УДК 531.381:531.395

© 1996 г. В.Ю. Ольшанский

ЛИНЕЙНЫЙ И КВАДРАТИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается механическая система, состоящая из неизменяемой подсистемы (тела-носителя) и изменяемой части (рабочего тела). Движение частиц рабочего тела относительно носителя программно задано. Структурно изменяемая часть системы имеет переменную во времени конфигурацию и может иметь как постоянный, так и переменный состав. Система находится в однородном поле силы тяжести. Изучается движение в случае, когда центр инерции системы не совпадает с неподвижной точкой носителя. Сформулированы критерии существования линейного и квадратичного интегралов, получен явный вид интегралов. Дана механическая интерпретация интегралов и условий их существования.

В ряде работ[1] изучалась система с изменяемой конфигурацией, реактивные воздействия на которую обусловлены отсоединением рабочего тела с заданными абсолютными скоростями его частиц, а тело-носитель имеет неподвижную точку. В частности, получены[2] условия существования линейного и квадратичного интегралов. Известны [1] уравнения движения для случая, когда заданы скорости отсоединения частиц рабочего тела по отношению к телу – носителю.

Рассматриваемая ниже математическая модель включает в себя модели Р.Ш. Аминова и Н.Н. Макеева (модели A и M). Для модели A решена задача о нахождении интегралов, а для модели M записаны интегралы в явном виде и сокращено число критериальных условий по сравнению с указанными ранее.

1. Пусть E_1 – инерциальный ортобазис, E_2 – базис, неизменно связанный с носителем, E_3 – главный ортобазис, заданный главными осями инерции системы в неподвижной точке носителя O; $\mathbf{x}_{ij}$ – мгновенная угловая скорость базиса E_i относительно E_j. Рассматривая систему как совокупность материальных точек M_n, кинетический момент системы $\mathbf{G}$ относительно точки O в ее движении по отношению к базису E_i запишем в виде ($\mathbf{r}_n = \mathbf{OM}_n$)

$$\mathbf{G}_i = \sum m_n \mathbf{r}_n \times (\mathbf{r}_n)^{\cdot}_{E_i} \tag{1.1}$$

Переходя к производной в базисе E_j, получим

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_j + J\mathbf{x}_{ji} \tag{1.2}$$

Здесь J – оператор инерции системы в точке O, A_k, $\mathbf{e}_k$ – его собственные значения и соответствующие собственные векторы.

Абсолютный кинетический момент системы относительно точки O обозначим через $\mathbf{G}$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1$.

[1] *Макеев Н.Н.* Интегральные многообразия уравнений динамики сложных механических систем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 1992. 29 с.

[2] *Макеев Н.Н.* Линейный и квадратичный интегралы сложной системы. Деп. № 1657-В89 в ВИНИТИ 14.03.89. Саратов, 1989. 86 с.

Уравнения движения [1], записанные относительно угловой скорости $\mathbf{x}_{21}$, можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{G}}=\mathbf{G}\times\mathbf{x}_{21}+\Lambda\mathbf{x}_{21}+\mathbf{s}\times\mathbf{a}+\mathbf{L},\quad \dot{\mathbf{s}}=\mathbf{s}\times\mathbf{x}_{21} \tag{1.3}$$

Точка означает производную по времени в E_2, $\mathbf{s}$ – орт вертикали, $\mathbf{r}_c = \mathbf{OC}$, $\mathbf{a} = P\mathbf{r}_c$, P – вес тела.

Оператор Λ и функция $\mathbf{L}(t)$ заданы. Для модели A

$$\mathbf{L}(t)=\mathbf{L}^r(t)+\sum\dot{m}_n\mathbf{r}_n\times\mathbf{v}_n^r,\quad \Lambda\mathbf{x}=\sum\dot{m}_n\mathbf{r}_n\times(\mathbf{x}\times\mathbf{r}_n) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{L}^r$ – главный момент реактивных сил относительно точки O, $\mathbf{v}_n^r=\dot{\mathbf{r}}_n$ – скорость частицы относительно носителя.

Уравнения движения для модели M также можно записать в форме (1.3), при этом $\Lambda\equiv 0$, а $\mathbf{L}(t)$ – заданный для этой модели главный момент квазиреактивных сил.

При построении линейного интеграла удобно использовать систему, эквивалентную (1.3):

$$J(\mathbf{x})^{\cdot}_{E_3}=(J\mathbf{x})\times\mathbf{x}+Z\mathbf{x}+\mathbf{s}\times\mathbf{a}+\mathbf{N},\quad (\mathbf{s})^{\cdot}_{E_3}=\mathbf{s}\times(\mathbf{x}+\mathbf{b}) \tag{1.5}$$

Для модели A $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{21}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}_{32}$, $Z = \Lambda - (J)^{\cdot}_{E_3} + M(\mathbf{G}_2) - M(\mathbf{x}_{32})J$, $\mathbf{N} = \mathbf{L} - (G_2)^{\cdot}_{E_3} - \mathbf{x}_{32}\times\mathbf{G}_2$.

Для модели M $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{31}$, $\mathbf{b} = 0$, $Z = M(\mathbf{G}_3) - (J)^{\cdot}_{E_3}$, $\mathbf{N} = \mathbf{L} - (\mathbf{G}_3)^{\cdot}_{E_3}$.

Здесь и ниже $M(\mathbf{c})$ – оператор векторного умножения, $M(\mathbf{c})\mathbf{x} = \mathbf{c}\times\mathbf{x}$. При $\mathbf{N} = 0$, $\mathbf{b} = 0$, $Z = 0$ система (1.5) есть система Эйлера–Пуассона. При $\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{N} = -(\mathbf{d})^{\cdot}_{E_3}$, $Z = M(\mathbf{d})$ она описывает движение гиростата с гиростатическим моментом $\mathbf{d}$.

