	$g(\rho, p)$	$\{Y_1 = \partial_y, Y_2 = t\partial_y + \partial_\upsilon, Y_3 = \partial_t\}$ – ядро	3
2	$pg(p\rho^{-\gamma})$	Z_γ	4
3	$pg(p\rho^{-1})$	Z_1	4
4	$g(\rho)$	Z_0	4
5	$pg(\rho)$	Y_5	4
6	γp	Z_0, Z_1	5
7	$g(\rho e^{-p})$	$Z_0 + 2\partial_p$	4
8	$g(\rho)$	∂_p	4
9	$\gamma\rho^\gamma$	Z_γ, ∂_p	5
10	ρ	Z_1, ∂_p	5
11	1	Z_0, ∂_p	5
12	0	$Z_0, \rho g'(p)\partial_\rho + g(p)\partial_p$	∞

Таблица 2

r	N	Базис	Нормализатор	Подалгебры L_{11}	Подалгебры ([1], табл. 6)
3	1	1, 2, 3	= 3,1	1, 4, 7, 10	4.4°
2	1	1,2 + α3	3,1	1,7,4 + α10	~3.9° при α ≠ 0 или 3.11 при α = 0
2	2	1.3	3,1	1, 7, 10	3.2°°
1	1	2 + α3	2,1	1 + 7,4 + α10	~2.7 при α ≠ 0 или 2.10 при α = 0
1	2	1	3,1	1,7	2.9°
1	3	3	2,2	1 + 7, 10	2.6

Результат групповой классификации системы (1.4) приводится в табл. 1 [11].

Пояснения к табл. 1. Ядро $m = 1$ входит во все 12 алгебр Ли, r – размерность алгебры. Все алгебры являются фактор алгебрами нормализаторов подалгебры H, в соответствующих алгебрах со специальными функциями A ([1], табл. 1), по H. Для $m = 10$ в общем случае $A = \pm\rho$; знак плюс взят из физических соображений, так как $A = \rho c^2 > 0$, $\rho > 0$. Функции g, встречающиеся в таблице, произвольные; $Y_4 + Y + 2p\partial_p$, $Z_\gamma = (1 - \gamma)Y + 2\rho\partial_\rho + 2\gamma p\partial_p$, $Y_5 = Y + 2p\partial_p$, $Y = t\partial_t - u\partial_u - \upsilon\partial_\upsilon - w\partial_w$.

6. Оптимальная система подалгебр для допускаемой алгебры Ли в случае общего уравнения состояния. Допускаемая системой (1.4) алгебра Ли $L_3 = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ имеет один ненулевой коммутатор $[Y_3, Y_2] = Y_1$. Имеется двухпараметрическое семейство нетривиальных автоморфизмов алгебры A_2: $x'^1 = x^1 - a_2x^3$, A_3: $x'^1 = x^1 + a_3x^2$. С их помощью получается оптимальная система подалгебр, которая сводится в нормализованную табл. 2 [1], где приведены номера операторов, образующих подалгебры. Нормализаторы представляют собой подалгебры r.N. Подалгебрам r.N соответствуют подалгебры из L_{11}, которые подобны подалгебрам из основной таблицы подалгебр алгебры L_{11} ([1], табл. 6). Знак "~" означает подобие. Знак "=" означает самонормализованность подалгебры [1].

Инвариантные и частично инвариантные решения рангов 1, 2 ([3], с. 247, 282) будут рассмотрены для подалгебр, указанных в последней колонке табл. 2. Здесь лишь приводится нередуцируемое частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1, построенное на всей алгебре Ли L_3, допускаемой подмоделью (1.4).

Справедливы интегралы

$$S(p,\rho)=S_0\quad(p=f(\rho,S_0)),\quad u^2+M(\rho)=u_0^2-Br^{-1},\quad r\rho u=DC(C-\int u^{-1}dr)^{-1}$$

где

$$M=2\int_0^{\rho}\rho^{-1}f_\rho(\rho,S_0)d\rho$$

S_0, B, C, D – постоянные, а остальные функции задаются формулами $\upsilon = [C\varphi(t-\int u^{-1}dr)-s-BCr^{-2}-2B\int(r^{-3}\int u^{-1}dr)dr](C-\int u^{-1}dr)^{-1}$, $w=Br^{-1}$, где $\varphi(s)$ – произвольная функция.

При $C\to\infty$, $\varphi=\upsilon_0$ получается инвариантное решение, построенное на подалгебре $\{Y_1, Y_3\}$.

