УДК 532.536

© 1996 г. М.А. Брутян

ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Установлена дуальность стационарного однонаправленного течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости и некоторого течения сжимаемого фиктивного газа в плоскости, перпендикулярной вектору скорости течения жидкости. Функциональная зависимость плотности фиктивного газа от скорости при этом совпадает с зависимостью вязкости от скорости сдвига. Для нелинейно-вязкой жидкости Цванцига–Хонькина найдено точное аналитическое решение задачи Пуазейля и обнаружено, что решение не существует при числах Рейнольдса, превышающих некоторое критическое значение. На основании установленной дуальности несуществование решения интерпретируется как газодинамический эффект "запирания трубы", поскольку в этом случае число Маха фиктивного газа на стенке трубы становится равным единице.

Рассмотрим стационарное однонаправленное течение со скоростью $\mathbf{V} = (0, 0, w(x, y))$ неньютоновской жидкости Райнера–Ривлина [1, 2], индуцированное градиентом давления или движущимися границами. Уравнение неразрывности для такого течения выполняется автоматически, а уравнение движения принимает вид

$$\operatorname{div}\sigma = \nabla p, \quad \sigma = 2\eta D + \mu D^2, \quad 2D = \nabla V + (\nabla V)^T \tag{1}$$

где p – давление, η, μ – скалярные функции инвариантов тензора скоростей деформации D, ∇V – тензор градиента скорости с компонентами $(\nabla V)_{ij} = \partial V_i/\partial x_j$. Можно убедиться, что для течений рассматриваемого вида первый и третий инварианты тензора D равны нулю, а второй $\operatorname{Tr}(D^2) = q^2/2$, $q^2 = (\nabla w)^2$. Тогда окончательно находим

$$\sigma = 2\eta(q)D + \mu(q)D^2 \tag{2}$$

Для однонаправленного течения $\mathbf{V} = (0, 0, w(x, y))$ имеем

$$D = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & w_x \\ 0 & 0 & w_y \\ w_x & w_y & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь x, y и z – декартовы координаты, ось z направлена по потоку. Предполагая, что тензор σ также имеет аналогичный вид, из (2) немедленно получаем, что $\mu(q) = 0$. В случае $\mu(q) \neq 0$ получается переопределенная система уравнений относительно функции $w(x, y)$, что указывает на то, что в общем случае исходное предположение об однонаправленности течения для жидкости Райнера–Ривлина не выполняется. Этот факт согласуется с известным явлением возникновения вторичного течения в трубах некруглого сечения [1, 2]. Далее будем изучать жидкость Райнера–Ривлина при условии $\mu = 0$, которая иногда еще называется жидкостью с нелинейной вязкостью или обобщенной ньютоновской жидкостью. Подставляя принятую форму для D и σ в уравнение (1), имеем

$$\mathrm{div}(\eta\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = \nabla w \tag{3}$$

Для простоты рассматриваем течение с нулевым градиентом давления. Для градиентных течений правая часть уравнения (3) не равна нулю, что, однако, не меняет основные качественные свойства уравнения, например, его тип.

Приведем (3) к виду

$$div(\eta\mathbf{q}) = \eta\lambda^{-1} / [(\lambda - w_x^2)w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + (\lambda - w_y^2)w_{yy}] = 0$$

$$\lambda = -\eta q dq / d\eta \tag{4}$$

Тип квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка (4) определяется знаком величины

$$\delta = (\lambda - w_x^2)(\lambda - w_y^2) - w_x^2 w_y^2 = \lambda(\lambda - q^2) \tag{5}$$