Всюду считаем, что $\Lambda(t)$, $\mathbf{L}(t)$ – непрерывные, а $J(t)$, $\mathbf{G}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ – непрерывно-дифференцируемые на $[0, +\infty)$ функции.

2. Условия существования линейного по $\mathbf{x}$ интеграла $F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{x} + \varphi(t)$ получим, дифференцируя $F(\mathbf{x}, t)$ в силу системы (1.5). Одним из необходимых условий является наличие симметрии у эллипсоида инерции. Если такая симметрия имеется (например $A_1 = A_2 \neq A_3$), то необходимые и достаточные условия существования интеграла имеют вид

$$m^{(1)} = m^{(2)} = 0,\quad a^{(1)} = a^{(2)} = 0,\quad z_{31} = z_{32} = 0 \tag{2.1}$$

а сам интеграл в виде $m^{(3)}x^{(3)} + \varphi = \text{const}$ эквивалентен заданию $x^{(3)}$ как решения уравнения $A_3\dot{x}^{(3)} = z_{33}x^{(3)} + N^{(3)}$. Всюду $c^{(k)}$ означает проекцию вектора $\mathbf{c}$ на ось базиса E_3, $c^{(k)} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_k$. Очевидно, что при выполнении условий (2.1) последнее уравнение можно получить непосредственно из (1.5). В классическом случае симметричного гироскопа этот интеграл дает известное условие $x^{(3)} = \text{const}$. Здесь z_{ij} – элементы матрицы оператора Z в базисе E_3.

В предложении, что все A_i различны, ниже получены условия существования линейного интегрального инварианта (или частного интеграла) $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t) = 0$. Достаточно рассмотреть, без ограничения общности, случаи $\Phi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - 1$ и $\Phi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$.

Найдем условия существования линейного частного интеграла

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = 1 \tag{2.2}$$

Дифференцируя (2.2) в силу системы (1.5), получим условие

$$(\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n} \cdot J^{-1}((J\mathbf{x}) \times \mathbf{x} + Z\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \mathbf{a} + \mathbf{N}) = 0 \tag{2.3}$$

которое должно выполняться для всех t, $\mathbf{s}$ и для всех $\mathbf{x}$, связанных ограничением (2.2). Одним из необходимых условий является $\mathbf{r}_c \| J^{-1}\mathbf{n}$. В силу (2.2) положим $\mathbf{x} = \mathbf{n}|\mathbf{n}|^{-2} + \mathbf{l}$, где $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0$. Условие (2.3) эквивалентно обращению в нуль членов до второго порядка включительно по $\mathbf{l}$, т.е.

$$\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + J^{-1}Z\mathbf{n} + J^{-1}\mathbf{N}|\mathbf{n}|^{-2} + J^{-1}((J\mathbf{n}) \times \mathbf{n})|\mathbf{n}|^{-2}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{l} \cdot (\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + \mathbf{n} \cdot J^{-1}(Z\mathbf{l} + (J\mathbf{n} \times \mathbf{l} + J\mathbf{l} \times \mathbf{n})|\mathbf{n}|^{-2}) = 0 \quad \forall \mathbf{l}\colon\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = 0 \tag{2.5}$$

$$\mathbf{n} \cdot J^{-1}((J\mathbf{l}) \times \mathbf{l}) = 0 \quad \forall \mathbf{l}\colon\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = 0 \tag{2.6}$$

Как показывает анализ условия (2.6), оно выполняется только при

$$n^{(2)} = 0, \quad \alpha_1 (n^{(1)})^2 = \alpha_3 (n^{(3)})^2 \tag{2.7}$$

Здесь и ниже принято $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3$, $\alpha_k = (A_i - A_j)A_k^{-1}\delta_{ijk}$, $\delta_{ijk} = 1$, если (i, j, k) – циклическая перестановка (1, 2, 3) и $\delta_{ijk} = -1$, в противном случае. Из (2.7) следует, что вектор n расположен в плоскости, ортогональной средней оси эллипсоида инерции, и может быть наклонен к малой оси под углами $\pm\beta$, где $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\alpha_1 \alpha_3^{-1}}$.

Условие (2.5) эквивалентно условию коллинеарности

$$(\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + Z^T J^{-1}\mathbf{n} + \mathbf{c}|\mathbf{n}|^{-2} = q\mathbf{n} \tag{2.8}$$

где $\mathbf{c} = J(\mathbf{n} \times J^{-1}\mathbf{n}) - (J\mathbf{n}) \times (J^{-1}\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} = 0$. Умножив (2.8) скалярно на $\mathbf{n}$, найдем $q = \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + Z^T J^{-1}\mathbf{n})|\mathbf{n}|^{-2}$. Из (2.7) следует, что $\mathbf{n} \cdot J^{-1}((J\mathbf{n}) \times \mathbf{n}) = 0$, и (2.4) принимает вид $\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + J^{-1}Z\mathbf{n} + J^{-1}\mathbf{N}|\mathbf{n}|^{2}) = 0$, что позволяет найти параметр q, $q = -\mathbf{n} \cdot J^{-1}\mathbf{N}$.

Условие (2.8) при найденном значении q дает

$$(\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + Z^T J^{-1}\mathbf{n} + \mathbf{c}|\mathbf{n}|^{-2} = -(\mathbf{n} \cdot J^{-1}\mathbf{N})\mathbf{n} \tag{2.9}$$

что эквивалентно системе условий (2.4), (2.5). При этом для двух возможных направлений $\mathbf{n}$, задаваемых условием (2.7), вектор $\mathbf{c}$ коллинеарен средней оси эллипсоида, $\mathbf{c} = \pm |\mathbf{n}|^2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3}\,\mathbf{e}_2$.