7. Необходимые условия существования решения без особенности на оси. Подмодель (1.4) при $r=0$ может иметь особенность. Здесь будет показано, когда решение может быть представлено рядами в окрестности оси $r=0$ (суммирование по всем $k\geqslant 0$):

$$u=\sum u_kr^k,\quad \upsilon=\sum\upsilon_kr^k,\quad w=\sum w_kr^k,\quad \rho=\sum\rho_kr^k,\quad p=\sum p_kr^k,\quad A=\sum(k!)^{-1}A_kr^k$$

$$A_k=D_r^kA(p,\rho)|_{r=0}=k!(A_\rho^0\rho_k+A_\rho^0p_k+A_{\rho p}^0(\rho_{n-1}p_1+\rho_1p_{n-1})+A_{pp}^0p_{n-1}p_1)+\ldots$$

Подстановка рядов в систему (1.4) и сравнение коэффициентов при одинаковых степенях переменной r дает

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1}u_{jt}\rho_{k-j}+\sum_{i=1}^{k}\rho_{k-1}\sum_{j=1}^{i}ju_ju_{i-j}+\sum_{i=0}^{k-1}\rho_{k-1-i}\sum_{j=0}^{i-1}u_{js}\upsilon_{i-j}+\\
&+kp_k-\sum_{i=0}^{k}\rho_{k-1}\sum_{j=0}^{i}w_jw_{i-j}=0\\
&\sum_{i=2}^{k}\rho_{k-i}\left(\upsilon_{i-2t}+\sum_{j=1}^{i-1}u_{i-1-j}j\upsilon_j+\sum_{j=0}^{i-2}\upsilon_{js}\upsilon_{i-2-j}\right)+\\
&+p_{ks}+p_{k-2s}-2\sum_{i=0}^{k}\rho_{k-i}\sum_{j=0}^{i}u_jw_{i-j}=0\\
&\sum_{i=1}^{k}\rho_{k-i}\left(w_{i-1t}+\sum_{j=1}^{i}u_{i-j}jw_j+\sum_{j=0}^{i-1}w_{js}\upsilon_{i-1-j}\right)-\\
&-p_{ks}+\sum_{i=0}^{k}\rho_{k-i}\sum_{j=0}^{i}u_jw_{i-j}=0\\
&\rho_{k-1t}+\sum_{j=1}^{k}u_{k-j}j\rho_j+\sum_{j=0}^{k-1}\rho_{js}\upsilon_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{k}\rho_{k-j}(u_j(1+j)+\upsilon_{j-1s})=0\\
&p_{k-1t}+\sum_{j=1}^{k}u_{k-j}jp_j+\sum_{j=0}^{k-1}p_{js}\upsilon_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{k}((k-j)!)^{-1}A_{k-j}(u_j(1+j)+\upsilon_{j-1s})=0
\end{aligned}\tag{7.1}$$

Физический смысл винтовых движений заключается в том, что

$$u_0=w_0=0,\quad \upsilon_{0s}=\rho_{0s}=p_{0s}=0,\quad \rho_0\neq 0$$

Тогда полученные уравнения при $k=0$ обращаются в тождества.

При $k=1$ определяются

$$p_1=0,\quad u_1=-\tfrac{1}{2}\rho_0^{-1}\rho_0',\quad p_0=f(\rho_0,S_0)$$

f – общее решение уравнения $\rho_0dp_0=A_0d\rho_0$, S_0 – постоянная интегрирования.

При $k = 2$ из системы (7.1) определяются величины

$$w_1 = -\upsilon_0 - a'(s_1), \quad s_1 = s - \int \upsilon_0 dt$$

$$\rho_1 = B(\rho_0)b(s_1), \quad p_2 = s(\upsilon_0\rho_0' - \rho_0\upsilon_0') - \rho_0' a + m(t)$$

$$B = \rho_0^{3/2} \exp(-\int A_\rho(\rho_0, f(\rho_0))A^{-1}(\rho_0, f(\rho_0))d\rho_0)$$

$$u_2 = -1/3\,\upsilon_{1s} + 1/3\, B\rho_0'\rho_0^{-1} A_\rho^0 A_0^{-1} b$$

Остается равенство

$$1/4\,\rho_0^{-1}\rho_0'^2 - 1/2(\ln\rho_0)'' Bb(s_1) - \rho_0(\upsilon_0 - a'(s_1))^2 +$$
$$+2s(\upsilon_0\rho_0' - \rho_0\upsilon_0') - 2\rho_0' a(s_1) + 2m(t) = 0 \tag{7.2}$$

которое надо исследовать на совместность.