откуда заключаем, что при $\lambda < 0$ уравнение имеет эллиптический тип. Этот случай ($d\eta/dq > 0$) соответствует дилатантным жидкостям [1] (к ним относятся, например, концентрированные суспензии). При $\lambda > 0$, что соответствует псевдопластическим жидкостям, ситуация сложнее. Для дальнейшего анализа этого случая ($d\eta/dq < 0$) будет полезна газодинамическая аналогия. Заметим, что уравнение (4) совпадает (с точностью до несущественного множителя) с уравнением относительно потенциала скорости течения некоторого фиктивного газа в плоскости x, y. Потенциал скорости q течения газа представляет компонента $w(x, y)$ скорости течения жидкости, а роль плотности газа ρ выполняет коэффициент динамической вязкости η. Тогда, как следует из (4), скорость звука C в фиктивном газе определена формулой

$$C = \lambda^{1/2} \tag{6}$$

Из (5) видно, что при $\lambda > 0$ область эллиптичности расположена при $q < C$, а область гиперболичности – при $q > C$. Как и в обычной газовой динамике, введем в рассмотрение число Маха, M, $M = q/C$. Области гиперболичности тогда соответствует условие $M > 1$, а области эллиптичности $M < 1$.

Рассмотрим некоторые примеры жидкостей с нелинейной вязкостью. Широко используется [1] степенной закон

$$\eta = Kq^{n-1} \tag{7}$$

где n и K – постоянные. Жидкости с псевдопластическим поведением соответствует $n < 1$. Из (4), (6) и (7) находим $M^2 = 1 - n$, так что уравнения эллиптичны при всех q.

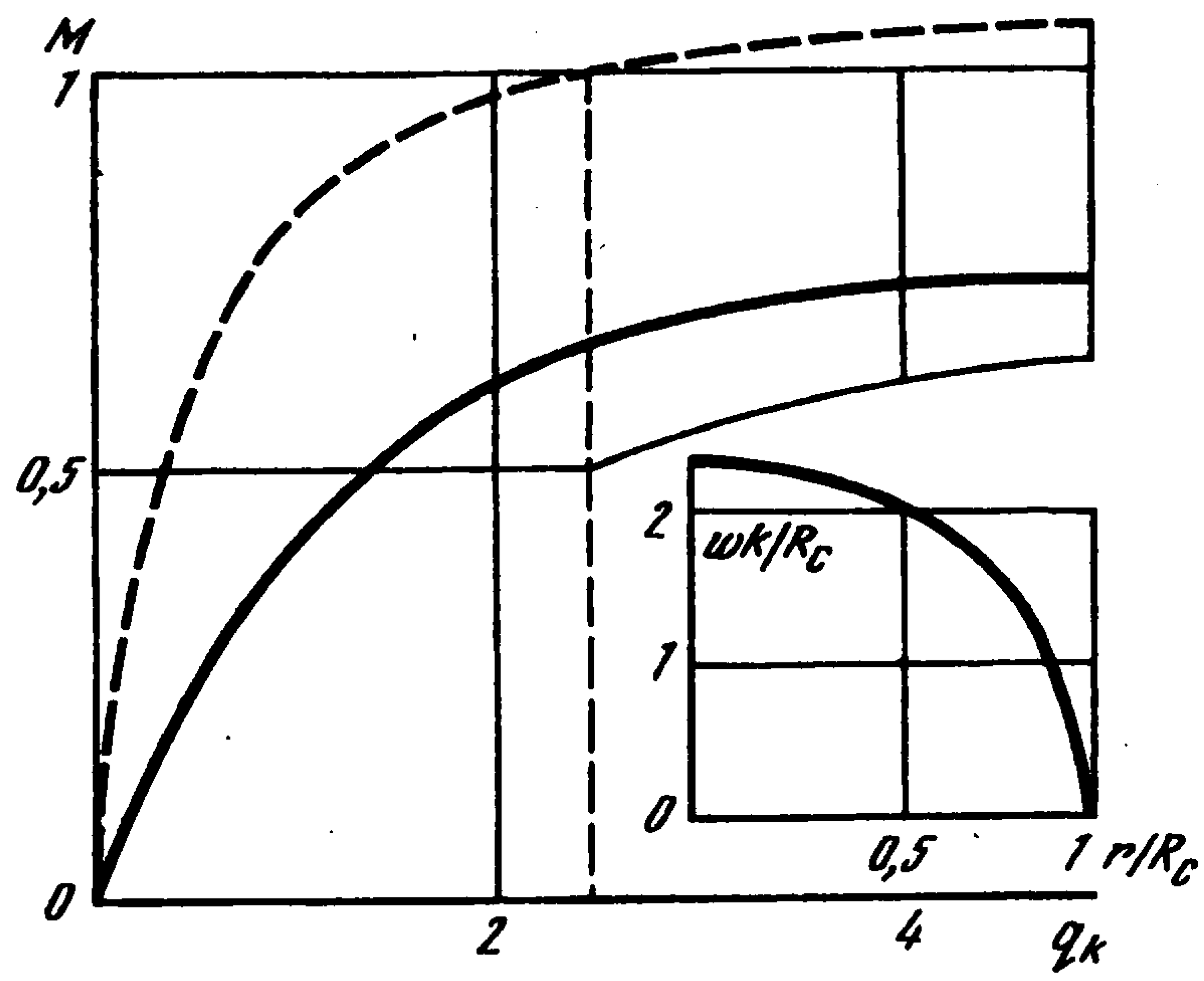
Другая получившая широкое распространение форма функциональной зависимости $\eta(q)$ соответствует модели Прандтля–Эйринга [1], которая, по крайней мере частично, основана на молекулярных представлениях. Предполагается, что