Полученный результат для случая, когда эллипсоид инерции в точке O не является сферой, можно представить в следующей форме. Линейный интеграл (2.2) имеет вид

$$n^{(1)}x^{(1)} + n^{(3)}x^{(3)} = 1 \tag{2.10}$$

при выполнении необходимых и достаточных условий:

$$\begin{gathered} (\mathbf{n})^{\cdot}_{E_3} + Z^T J^{-1}\mathbf{n} + (\mathbf{L} \cdot J^{-1}\mathbf{n})\mathbf{n} = \mp\sqrt{\alpha_1 \alpha_3}\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{r}_c \| J^{-1}\mathbf{n}, \quad n^{(2)} = 0, \quad \sqrt{\alpha_1}\, n^{(1)} = \pm\sqrt{\alpha_3}\, n^{(3)} \end{gathered} \tag{2.11}$$

Начальные условия должны быть связаны соотношением (2.10), полное число скалярных условий здесь не более семи.

Из линейного соотношения, получающегося проектированием дифференциального условия (2.11) на $\mathbf{e}_2$, и условия (2.7) найдем

$$n^{(1)} = \cos\gamma(x^*)^{-1}, \quad n^{(3)} = \sin\gamma(x^*)^{-1}$$
$$\gamma = \pm\beta, \quad \mathrm{tg}\beta = \sqrt{\alpha_1\alpha_3^{-1}}, \quad x^* = -\zeta_{12}\sin\gamma\alpha_1^{-1} - \zeta_{32}\cos\gamma\alpha_3^{-1}, \quad z_{ij} = A_i\zeta_{ij} \tag{2.12}$$

Интеграл (2.10) теперь можно записать в явном виде

$$x^{(1)}\cos\gamma + x^{(3)}\sin\gamma = x^* \tag{2.13}$$

Два дифференциальных условия для $n^{(1)}$, $n^{(3)}$, получающиеся из (2.11), записываются, при учете (2.12), в виде

$$\dot{x}^* - x^*\left(\zeta_{11}\cos^2\gamma + \zeta_{33}\sin^2\gamma + (\zeta_{13} + \zeta_{31})\frac{\sin 2\gamma}{2}\right) = \frac{N^{(1)}\cos\gamma}{A_1} + \frac{N^{(3)}\sin\gamma}{A_3} \tag{2.14}$$

$$\dot{f} + \zeta_{13} + (\zeta_{33} - \zeta_{11})f - \zeta_{31}f^2 = 0, \quad f = \mathrm{tg}\gamma \tag{2.15}$$

Условие $\mathbf{r}_c \| J^{-1}\mathbf{n}$ при $\sqrt{\alpha_1}n^{(1)} = \pm\sqrt{\alpha_3}n^{(3)}$ совпадает по форме с известными конфигурационными условиями Гесса для твердого тела

$$\sqrt{A_1(A_2 - A_3)}r_c^{(1)} \mp \sqrt{A_3(A_1 - A_2)}r_c^{(3)} = 0, \quad r_c^{(2)} = 0 \tag{2.16}$$

Обозначая угол между $\mathbf{r}_c$ и малой полуосью эллипсоида инерции через φ, для условия (2.16) получаем

$$A_1\sqrt{\alpha_1}\cos\varphi = \pm A_3\sqrt{\alpha_3}\sin\varphi \tag{2.17}$$

а интеграл (2.13) принимает вид

$$A_1x^{(1)}\cos\varphi + A_3x^{(3)}\sin\varphi = x^*\sqrt{1 + \alpha_1\alpha_3}A_1A_3A_2^{-1} \tag{2.18}$$

Интеграл (2.18) выражает проекцию кинетического момента на направление $\mathbf{r}_c$.

Таким образом, показано, что линейный интеграл (2.2) имеет вид (2.13). Необходимыми и достаточными условиями его существования являются конфигурационные условия (2.16) и дифференциальные соотношения (2.14), (2.15).

Повторяя приведенные выше рассуждения для интеграла $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$, можно показать, что его форма и условия существования получаются из (2.13)–(2.16) при $x^* = 0$.

При наличии у эллипсоида инерции оси вращения, например, при $A_1 = A_2 \neq A_3$, необходимыми условиями существования частного интеграла (2.2) остаются условия (2.1) и, следовательно, в этом случае существует разобранный интеграл $F = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + \varphi(t)$.

Рассмотрение случаев управления моментом $\mathbf{N}$ в режиме, при котором $\mathbf{N}$ ортогонален или коллинеарен $\mathbf{x}$, может быть выполнено заданием $\mathbf{N}$ в виде $\mathbf{N} = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{x}$ или $\mathbf{N} = p(t)\mathbf{x}$, что сохраняет вид (1.5) динамической системы, причем момент $\mathbf{N}$ будет включен в линейный член $Z\mathbf{x}$, а к оператору Z добавится в первом случае $M(\mathbf{u})$, а во втором pE (E – тождественный оператор). В условиях (2.14), (2.15) следует положить $N^{(1)} = N^{(3)} = 0$ и изменить ζ_{ij}. Конфигурационное условие (2.16) сохраняется.