После дифференцирования (7.2) по s дважды и один раз по t получается равенство, из которого следуют лишь такие возможности:

1) $a'' = 0,\ b'' = 0$; 2) $a'' = 0,\ [(\ln\rho_0)'' B(\rho_0)\rho_0^{-1}]' = 0$

3) $[b''a''^{-1}]' = \upsilon_0' = 0$; 4) $[(\ln\rho_0)'' B(\rho_0)\rho_0^{-1}]' = \upsilon_0' = 0$

Решения уравнения (7.2) в каждом из случаев таковы.

Случай 1

$$a = \alpha_1 s_1 + \alpha_0, \quad b = \beta_1 s_1 + \beta_0, \quad \upsilon_0 = V_0\rho_0 + \alpha_1 - \frac{1}{4}\beta_1\rho_0 \int B(\rho_0)\rho_0^{-1}(\ln\rho_0)'' dt$$

$$m = \alpha_0\rho_0' - (\upsilon_0\rho_0' - \rho_0\upsilon_0')\int \upsilon_0 dt + \frac{1}{2}(\upsilon_0 - \beta_1)^2 - \frac{1}{8}\rho_0^{-1}\rho_0'^2 + \frac{1}{4}\beta_0(\ln\rho_0)''$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_0, V_0$ – постоянные, $\rho_0(t)$ – произвольная функция.

Случай 2

$$a = \alpha_1 s_1 + \alpha_0, \quad \rho_0 = C_0 e^{Ct}, \quad \upsilon_0 = \rho_0 V_0 + \alpha_1$$

$$m = \rho_0\left(C\alpha_0 - \frac{1}{8}C^2 - C\alpha_1^2 t - \alpha_1 V_0\rho_0 + \frac{1}{2}V_0^2\rho_0^2\right)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, C_0, C, V_0$ – постоянные, $b(s_1)$ – произвольная функция.

Случай 3

$$a = \upsilon_0 s_1 + \frac{1}{2}C_1 s_1^2, \quad b = \beta_0 + \frac{1}{8}CC_1 s_1^2, \quad m = \upsilon_0 t\rho_0' - \frac{1}{8}\rho_0^{-1}\rho_0'^2 - C^{-1}\beta_0\rho_0\left(\ln\rho_0 + \frac{1}{4}C_1\right)$$

где $s_1 = s - \upsilon_0 t$, $C \neq 0$, C_1, β_0, υ_0 – постоянные, а функция $\rho_0(t)$ определяется из уравнения

$$CB(\rho_0)(\ln\rho_0)'' + \rho_0(4\ln\rho_0 + C_1) = 0$$

Случай 4

$$\rho_0 = C_0 e^{Ct}, \quad m = -CC_0\upsilon_0^2 e^{Ct}(t + t_0), \quad a = -\frac{1}{2}Cs_1^2 + \alpha_1 s_1 + \frac{1}{8}C^2 - t_0\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}C^{-1}(\upsilon_0 - \alpha_1)^2$$

где $C_0, C, \alpha_1, \upsilon_0, t_0$ – постоянные, $b(s_1)$ – произвольная функция.

При $k = 3$ из системы (7.1) определяются величины $p_3 = \frac{2}{3}\rho_0(a' - \upsilon_0)w_2 + \frac{1}{6}(\ln\rho_0)''\rho_2 - \frac{1}{6}\rho_0'\upsilon_{1s} + \frac{1}{9}\rho_0\upsilon_0\upsilon_{1ss} + \frac{1}{9}Bb\upsilon_{1ts} + L_1$, а для w_2, ρ_2, υ_1 получается линейная система уравнений.

Функция u_3 определяется из четвертого уравнения (7.1) после того, как найдется υ_2 на следующем шаге:

$$-4\rho_0 u_3 = \rho_0 \upsilon_{2s} + \rho_{2t} + u_2\rho_1 + \rho_{1s}\upsilon_1 + \rho_{2s}\upsilon_0 + 4\rho_2 u_1 + \rho_1(3u_2 + \upsilon_{1s})$$

причем это равенство используется для вывода уравнения относительно υ_2.

Доказывается, что если на $(k-1)$-м шаге определяются p_{k-1}, u_i, υ_{i-2}, w_i, ρ_i, p_i, $i < k-1$ и u_{k-1} через υ_{k-2}, то на k-м шаге найдутся p_k, u_k через υ_{k-1}, а также получится система дифференциальных уравнений для нахождения υ_{k-2}, w_{k-1}, ρ_{k-1}.

Если $\rho_0 = C_0 e^{Ct}$, то система расщепляется, отделяется уравнение для ρ_{k-1}. Если дополнительно к этому $a'' = 0$, то уравнение для u_k интегрируется и получается одно уравнение для υ_{k-2}.

Итак, случаи 1–4 задают необходимые условия существования решения системы (1.4) без особенности на оси $r = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17326).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

Уфа

Поступила в редакцию
4.I.1995