$$\eta = \eta_0 f(qk), \quad f(qk) = \mathrm{arsch}(qk)/(qk)$$

где η и k – постоянные. Простые вычисления снова показывают эллиптический тип уравнения (4), т.е. дозвуковой характер течения фиктивного газа. Число Маха при этом

$$M = \left[1 - ((1 + q^2k^2)^{1/2} f(qk))^{-1}\right]^{1/2}$$

Зависимость $M = M(qk)$ изображена на фигуре сплошной линией, соответствующей дозвуковому характеру течения.



Рассмотрим еще одну известную модель жидкости с нелинейной вязкостью, полученную тоже с учетом кинетической теории, а именно, модель Цванцига–Хонькина [3, 4], для которой

$$\eta = \eta_0 \frac{2}{q^2k^2} \operatorname{sh}^2 \xi, \qquad \xi = \frac{1}{6} \operatorname{arch}(1 + 9q^2k^2)$$

В этом случае

$$M = \left[2 - \sqrt{\frac{4q^2k^2}{2 + 9q^2k^2}} \operatorname{cth} \xi \right]^{1/2} \tag{8}$$

Соответствующая зависимость $M = M(qk)$ показана на фигуре штриховой линией. Видно, что уравнение (6) эллиптично при $0 < qk < \sqrt{6}$ и гиперболично при $qk > \sqrt{6}$. Критическое значение $q_* k = \sqrt{6}$, при котором наступает параболическое вырождение, $M = 1$ находится из (8) после некоторых вычислений. Заметим что число Маха фиктивного газа ограниченно: $M < 2\sqrt{3} \approx 1{,}1547$. Аналогичное свойство имеет газ Трикоми: $M < 1{,}14$ а для совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma < 1$ также имеем ограничение ($M < \sqrt{2/(1-\gamma)}$).

Рассмотрим стационарное течение жидкости Цванцига–Хонькина в прямолинейной трубе произвольного сечения, вызванное постоянным градиентом давления (течение Пуазейля). Тогда вместо (3) получаем уравнение

$$\operatorname{div}(\eta \mathbf{q}) = dp/dz \tag{9}$$

описывающее двумерное потенциальное течение фиктивного газа с однородно распределенными источниками. Роль интенсивности источников играет постоянный градиент давления. Проинтегрируем (9) по площади S сечения трубы и перейдем к интегралу по контуру L сечения S. В результате имеем

$$\oint \eta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dl = S \frac{dp}{dz} \tag{10}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности трубы.