Наличие интеграла (2.13) позволяет понизить порядок системы (1.5). В случае, когда существуют интегралы вида (2.13) для $\gamma = \beta$ и $\gamma = -\beta$, можно полностью определить компоненты $\mathbf{x}$, так как (при различных A_i) условие (2.16) для обоих знаков может быть выполнено только при $\mathbf{r}_c = 0$ и $x^{(1)} = -\zeta_{32}\alpha_3^{-1}$, $x^{(3)} = -\zeta_{12}\alpha_1^{-1}$. Для $x^{(2)}$ из (1.5) теперь получим линейное уравнение

$$\dot{x}^{(2)}-\zeta_{22}x^{(2)}=(\alpha_2\zeta_{12}\zeta_{32}-\alpha_1\zeta_{21}\zeta_{32}-\alpha_3\zeta_{23}\zeta_{12})(\alpha_1\alpha_3)^{-1}+N^{(2)}A_2^{-1}$$

3. Рассмотрим применение полученных для системы (1.5) общих результатов к анализу модели M. В этом случае

$$z_{ii}=-\dot{A}_i,\ \ z_{12}=-z_{21}=-G_3^{(3)},\ \ z_{13}=-z_{31}=G_3^{(2)},\ \ z_{23}=-z_{32}=-G_3^{(1)}$$

Необходимое условие (2.15) существования линейного интеграла можно, с учетом условия (2.17), в котором оставляем знак плюс, записать в виде

$$\dot{\varphi}=-G_3^{(2)}A_2^{-1} \tag{3.1}$$

Обозначим $g = x^*\nu^{-1}$, $\nu = \cos\gamma(A_1\cos\varphi)^{-1}$, тогда $g=(G_3^{(1)}\sin\varphi-G_3^{(3)}\cos\varphi)(\alpha_1\alpha_3)^{-1/2}$. Условие (2.14) можно записать, учитывая (3.1), как условие для g:

$$\dot{g}-(\alpha_1\alpha_3)^{1/2}A_2^{-1}G_3^{(2)}g=N_{rc} \tag{3.2}$$

Здесь $N_{rc} = N_1\cos\varphi + N_3\sin\varphi$ – проекция вектора $\mathbf{N}$ на направление $\mathbf{r}_c$.

Интеграл (2.13) принимает вид

$$G^{(1)}\cos\varphi+G^{(3)}\sin\varphi=A_2(G_3^{(3)}\sin\varphi(A_2-A_3)^{-1}-G_3^{(1)}\sin\varphi(A_1-A_2)^{-1}) \tag{3.3}$$

С учетом условия Гесса из (3.2) получим

$$(A_2(G_3^{(3)}\sin\varphi(A_2-A_3)^{-1}-G_3^{(1)}\cos\varphi(A_1-A_2)^{-1})^{\cdot}=L_{rc} \tag{3.4}$$

Таким образом, частный линейный интеграл существует при выполнении условий (2.17), (3.1), (3.4) и имеет вид (3.3).

4. Выясним механический смысл линейного интеграла и условий его существования. Введем ортогональный базис E_5, получающийся из E_3 поворотом вокруг средней оси эллипсоида инерции на угол φ. Пусть $\mathbf{e}_{5i}$ – орты E_5. Координаты $\mathbf{e}_{5i}$ в E_3 следующие: $\mathbf{e}_{51}$ = (cos φ; 0; sin φ), $\mathbf{e}_{52}$ = (0; 1; 0), $\mathbf{e}_{53}$ = (–sin φ; 0; cos φ). Можно показать, что (здесь $G^{(5i)} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{e}_{5i}$)

$$A_2(G_3^{(3)}\sin\varphi(A_2-A_3)^{-1}-G_3^{(1)}\cos\varphi(A_1-A_2)^{-1})=G_3^{(51)}+G_3^{(53)}(\alpha_1\alpha_3)^{1/2} \tag{4.1}$$

Интеграл (3.3) при учете (4.1) дает выражение проекции кинетического момента (КМ) системы на направление $\mathbf{r}_c$ через проекции на $\mathbf{r}_c$ и ортогональное ему направление $\mathbf{e}_{53}$ КМ системы в ее движении относительно главного базиса

$$G_{rc}=G_3^{(51)}+G_3^{(53)}(\alpha_1\alpha_3)^{-1/2} \tag{4.2}$$

Так как $\mathbf{G}-\mathbf{G}_3=J\mathbf{x}_{31}=\mathbf{G}^e$ – КМ системы в ее переносном движении вместе с главным базисом E_3, то интеграл (4.2) можно привести к виду

$$G_{rc}^e=G_3^{(53)}(\alpha_1\alpha_3)^{-1/2} \tag{4.3}$$

выражающему проекцию на $\mathbf{r}_c$ КМ системы в переносном движении с базисом E_3 через проекцию КМ системы в ее движении относительно базиса E_3 на направление, ортогональное $\mathbf{r}_c$ и средней оси эллипсоида инерции. При $G_3^{(53)} = 0$ получим аналог линейного интеграла для твердого тела: $G_{rc}^e = 0$.

Необходимое условие (3.4) можно представить в виде

$$(G_3^{(51)}+G_3^{(53)}(\alpha_1\alpha_3)^{-1/2})^{\cdot}=L_{rc} \tag{4.4}$$

При выполнении условия Гесса вращение $\mathbf{r}_c$ происходит в плоскости, ортогональной средней оси эллипсоида инерции, и вектор $J\mathbf{x}_{53}$ равен КМ системы в ее переносном движении – вращении вместе с $\mathbf{r}_c$ относительно E_3. Так как в базисе $E_3\,\mathbf{x}_{53}=(0;\ -\dot{\varphi};\ 0)$, то необходимое условие существования интеграла (3.1) выражает равенство проекций на среднюю ось эллипсоида инерции КМ системы в ее движении относительно E_3 и КМ системы в ее вращении с $\mathbf{r}_c$ относительно E_3.

Сравнив интеграл (3.3) с условием (3.4), получим

$$\dot{G}_{rc}=N_{rc} \tag{4.5}$$

Следовательно, в рассматриваемом движении производная проекции на направление барицентрического вектора КМ системы равна проекции на это же направление главного момента квазиреактивных сил.

Сопоставим свойство (4.5) с теоремой об изменении КМ: $(\mathbf{G})^{\cdot}_{E_5}+\mathbf{x}_{51}\times\mathbf{G}=\mathbf{N}+\mathbf{s}\times\mathbf{a}$. Отсюда, учитывая неизменность в E_5 направления $\mathbf{r}_c$, получим $\mathbf{r}_c^0\cdot(\mathbf{x}_{51}\times\mathbf{G})+\dot{G}_{rc}=N_{rc}$, что находится в соответствии с (4.5), так как можно показать, что при наличии линейного интеграла векторы $\mathbf{r}_c^0$, $\mathbf{x}_{51}$, $\mathbf{G}$ компланарны.

Если учесть (3.3) и условие Гесса, то в E_3 справедливо равенство

$$\mathbf{G}-G_{rc}\mathbf{r}_c^0=(G^{(1)}\sin^2\varphi-G^{(3)}\sin\varphi\cos\varphi;\ G^{(2)};\ G^{(3)}\cos^2\varphi-G^{(1)}\cos\varphi\sin\varphi) \tag{4.6}$$

Введем вектор $\mathbf{x}_c^a=\mathbf{r}_c^0\times(\mathbf{r}_c^0)^{\cdot}_{E_1}=\mathbf{r}_c^0\times((\mathbf{r}_c^0)^{\cdot}_{E_3}+\mathbf{x}_{31}\times\mathbf{r}_c^0)$. Выражая $\mathbf{x}_{31}$ через $\mathbf{G}$, в E_3 получим

$$\mathbf{x}_c^a=A_2^{-1}(G^{(1)}\sin^2\varphi-G^{(3)}\sin\varphi\cos\varphi;\ G^{(2)}-G^{(3)}-A_2\dot{\varphi};G^{(3)}\cos^2\varphi-G^{(1)}\cos\varphi\sin\varphi)$$

Сравнивая $\mathbf{x}_c^a$ с (4.6) и считая необходимое условие (3.1) выполненным, получим представление КМ системы, имеющий линейный интеграл, в виде двух составляющих:

$$\mathbf{G}=G_{rc}\mathbf{r}_c^0+A_2\mathbf{x}_c^a=G_{rc}\mathbf{r}_c^0+A_2\mathbf{r}_c^0\times(\mathbf{r}_c^0)^{\cdot}_{E_1} \tag{4.7}$$

Пусть $\mathbf{v}_c^a$ – абсолютная скорость центра инерции C, тогда формула (4.7) принимает вид

$$\mathbf{G}=G_{rc}\mathbf{r}_c^0+A_2|\mathbf{r}_c|^{-2}\mathbf{r}_c\times\mathbf{v}_c^a \tag{4.8}$$

Итак, показано, что при наличии линейного интеграла КМ системы $\mathbf{G}$ имеет две составляющие, одна из которых коллинеарна $\mathbf{r}_c$ и задается формулой (3.3) или (4.2), а другая равна КМ материальной точки, совпадающей с центром инерции системы и имеющей массу $A_2|\mathbf{r}_c|^{-2}$. Последняя составляющая равна также КМ материальной точки с радиус-вектором $(M\mathbf{r}_c^2A_2^{-1})^{-1/2}\mathbf{r}_c$, масса которой равна массе системы M.

5. Получим условия существования квадратичного интеграла системы (1.3) вида

$$1/2\,\mathbf{G}\cdot(B\mathbf{G})+\mathbf{m}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}+\varphi(t)=\mathrm{const} \tag{5.1}$$

считая, что $J, B, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{G}_i, \varphi \in C^1[0, +\infty)$. Дифференцирование равенства (5.1) в силу системы (1.3) приводит к тождеству

$$(B\mathbf{G}+\mathbf{m})\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{x}_{21}+\Lambda\mathbf{x}_{21}+\mathbf{s}\times\mathbf{a}+\mathbf{L})+\tfrac{1}{2}\mathbf{G}\cdot(\dot{B}\mathbf{G})+\dot{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{G}+\dot{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{s}+\mathbf{n}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{x}_{21})+\dot{\varphi}\equiv 0 \qquad (5.2)$$

Обозначив $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{21}$ и подставив $\mathbf{G} = J\mathbf{x} + \mathbf{G}_2$ в (5.2), получим следующие, однородные по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$, тождества:

$$(BJ\mathbf{x}) \cdot (J\mathbf{x} \times \mathbf{x}) = 0 \qquad (5.3)$$

$$(BJ\mathbf{x})\cdot(\mathbf{G}_2\times\mathbf{x}+\Lambda\mathbf{x})+(B\mathbf{G}_2+\mathbf{m})\cdot(J\mathbf{x}\times\mathbf{x})+\tfrac{1}{2}\mathbf{x}\cdot(J\dot{B}J\mathbf{x})=0 \qquad (5.4)$$

$$(BJ\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{a}) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{x}) = 0 \qquad (5.5)$$

$$\mathbf{x}\cdot(JB\mathbf{L})+(B\mathbf{G}_2+\mathbf{m})\cdot(\mathbf{G}_2\times\mathbf{x}+\Lambda\mathbf{x})+\mathbf{x}\cdot(J\dot{B}\mathbf{G}_2)+\dot{\mathbf{m}}\cdot(J\mathbf{x})=0 \qquad (5.6)$$

$$(B\mathbf{G}_2+\mathbf{m})\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{a})+\dot{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{s}=0 \qquad (5.7)$$

$$(B\mathbf{G}_2+\mathbf{m})\cdot\mathbf{L}+\tfrac{1}{2}\mathbf{G}_2\cdot(\dot{B}\mathbf{G}_2)+\dot{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{G}_2+\dot{\varphi}=0 \qquad (5.8)$$

Далее рассматривается случай, когда все A_i различны.