Для получения верхней оценки интеграла попытаемся найти максимум произведения ηq. Известное газодинамическое соотношение [5] при учете установленной дуальности запишем в виде

$$\eta^{-1}d(\rho q)/dq = 1 - M^2$$

Отсюда заключаем, что произведение ηq имеет экстремум в критической точке $M = 1$, для которой, как уже известно, $qk = \sqrt{6}$. Используя это, получаем неравенство

$$2/(qk)^{-1}\,\mathrm{sh}^2\,\xi \leqslant \sqrt{3/8} \qquad (11)$$

в справедливости которого можно убедиться также непосредственной проверкой. При учете (11), уравнение (10) перепишем в форме неравенства, представляющего собой необходимое условие существования решения.

$$0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{S}{L}k\left(-\frac{1}{\eta_0}\frac{dp}{dz}\right) \qquad (12)$$

Из условия (12), в частности, следует, что пуазейлево течение жидкости Цванцига–Хонькина в трубе с сечением в виде бесконечного клина не существует. Выделим в клине сектор радиуса R: $0 \leqslant r \leqslant R, |\theta| \leqslant \alpha$. Тогда периметр $L = 2(1 + \alpha)R$, а площадь $S = \alpha R^2$. Подставляя эти значения в (12) при достаточно больших R, приходим к противоречию, что и завершает рассуждения.

Для круглой трубы необходимое условие (12) оказывается и достаточным. Убедимся в этом, получив точное решение задачи. Записав уравнение (9) в цилиндрических координатах (r, ϑ, z), после интегрирования находим

$$\mathrm{arch}(1 + 9q^2k^2) = 6\,\mathrm{arsh}\left(-\frac{r}{4}\frac{k}{\eta_0}\frac{dp}{dz}\right)^{1/2} \qquad (13)$$

Учитывая выражение ch6x через sh$x$, уравнение (13) сводим к квадратному, решая которое окончательно находим

$$q = \frac{\sqrt{6}}{k}\frac{R_c}{r}\left\{2\left(\frac{R_c}{r}\right)^2[1 - F(r)] - 1\right\}; \quad F(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R_c}\right)^2\right]^{1/2}, \quad R_c = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\frac{k}{\eta_0}\frac{dp}{dz}\right)^{-1} \qquad (14)$$

Таким образом, решение действительно существует только в ограниченном диапазоне изменения радиуса трубы R: $0 \leqslant R \leqslant R_c$, в полном соответствии с (12). Интересно заметить, что течение Пуазейля обобщенно ньютоновской жидкости Цванцига–Хонькина в трубе критического сечения $R = R_c$ соответствует тому, что скорость фиктивного газа на стенке в этом случае становится звуковой, $M = 1$. Действительно, при $r = R_c$, как следует из (14), $qk = \sqrt{6}$, а это в свою очередь соответствует числу $M = 1$ (см. формулу (8) или фигуру). Несуществование решения при $R > R_c$ напоминает известный в газовой динамике эффект запирания трубы, т.е. невозможность для газа преодолеть критическое сечение, в котором реализуется звуковая скорость.

Интегрируя (14) с учетом граничного условия прилипания, найдем скорость течения жидкости в трубе

$$w(r) = \frac{\sqrt{6}R_c}{k}\left\{\mathrm{Ln}\frac{r}{R} + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{[1 + F(r)][1 - F(R)]}{[1 - F(r)][1 + F(R)]} - \frac{1}{2}\left(\frac{R_c}{r}\right)^2[1 - F(r)] + \frac{1}{2}\left(\frac{R_c}{R}\right)[1 - F(R)]\right\}$$

В правой нижней части фигуры показана зависимость $w = w(r)$ при критическом радиусе трубы $R/R_c = 1$. Расход жидкости равен

$$Q = \frac{2\sqrt{6}\pi R_c^3}{k}\left[\mathrm{Ln}\frac{R}{R_c} + \frac{1}{32}\left(\frac{R}{R_c}\right)^4 - F(R) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-F(R)}{1+F(R)} + 1 - \mathrm{Ln}\,2\right]$$

В пределе $k \to 0$ или $R_c \to \infty$, что соответствует классической ньютоновской жидкости, полученная формула соответствует закону Пуазейля.

Факт несуществования решения был отмечен ранее [6–9] для различных течений вязкоупругой жидкости. В частности, было показано [8, 9], что течение Пуазейля для четырехконстантной модели Олдройда [1] существует лишь в ограниченном диапазоне чисел Деборы De:

$$0 \leqslant \mathrm{De} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \mathrm{De} = \frac{2L}{L}\left(-\frac{\tau}{\eta}\frac{dp}{dz}\right)$$

где τ – время релаксации, а c – безразмерная постоянная модели.

Разрушение решения при критическом значении безразмерного параметра задачи (числа Рейнольдса или числа Деборы), возможно, указывает на то, что при закритических режимах существуют другие типы течения, но более вероятно, это свидетельствует о некоторых внутренних проблемах данных реологических моделей. Отметим также, что замена обычного граничного условия прилипания $w(R) = 0$ на условие частичного проскальзывания на стенке: $\eta[q(R)]q(R) = -\beta(w_s^2)w_s$, где w_s – скорость проскальзывания, а $\beta(w_s^2)$ – коэффициент проскальзывания жидкости [2], принципиально не изменяет ситуации: решение вновь существует лишь в ограниченном диапазоне изменения радиуса трубы R: $0 \leqslant R \leqslant R_c$.

Для изучения вопросов устойчивости рассмотрим простейшее нестационарное однонаправленное течение $\mathbf{V} = (0, 0, w(x, y))$. Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(q)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma = q\eta(q) \tag{15}$$

Дифференцируя первое уравнение (15) по x и используя соотношения (4), (6) для введения числа Маха M фиктивного газа, получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta(1-M^2)\frac{\partial q}{\partial x}\right] \tag{16}$$

с эффективным коэффициентом теплопроводности $\theta = \eta(1 - M^2)$, которое, как известно, неустойчиво по Адамару при $\theta < 0$ (см., например, [10]), т.е. при $M > 1$.

Несуществование решения рассмотренной стационарной задачи при $M > 1$ проявляется в неэволюционности соответствующей нестационарной задачи в гиперболической области, хотя в общем случае нет оснований утверждать, что смена типа невозможна в области эволюционности. Неэволюционность уравнений указывает на то, что в этой области нарушается корректность используемой модели. Возможно, что для устранения дефекта в реологической модели необходимо учесть дополнительные физические факторы, которые могут быть малыми в области эволюционности, но играть решающую роль в области неэволюционности. Неэволюционность уравнений движения жидкости с нелинейной вязкостью в гиперболической области была отмечена в работе [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
2. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 374 с.
3. *Zwanzig R.* Nonlinear sher viscosity of a gas // J. Chem. Phys. 1979. V. 71. N 11. P. 4416–4420.
4. *Хонькин А.Д.* О нелинейных коэффициентах переноса // Численные методы механики сплошной среды. Т. 13. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. № 6. С. 130–136.
5. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
6. *El-Kareh A.W., Leal L.G.* Existence of solutions for all Deborah numbers for a non-newtonian model modified to include diffusion // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1989. V. 33. N 3. P. 257–287.
7. *Brutyan M.A., Krapivsky P.L.* Unidirectional flows of viscoelastic fluids and their gasdynamic counterparts // ZAMP. 1992. V. 43. N 4. P. 715–725.
8. *Brutyan M.A., Krapivsky P.L.* Existence and nonexistence of solutions for some rheological models of viscoelastic liquids // J. Rheol. 1992. V. 36. N 8. P. 499–1515.
9. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Внутренние свойства некоторых реологических моделей вязкоупругой жидкости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 347–351.
10. *Joseph D.D., Saut J.C.* Short-wave instabilities and ill-posed initial-value problems // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1990. V. 1. P. 191–227.
11. *Регирер С.А., Руткевич И.М.* Некоторые особенности уравнений гидродинамики неньютоновских сред / ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 942–945.

Жуковский

Поступила в редакцию
9.VIII.1994