Предложение 1. В интеграле (5.1) оператор B имеет вид

$$B = \nu_1(t)J^{-1} + \nu_2(t)E \qquad (5.9)$$

Действительно, тождество (5.3) эквивалентно компланарности векторов $BJ\mathbf{x}$, $J\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ при всех $\mathbf{x}$. Если вектор $\mathbf{x}$ неколлинеарен главной оси инерции, то векторы $J\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$ неколлинеарны и тогда $BJ\mathbf{x} = \nu_1\mathbf{x} + \nu_2 J\mathbf{x}$, откуда следует (5.9).

Предложение 2. Необходимым условием существование интеграла является представимость B и $\mathbf{n}$ в виде $B = \nu J^{-1}$, $\mathbf{n} = \nu\mathbf{a}$.

Тождество (5.5) выполняется при всех $\mathbf{s}$, только если $\mathbf{n} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{a} \times BJ\mathbf{x}$. Полагая $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, умножим скалярно последнее тождество на $\mathbf{e}_j$. С учетом (5.9) получим для $i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3$: $\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{n} - (\nu_1 + \nu_2 A_i)\mathbf{a}) = 0$. Эта система линейных однородных уравнений для компонент $\mathbf{n}$, а в силу $\mathbf{a} \neq 0$ имеет ненулевое решение, следовательно ее определитель равен нулю, $\nu_2^3(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_1 - A_3) = 0$. Так как все A_i различны, то $\nu_2 \equiv 0$. При этом из системы следует, что $\mathbf{n} = \nu_1\mathbf{a}$, а из (5.9) $B = \nu_1 J^{-1}$.

Предложение 3. Параметр $\mathbf{n}(t)$ в интеграле есть орт вектора $\mathbf{r}_c(t)$, а оператор B имеет вид $B = a^{-1}J^{-1}$.

Тождество (5.7) выполняется, только если

$$\dot{\mathbf{n}}+\mathbf{a}\times(B\mathbf{G}_2+\mathbf{m})=0 \qquad (5.10)$$

По предложению 2 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{a}$, тогда из (5.10) следует, что $|\mathbf{n}| = \mathrm{const}$, откуда $|\nu\mathbf{a}| = \mathrm{const}$. Так как левая часть в (5.1) задается с точностью до постоянного множителя, то можно положить $|\nu\mathbf{a}| = 1$ и $\nu = a^{-1}$. При $\nu = a^{-1}$ предложение 3 получаем из предложения 2.

Предложение 4. Для существования интеграла необходимо, чтобы в базисе E_4, вращающемся относительно E_2 с угловой скоростью

$$\mathbf{x}_{42} = J^{-1}\mathbf{G}_2 + a\mathbf{m} \qquad (5.11)$$

направление радиус-вектора центра инерции было неизменно.

Условие (5.10), учитывая, что $\mathbf{n} = \mathbf{a}^0$, $B = a^{-1}J^{-1}$, можно записать в виде $\dot{\mathbf{a}}^0 + \mathbf{a}^0 \times \mathbf{x}_{42} = 0$, откуда и следует

$$(\mathbf{a}^0)^{\cdot}_{E_4} = 0 \tag{5.12}$$

Предложение 5. Для существования интеграла необходимо, чтобы

$$(\mathbf{a}J)^{\cdot}_{E_4} = 2a\Lambda \tag{5.13}$$

Тождество (5.4) имеет вид $\mathbf{x} \cdot (F\mathbf{x}) \equiv 0$, где $F = \Lambda + M(\mathbf{x}_{42})J - (2a)^{-1}(aJ)^{\cdot}$ и выполняется, только если оператор F – кососимметрический. Поскольку $F + F^T = 0$, то $a^{-1}(aJ)^{\cdot} + JM(\mathbf{x}_{42}) - M(\mathbf{x}_{42})J = 2\Lambda$, откуда следует (5.13), если учесть выражение (5.11) и использовать соотношение (см. например [2], с. 145)

$$(\mathbf{a}J)^{\cdot}_{E_2} = (\mathbf{a}J)^{\cdot}_{E_4} + M(\mathbf{x}_{42})aJ - aJM(\mathbf{x}_{42})$$

Предложение 6. Для существования интеграла необходимо, чтобы

$$\mathbf{L} = \Lambda\mathbf{x}_{42} + (\mathbf{G})^{\cdot}_{E_4} \tag{5.14}$$

Тождество (5.6) при учете того, что $B\mathbf{G}_2 + \mathbf{m} = a^{-1}\mathbf{x}_{42}$, эквивалентно условию $\mathbf{L} = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{x}_{42} - \Lambda\mathbf{x}_{42} - aJ\dot{B}\mathbf{G}_2 - aJ\dot{\mathbf{m}}$. Так как по (1.2) $\mathbf{G}_2 = J\mathbf{x}_{42} + \mathbf{G}_4$, то из (5.11) $\mathbf{m} = -a^{-1}J^{-1}\mathbf{G}_4$ и, учитывая, что $B = a^{-1}J^{-1}$, можно представить $\mathbf{L}$ в виде

$$\mathbf{L} = (J\mathbf{x}_{42} + \mathbf{G}_4) \times \mathbf{x}_{42} - \Lambda\mathbf{x}_{42} + (aJ)^{\cdot}a^{-1}\mathbf{x}_{42} + \dot{\mathbf{G}}_4$$

Переходя к дифференцированию в E_4 и используя (5.13), получим (5.14).

Предложение 7. Параметр $\varphi(t)$ в интеграле имеет вид

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{m} \cdot (B^{-1}\mathbf{m}) = \tfrac{1}{2}a^{-1}\mathbf{G}_4 \cdot (J^{-1}\mathbf{G}_4) \tag{5.15}$$

Для доказательства положим в тождестве (5.2) $\mathbf{G} = -B^{-1}\mathbf{m}$, и так как сумма слагаемых с $\dot{\mathbf{s}}$ тождественно равна нулю, то получим $2\dot{\varphi} = -\mathbf{m} \cdot (B^{-1}\dot{B}B^{-1}\mathbf{m}) + 2\dot{\mathbf{m}} \cdot (B^{-1}\mathbf{m})$, откуда и следует первое равенство в (5.15). Так как $\mathbf{m} = -(aJ)^{-1}\mathbf{G}_4$, то предложение доказано.

Предложение 8. Для существования квадратичного интеграла (5.1) необходимо и достаточно выполнения условий (5.12)–(5.14), при этом $B = (aJ)^{-1}$, $\mathbf{m} = -(aJ)^{-1}\mathbf{G}_4$, $\mathbf{n} = \mathbf{a}^0$, $\varphi = (2a)^{-1}\mathbf{G}_4 \cdot (J^{-1}\mathbf{G}_4)$.

Таким образом, найдены в явном виде параметры, входящие в интеграл, и получены критериальные условия его существования.

6. Выясним механический смысл квадратичного интеграла. С учетом предложения 8 интеграл (5.1) представим в виде

$$a^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_4) \cdot (J^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_4)) + 2\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{s} = \mathrm{const} \tag{6.1}$$

Так как $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1$, то из (1.2) следует, что $\mathbf{G} - \mathbf{G}_4 = J\mathbf{x}_{41}$ и эквивалентной формой интеграла является

$$a^{-1}\mathbf{x}_{41} \cdot (J\mathbf{x}_{41}) + 2\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{s} = \mathrm{const} \tag{6.2}$$

Здесь $\mathbf{x}_{41} \cdot (J\mathbf{x}_{41})/2 = T_4^e$ кинетическая энергия системы в ее переносном движении вместе с E_4 (т.е., в частности, во вращении вместе с $\mathbf{r}_c$). Так как $a\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{s} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = P\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{s} = V$ – потенциальная энергия системы, то интегралу (6.2) может быть придана форма

$$T_4^e + V = P(t)|\mathbf{r}_c(t)|\text{const} \qquad (6.3)$$

Таким образом, для рассмотренной выше сложной механической системы с изменяемой конфигурацией и массой в случае, когда ее центр инерции не совпадает с неподвижной точкой носителя и главные моменты инерции системы попарно различны, получен следующий результат.

Предложение 9. Квадратичный по компонентам кинетического момента интеграл, если он существует, может быть записан в одной из форм (6.1)–(6.3).

Если квадратичный интеграл существует, то он выражает тот факт, что сумма кинетической энергии системы в ее переносном движении вместе с базисом E_4 и потенциальной энергии системы в однородном поле силы тяжести прямо пропорциональна модулю статического момента системы относительно неподвижной точки. В частном случае, если $P(t)|\mathbf{r}_c(t)| = \text{const}$, интеграл принимает форму физического интеграла энергии

$$T_4^e + V = \text{const} \qquad (6.4)$$

Ниже будет показано, что условие (5.13) определяет угловую скорость $\mathbf{x}_{43}$ базиса E_4 относительно главного базиса E_3, следовательно, может быть найдена и угловая скорость $\mathbf{x}_{42}$ базиса E_4 относительно носителя. Таким образом, все параметры, входящие в интеграл и критериальные условия, выражаются в явном виде через заданные величины.

7. Перейдем в условии (5.13) к дифференцированию в E_3:

$$(aJ)^{\cdot}_{E_3} = 2a\Lambda + M(\mathbf{x}_{43})aJ - aJM(\mathbf{x}_{43}) \qquad (7.1)$$

Обозначим $\lambda_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\Lambda \mathbf{e}_j)$. Из определения (1.5) следует, что

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sum \dot{m}_n (r_n^2 \delta_{ij} - r_n^{(i)} r_n^{(j)})$$

Выполняя в (7.1) умножение на $\mathbf{e}_i$ слева и на $\mathbf{e}_i$ справа, получим

$$(aA_i)^{\cdot}\delta_{ij} = 2a\lambda_{ij} + a(A_i - A_j)(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)\cdot \mathbf{x}_{43}, \quad i,j = 1,2,3 \qquad (7.2)$$

При $i = j$ отсюда следуют условия, связывающие заданные функции

$$(\ln a)^{\cdot} = 2\lambda_{11}A_1^{-1} - (\ln A_1)^{\cdot} = 2\lambda_{22}A_2^{-1} - (\ln A_2)^{\cdot} = 2\lambda_{33}A_3^{-1} - (\ln A_3)^{\cdot} \qquad (7.3)$$

При $i \neq j$ условия (7.2) выражают компоненты угловой скорости

$$x_{43}^{(k)} = -2\lambda_{ij}(A_k \alpha_k)^{-1}, \quad k \neq i, \ k \neq j \qquad (7.4)$$

Таким образом, условие (5.13) эквивалентно трем скалярным условиям (7.3) и заданию угловой скорости $\mathbf{x}_{43}$ в виде (7.4).

Из полученной зависимости между $\mathbf{x}_{43}$ и λ_{ij} следует, что базис E_4 совпадает с главным базисом E_3 тогда и только тогда, когда базис, составленный из собственных векторов оператора Λ совпадает с E_3.

8. Преобразуем исходную систему (1.3) при выполнении критериальных условий (5.12)–(5.14) и непосредственно проверим их достаточность для существования квадратичного интеграла. Для этого перейдем в (1.3) к производным в базисе E_4 и подставим $\mathbf{L}$ из (5.14):

$$(\mathbf{G})^{\cdot}_{E_4} = \mathbf{G} \times \mathbf{x}_{41} + \Lambda \mathbf{x}_{41} + (\mathbf{G}_4)^{\cdot}_{E_4} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{s})^{\cdot}_{E_4} = \mathbf{s} \times \mathbf{x}_{41}$$

Подставляя сюда $\mathbf{G} = J\mathbf{x}_{41} + \mathbf{G}_4$ и Λ из (5.13), придем к системе

$$(2a)^{-1}(aJ)^{\cdot}_{E_4}\mathbf{x}_{41} + aJ(a^{-1}\mathbf{x}_{41})^{\cdot}_{E_4} = (J\mathbf{x}_{41} + \mathbf{G}_4) \times \mathbf{x}_{41} + \mathbf{s} \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{s})^{\cdot}_{E_4} = \mathbf{s} \times \mathbf{x}_{41} \qquad (8.1)$$

Умножая первое уравнение системы (8.1) скалярно на $a^{-1}\mathbf{x}_{41}$, учитывая условие (5.12) и второе уравнение (8.1), получим

$$(a^{-1}\mathbf{x}_{41}\cdot(aJa^{-1}\mathbf{x}_{41}))^{\cdot}=2\mathbf{x}_{41}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{a}^0)=-2\mathbf{a}^0\cdot(\mathbf{s})^{\cdot}_{E_4}=-2(\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{s})^{\cdot}$$

откуда и следует существование интеграла (6.2).

Выполним еще одно преобразование системы. Обозначим $\Phi=(aJ)^{1/2}$. Систему (8.1) можно введя переменные

$$\mathbf{y}=a^{-1}\Phi\mathbf{x}_{41},\ \ \tau=\int a(t)dt$$

привести к виду

$$\left.\frac{d\mathbf{y}}{d\tau}\right|_{E_4}=(a^3A_1A_2A_3)^{-1/2}(\Phi^2\mathbf{y}+\Phi\mathbf{G}_4)\times\mathbf{y}+\mathbf{c}\times\mathbf{y}+\Phi^{-1}(\mathbf{s}\times\mathbf{a}^0),\quad \left.\frac{d\mathbf{s}}{d\tau}\right|_{E_4}=\mathbf{s}\times\Phi^{-1}y \tag{8.2}$$

Если направление $\mathbf{a}$ постоянно в E_4 то, умножая (8.2) на $\mathbf{y}$, получаем интеграл, эквивалентный (6.2):

$$y^2+2\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{s}=\text{const}.$$

Вектор $\mathbf{c}$ в уравнении (8.2) задается условием $2aM(\mathbf{c})=\Phi M(\mathbf{x}_{43})\Phi^{-1}+\Phi^{-1}M(\mathbf{x}_{43})\Phi-$ $-2M(\mathbf{x}_{43})$, откуда находятся компоненты $\mathbf{c}$

$$c^{(k)}=(\sqrt{A_i}-\sqrt{A_j})^2(2a\sqrt{A_iA_j})^{-1}x_{43}^{(k)},\quad k\neq i,\ k\neq j \tag{8.3}$$

9. Результаты для модели M могут быть получены при $\Lambda\equiv 0$. Из формулы (7.4) тогда следует $\mathbf{x}_{43}=0$ и базис E_4 совпадает с E_3. Интеграл (6.1) принимает вид

$$a^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_3)\cdot(J^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_3))+2\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{s}=\text{const} \tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{G}-\mathbf{G}_3=J\mathbf{x}_{31}$, и этот интеграл также можно записать в форме (6.2): $a^{-1}\mathbf{x}_{31}\cdot(J\mathbf{x}_{31})+2\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{s}=\text{const}$.

Совокупность необходимых и достаточных условий существования квадратичного интеграла получается из (5.12), (5.14), (7.3) и имеет вид

$$A_i=a^{-1}c_i\ \ (c_i=\text{const}),\quad \mathbf{r}_c^0|_{E_3}=\text{const},\quad \mathbf{L}=\sum\dot{m}_n\mathbf{r}_n\times\mathbf{u}_n=(\mathbf{G}_3)^{\cdot}_{E_3} \tag{9.2}$$

Н.Н. Макеевым (см. работы, цитированные в сноске на с. 37) исследовались условия существования интеграла вида

$$\mathbf{G}\cdot(B\mathbf{G})+\mathbf{m}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}=\text{const}$$

Этот интеграл содержится в (5.1) при $\varphi=\text{const}$, и так как по (5.13) оператор aJ постоянен в E_3, то из формулы (5.15) следует, что кинетический момент G_3 постоянен в E_3 и в соответствии с (9.2) $\mathbf{L}=0$. Таким образом, квадратичный интеграл по Н.Н. Макееву можно записать в виде (9.1), а условиями его существования являются: $A_i=a^{-1}c_i$, $(\mathbf{r}_c^0)^{\cdot}_{E_3}=0$, $(\mathbf{G}_3)^{\cdot}_{E_3}=0$, $\mathbf{L}=0$.

Автор благодарит Н.Н. Макеева за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1961.

Саратов

Поступила в редакцию
10.XI.1993